1. série

Konstrukce kružítkem

V následujícím textu používáme slovo *sestrojte* ve významu **setrojte užitím kružítka**. Máme ovšem na mysli pouze klasické užívání kružítka. Konstrukce typu „*tak dlouho jsem píchal svého souseda bodcem kružítka, až jsem ho donutil, aby mi pravítkem spojil body X a Y*“ jsou nepřípustné !

1. Úloha

Jsou dány body A a B. Sestrojte

(a) bod C tak, aby dělil úsečku AB na polovinu;
(b) body D a E tak, aby dělily úsečku AB na třetiny.

2. Úloha

Je dána kružnice $k = (S, r)$ a na ní body A a B. Sestrojte bod $C \in k$ tak, aby dělil menší z kruhových oblouků na polovinu.

3. Úloha

Jsou dány body A a B a kružnice $k = (S, r)$. Sestrojte průsečíky přímky AB a kružnice k.

4. Úloha

Jsou dány body A a B. Sestrojte bod C, který neleží na přímce AB tak, aby přímky AB a AC byly navzájem kolmé.

5. Úloha

Jsou dány body A a B. Sestrojte vrcholy čtverce $ABCD$.

Řešení 1. série

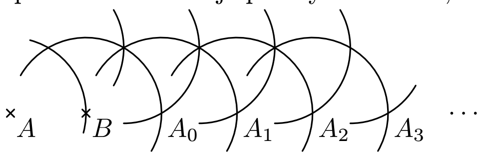
1. Úloha

Lemma 1. Nechť jsou dány body A, B. Označme $|AB| = 1$. Lze sestrojit posloupnost bodů $\{A_i\}_{i=0}^{n}$ takových, že A_i leží na přímce AB, jsou po dvou různé a vzdálenost sousedních dvou je rovna 1.

Lemma 2. Nechť jsou dány A, B; $|AB| = 1$. Lze sestrojit C tak, že

a) $|AC| = \sqrt{2}$
b) $|AC| = \frac{1}{\sqrt{2}}$
c) $|AC| = \frac{1}{2}$

Postup konstrukce v prvním lemmatu je patrný z obrázku, důkaz je snadný.



Důkaz: (druhé lemma) Podle věty *sss* sestrojme trojúhelník ABC $|AB| = 3, |AC| = |BC| = 2$. Dále sestrojme body E, F: $k_1 = (A, 1); k_2 = (B, 2); k_3 = (C, 1); E \in k_1 \cap k_2; F \in k_1 \cap k_3$. Analyticky, pomocí kosinové věty, ověříme, že $|CE| = \sqrt{2}$, $|FE| = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Vezmeme-li místo základní délky 1 základní délku $\frac{1}{\sqrt{2}}$ obdržíme c).

Vlastní řešení:

(a) Přímo aplikujeme lemma 2c).
(b) Podle lemmatu 1 sestrojíme úsečku délky 3 a úsečku délky 2 a pak pomocí lemmatu 2a) úsečku délky $2\sqrt{2}$. Podle věty *sss* sestrojíme body G, F tak že $|AG| = |AF| = 3$, $|BG| = |BF| = 2\sqrt{2}$ a $G \neq F$. Pythagorovou větou se snadno ověří, že trojúhelníky ABF a ABG jsou pravoúhlé s pravými úhly při vrcholu B. B tedy půlí FG. Dále sestrojíme body G_1, G_2 tak, aby úsečku AG dělily na třetiny – to jde, neboť tato má délku 3. Středy úseček F_1G_1 a F_2G_2, které umíme sestrojit podle (a) dělí úsečku v hledaném poměru.

2. Úloha

Lemma 3. Dáno $|AB| = a$, $|CD| = b$. Pak lze sestrojit úsečku délky $\sqrt{a^2 - b^2}$.

Důkaz: Nad průměrem AB sestrojíme Thaletovu kružnici (střed úsečky umíme sestrojit podle úlohy 1(a)). Sestrojme kružnici (B, b) a jeden z průsečíků s Thaletovou kružnicí označme C. Je $|\sphericalangle ACB| = \frac{\pi}{2}$ a podle Pythagorovy věty je $|AC| = \sqrt{a^2 - b^2}$

Vlastní řešení: Sestrojme kružnice $(A, 3r)$ a $(B, 3r)$ a jejich průsečík (vzdálenější od S) označme P. Trojúhelník ABP je rovnoramenný, proto osa AB prochází S a P a půlí oblouky AB. Průsečíky SP a k označme R a R' (R je střed menšího). Označme $d = |SP|$. Sestrojme M podle věty sss: $|SM| = d, |PM| = \sqrt{2}d$

Nyní sestrojíme úsečku délky $\sqrt{r^2 + d^2}$. Podle lemmatu 3 sestrojíme z úseček délky r a d úsečku délky $\sqrt{d^2 - r^2}$. Podle lemmatu 3 sestrojíme z úseček délky r a $\sqrt{d^2 - r^2}$ úsečku délky $\sqrt{d^2 - 2r^2}$. Podle lemmatu 3 sestrojíme z úseček délky r a $\sqrt{d^2 - 2r^2}$ úsečku délky $\sqrt{d^2 - 3r^2}$. A podle lemmatu 2a $\sqrt{2d^2 - 6r^2}$. Podobně sestrojíme $\sqrt{d^2 - 7r^2}$ a z těchto dvou úseček sestrojíme užitím lemmatu 3 úsečku délky $\sqrt{d^2 + r^2}$.

A kružnici $(M, \sqrt{d^2 + r^2})$, její průsečík s $k = (S, r)$ je hledaný R (resp. R'). Trojúhelník SMP je rovnoramenný a má pravý úhel při vrcholu S. $C = R$.

Poznámka 1: Je nutné, aby bylo $d > \sqrt{7}r$. To je však vždy, protože d je minimální, pokud AB tvoří průměr; pak je $d = r\sqrt{8} > r\sqrt{7}$.

Poznámka 2: Který z R a R' je ten správný rozhodneme následovně: sestrojíme kružnici $(A, |AR|)$. Pokud leží R' vně kružnice, je označení správné, pokud ne, zaměníme R a R'.

Poznámka 3: Pokud je $A = B$, je $C = A$.

3. ÚLOHA

Označme hledané body C, D. Nejprve sestrojíme střed úsečky CD — označíme ho O. Trojúhelníky AOS a BOS jsou pravoúhlé s pravým úhlem při O. Proto O leží na Thaletově kružnici nad průměry AS a BS. Jeden průsečík Thaletových kružnic je S, druhý označme O. Je-li $O = S$, pak přímka AB prochází středem S. Uvažujme nejprve případ opačný.

Sestrojíme S' osově souměrný s S podle přímky AB — to je ekvivalentní středové souměrnosti podle bodu O. Nyní sestrojíme kružnici $k' = (S', r)$, která je osově sdružená s kružnicí k podle přímky AB. Samodružné body této přímky jsou C a $D \Rightarrow$ jsou tedy hledanými průsečíky.

Chceme sestrojit průsečík přímky AS s kružnicí k. Sestrojíme body E_1, E_2 jako průsečíky kružnice $(A, |AS|)$ a (S, r). Body C a D půlí kruhové oblouky E_1E_2. Tyto body už snadno najdeme konstrukcí z úlohy 2.

4. ÚLOHA

Sestrojme $k_1 = (A, |AB|)$,$k_2 = (B, |AB|)$

(1) $D_1 \in k_1 \cap k_2$
(2) $k_3 = (D_1, |AB|)$
(3) $D_2 \in k_1 \cap k_3 D_2 \neq B$
(4) $k_4 = (D_2, |AB|)$
(5) $D_3 \in k_1 \cap k_4 D_3 \neq D_1$
(6) $k_5 = (A, |BD_2|)$
(7) $k_6 = (B, |BD_3|)$
(8) $C \in k_5 \cap k_6 \ldots$ Má dvě řešení

Pythagorovou větou ověříme, že $\triangle ABC$ je pravoúhlý s pravým úhlem při A; je tedy $AB \perp AC$.

Poznámka: Můžeme předpokládat, že $A \neq B$, jinak nemá úloha smysl.

5. ÚLOHA

Řešení získáme snadno z předchozího. Podle věty *sss* sestrojíme trojúhelník ABC takový, že $|BC| = |AB| = 1$ a $|AC| = \sqrt{2}$. Získáme dva body C_1 a C_2. Jim odpovídající body D_1 (a D_2) leží na kružnicích se středem C_1 (C_2) a A a poloměrem rovným jedné.