7. série

Polynomy

1. ÚLOHA

Zadefinujte rovnost dvou polynomů aspoň dvěma způsoby (pomocí rovnosti v každém bodě, rovnosti příslušných koeficientů) a dokažte ekvivalenci definic.[1]

2. ÚLOHA

Řekněme, že polynom f stupně n je rozvinut v bodě α, právě když existují čísla $a_0, \ldots, a_n$ tak, že platí pro každé reálné x

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k (x - \alpha)^k.$$

Dokažte, že každý polynom lze rozvinout v libovolném bodě.[2]

3. ÚLOHA

Označme si S_a součet koeficientů polynomu $(x^2 - 3x + 2)^n$ rozvinutého v bodě a. Vypočtěte S_0, S_1, S_a.

4. ÚLOHA

Dokažte, že polynom $3x^3 - 5x^2 - 9x + 4$ nemá celočíselné kořeny.

5. ÚLOHA

Mějme polynom f druhého stupně s celočíselnými koeficienty. Jestliže $f(k)$ je dělitelné pěti pro každé celé k, pak všechny koeficienty polynomu jsou dělitelné pěti.[3]

---

[1] Součástí úlohy je správná definice!

[2] Čísla $a_0, a_1, \ldots, a_n$ nazýváme koeficienty mnohočlenu f rozvinutého v bodě α.

[3] Úloha lze zobecnit na polynom libovolného stupně.

Řešení 7. série

1. ÚLOHA

Řekneme, že dva polynomy P, Q jsou si rovny, jestliže $P(x) = Q(x)$ pro každé $x \in \mathbb{R}$. Pokud $P(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$ a $Q(x) = b_n x^n + \cdots + b_1 x + b_0$, pak řekneme, že $P = Q$, jestliže $a_i = b_i$ pro každé $i \in \{0, \ldots, n\}$. Je zřejmé, že pokud se dva polynomy rovnají ve smyslu druhé definice, pak se rovnají ve smyslu první definice. Stačí dokázat obrácenou implikaci. Uvažme polynom $R = P - Q$, který je identicky roven 0, dokážeme, že i všechny jeho koeficienty jsou nulové. Důkaz provedeme indukcí přes stupeň polynomu: pokud má stupeň 0, je tvrzení triviální. Nechť tvrzení platí pro všechny polynomy stupně nejvýše n, dokážeme, že platí i pro polynom stupně $n + 1$. Dosadíme-li do polynomu $x = 0$, zjistíme, že absolutní člen je roven 0, můžeme tedy vytknout x a zbývá polynom stupně nejvýše n, který pro všechna $x \neq 0$ je roven 0 (což znamená, že je i pro $x = 0$ nulový, protože pro $x < \min(\frac{R(0)}{\sum_{j=0}^{n} |a_n|}, 1)$ je $|R(x) - R(0)| < R(0)$, tedy $R(x) \neq 0$ a máme spor), dle indukčního předpokladu jsou všechny jeho koeficienty nulové, z čehož plyne, že i všechny koeficienty původního polynomu jsou nulové.

2. ÚLOHA

Tvrzení dokážeme indukcí podle stupně n polynomu. Polynom stupně 0 jistě rozvinout lze. Mějme polynom $P(x) = b_n x^n + \cdots + b_1 x + b_0$ stupně n, odečteme-li od něj polynom $Q(x) = b_n (x - \alpha)^n$, dostaneme polynom $R(x)$ stupně nejvýše $n - 1$, který dle indukčního předpokladu umíme rozvinout, tedy $R(x) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k (x - \alpha)^k$. Pak ale $P(x) = R(x) + Q(x) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k (x - \alpha)^k + b_n (x - \alpha)^n$. Tím je tvrzení dokázáno.

3. ÚLOHA

Stačí si uvědomit, že součet koeficientů polynomu je hodnota polynomu v bodě 1, tedy $S_0 = P(1) = 0$, $S(1) = P(2) = 0$ a $S(a) = ((a + 1)^2 - 3(a + 1) + 2)^n$.

4. ÚLOHA

Pokud x je dělitelné třemi, pak $P(x)$ dává po dělení třemi zbytek 1, pokud $x = 3k + 1$ nebo $x = 3k - 1$, dává $P(x)$ zbytek -1, nikdy tedy nemůže být $P(x) = 0$, protože 0 je dělitelná třemi.

5. ÚLOHA

Mějme polynom $P(x) = ax^2 + bx + c$. Dosadíme-li do něj za x postupně $0, 1, -1$, dostaneme $5|c$, $5|(a + b + c)$ a $5|(a - b + c)$, z čehož už plyne, že všechny tři koeficienty jsou dělitelné pěti.