2. série
O dělitelnosti čísel celých

1. ÚLOHA
Šestá mocnina přirozeného čísla se v dekadickém zápisu skládá z cifer 0, 2, 3, 4, 4, 7, 8, 8, 9. Určete toto číslo.

2. ÚLOHA
Jestliže kritérium dělitelnosti nepřihlíží k pořadí cifer čísla (v desítkové soustavě), potom to je kritérium dělitelnosti jednou, třemi nebo devíti. Dokažte.

3. ÚLOHA
Dokažte, že čísla $\binom{p}{k}$, kde p je prvočíslo a $k = 1, 2, \ldots, p-1$, jsou dělitelná číslem p.[1]

4. ÚLOHA
Zjistěte poslední cifru čísla $37^{193^{81}}$.

5. ÚLOHA
Dokažte, že existuje nekonečně mnoho přirozených čísel n, k nimž existují přirozená čísla a, b, c, d; a, b nesoudělná, $(a, b) \neq (c, d)$ taková, že $n = a^2 + b^2 = c^2 + d^2$.

6. ÚLOHA
Dokažte, že pro každá dvě kladná reálná čísla x, y a pro každé n přirozené platí:

$$1 + \sqrt{xy} + \cdots + \sqrt{x^n y^n} \leq \sqrt{1 + x + \cdots + x^n} \cdot \sqrt{1 + y + \cdots + y^n}\,.$$

7. ÚLOHA
Je dána kružnice k a její tětiva AB, která není průměrem. Najděte množinu všech průsečíků úhlopříček rovnoramenných lichoběžníků $ABCD$ s rameny AB, CD vepsaných do kružnice k.

[1] $\binom{p}{k} = \frac{p(p-1)\ldots(p-k+1)}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot k}$

Řešení 2. série

1. Úloha

Nejmenší číslo složené z těchto cifer je 203447889.

$$203447889^{\frac{1}{6}} > \sqrt{(203^{\frac{1}{3}} \cdot 100)} > \sqrt{5} \cdot 10 > 20$$

Největší takové číslo je 988744320.

$$988744320^{\frac{1}{6}} < \sqrt{1000} < 33$$

Pokud poslední cifra čísla n je 0 (resp. 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9), je poslední cifra čísla n^6 0 (resp. 1, 4, 9, 6, 5, 6, 9, 4, 1). Odtud plyne, že hledané číslo končí na 2,3,7 nebo 8 (kdyby končilo 0, končila by jeho šestá mocnina šesti nulami). Spočítáme-li ciferný součet šesté mocniny, zjistíme, že číslo musí být dělitelné třemi. Odtud už plyne, že jediné číslo, které může vyhovovat všem podmínkám je číslo 27 a šestá mocnina tohoto čísla je skutečně 387420489.

2. Úloha

„Kritérium nepřihlíží k pořadí cifer“ znamená, že pokud je jedno číslo složené z jistých cifer dělitelné číslem n, potom jsou i všechna ostatní čísla složená z těchto cifer dělitelná číslem n. Jistě existuje číslo dělitelné n, které obsahuje cifry 1 a 0. Nulu můžeme zařídit na konci vynásobením deseti, jedničku na prvním místě — je-li totiž $10^k > n$, pak nějaký násobek čísla n leží v intervalu $[10^k, 2 \cdot 10^k - 1]$. Potom i číslo složené ze stejných cifer, které má na konci 01, je dělitelné číslem n a po prohození posledních dvou cifer je opět dělitelné číslem n, tedy i jejich rozdíl musí být dělitelný číslem n, ale ten je roven devíti, tedy $n|9$, odtud plyne dokazované tvrzení.

3. Úloha

Že je číslo $\binom{p}{k}$ celé, lze dokázat například indukcí ze součtového vzorce $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$, který dokážeme snadno rozepsáním. Že je dělitelné číslem p, plyne z toho, že čitatel je dělitelný číslem p a jmenovatel není dělitelný číslem p.

4. Úloha

Snadno zjistíme, že poslední cifra čísla 7^4 je 1, tedy i poslední cifra čísla 37^4 je 1. Protože $193 = 4K + 1$, po umocnění (rozpisem dle binomické věty) dostaneme $193^{81} = 4L + 1$ a $37^{4L+1} = 37^{4L} \cdot 37 = (37^4)^L \cdot 37$. Pokud číslo končí cifrou 1, i jeho libovolná mocnina končí cifrou 1, proto číslo $37^{193^{81}}$ končí cifrou 7.

5. Úloha

Položme $a = (xz - yw)$, $b = (xw + yz)$, $c = (xz + yw)$, $d = (xw - yz)$. Tato čtyři čísla jistě splňují požadovanou identitu. Stačí např. zvolit $y = 1$, $z = 5$, $w = 6$ a x volit tak, aby $6x + 5$ bylo prvočíslo.

6. ÚLOHA

Důkaz provedeme matematickou indukcí. Jistě $1 \le 1$, stačí tedy dokázat indukční krok (obě strany nerovnice jsou zřejmě nezáporné, můžeme tedy umocnit na druhou):

$$(1+\sqrt{xy}+\cdots+\sqrt{x^{n+1}y^{n+1}})^2 = (1+\cdots+\sqrt{x^n y^n})^2 + 2(1+\cdots+\sqrt{x^n y^n})\sqrt{x^{n+1}y^{n+1}}+$$

$$+x^{n+1}y^{n+1} \le (1+x+\cdots+x^n)(1+y+\cdots+y^n)+$$

$$+2\sqrt{(1+x+\cdots+x^n)(1+y+\cdots+y^n)}\sqrt{x^{n+1}y^{n+1}}+$$

$$+x^{n+1}y^{n+1} \le (1+x+\cdots+x^n)(1+y+\cdots+y^n)+$$

$$+x^{n+1}(1+y+\cdots+y^n)+y^{n+1}(1+x+\cdots+x^n)+x^{n+1}y^{n+1} =$$

$$= (\sqrt{1+x+\cdots+x^{n+1}}\sqrt{1+y+\cdots+y^{n+1}})^2 ,$$

kde první nerovnost plyne z indukčního předpokladu a druhá z nerovnosti mezi aritmetickým a geometrickým průměrem.

7. ÚLOHA

Hledanou množinou je oblouk, jehož krajními body jsou body A, B a který prochází středem S kružnice k. Uvažujme rovnoramenný lichoběžník $ABCD$, označme $|\sphericalangle ASB| = 2\alpha$ a T průsečík úhlopříček. Z věty o středovém a obvodovém úhlu víme, že $|\sphericalangle BDA| = \alpha$ a z rovnoramennosti lichoběžníka $|\sphericalangle CAD| = \alpha$, z toho plyne, že $|\sphericalangle ATD| = \pi - 2\alpha$, a tedy $|\sphericalangle ATB| = 2\alpha$, z čehož plyne, že bod T leží na uvažované kružnici.

Vezměme nyní naopak libovolný bod T oblouku ASB. Sestrojme úhlopříčky lichoběžníka a jeho vrcholy C a D. Z věty o středovém a obvodovém úhlu víme, že $|\sphericalangle BDA| = \alpha$ a známe i velikost úhlu ATD, odkud dopočítáme $|\sphericalangle CAD| = \alpha$, z čehož plyne, že lichoběžník je rovnoramenný.