5. série

Dělitelnost

1. ÚLOHA

Nechť k je přirozené číslo, pak existuje přirozené číslo n tak, že $k\,2^n + 1$ je prvočíslo. Dokažte nebo vyvraťte.

2. ÚLOHA

Najděte všechna přirozená čísla p, která mají následující vlastnost: Nechť m je přirozené číslo a p dělí m. Nechť n je přirozené číslo, které vznikne z m „obrácením pořadí“ cifer v dekadickém zápisu čísla m. Potom p dělí také číslo n.

3. ÚLOHA

Dokažte, že existuje číslo, které neobsahuje ve svém dekadickém zápisu cifru 0 a které je dělitelné číslem 5^{1000}.

4. ÚLOHA

Nechť n je přirozené číslo, pak každé přirozené číslo menší než $n!$ lze zapsat jako součet nejvýše n různých sčítanců, z nichž každý je dělitelem čísla $n!$.

5. ÚLOHA

Existuje přirozené číslo m s následující vlastností: ciferný součet čísla m je 1000, ciferný součet čísla m^2 je 1000^2 ?

Řešení 5. série

1. ÚLOHA

Nejprve dokážeme několik pomocných tvrzení:

Lemma 1. Nechť množina $\mathcal{A} \subset \mathbb{Z}$ má následující vlastnosti[1]

(1) $a, b \in \mathcal{A} \Rightarrow a + b \in \mathcal{A}$,
(2) $a \in \mathcal{A}, \quad k \in \mathbb{Z} \Rightarrow ka \in \mathcal{A}$.

Pak existuje číslo $n \in \mathbb{N}$ tak, že množina $\mathcal{A}$ je tvořena právě všemi násobky čísla n, tedy

$$\mathcal{A} = \{kn; k \in \mathbb{Z}\}. \tag{R}$$

Důkaz: Položme $n = \min\{a \in \mathcal{A}; a > 0\}$ a dokažme rovnost (R):

(1) $\mathcal{A} \supset \{kn; k \in \mathbb{Z}\}$ — tato inkluze plyne z vlastnosti (2) množiny $\mathcal{A}$.
(2) $\mathcal{A} \subset \{kn; k \in \mathbb{Z}\}$ — tuto inkluzi dokážeme sporem. Nechť existuje prvek $p \in \mathcal{A} \setminus \{kn; k \in \mathbb{N}\}$. Můžeme předpokládat (opět díky vlastnost (2)), že $p > 0$. Vydělme (se zbytkem) číslo p číslem n:

$$p = qn + r \qquad q \in \mathbb{Z}, \ 0 < r < n,$$

neboli $r = p - qn$, tedy (dle vlastnosti (1) a (2)) $r \in \mathcal{A}$ a to je spor, neboť n je nejmenší kladný prvek množiny $\mathcal{A}$.

Lemma 2. Nechť $a, b \in \mathbb{Z}$. Potom množina

$$\mathcal{A} = \{ka + lb; k, l \in \mathbb{Z}\}$$

má vlastnosti (1) a (2) z lemmatu 1 a je tvořena všemi násobky největšího společného dělitele čísel a a b.

Důkaz: Číslo n z důkazu lemmatu 1 je dělitelem čísla a i b (rozmyslete si to důkladně). Na druhou stranu každý společný dělitel čísel a a b dělí všechna čísla tvaru $ka + lb$, to jsou ovšem také čísla tvaru kn, tedy každý společný dělitel čísel a a b dělí číslo n, tedy n je nějvětší společný dělitel čísel a a b.

Lemma 3. Nechť a a b jsou nesoudělná. Potom

$$\{ka + lb; k, l \in \mathbb{Z}\} = \mathbb{Z}.$$

Důkaz: Zřejmý.

[1] V algebře se takováto množina nazývá ideál.

Čínská věta o zbytcích Nechť $a_1, a_2, \ldots, a_k$ jsou nenulová po dvou nesoudělná celá čísla, pak pro libovolná celá čísla $x_1, x_2, \ldots, x_k$ existuje celé číslo x, které splňuje rovnosti

$$x \equiv x_i \qquad \text{mod } a_i\,, \qquad i = 1, 2, \ldots, k.$$

Důkaz: Tvrzení dokážeme indukcí podle k. Nechť $k = 1$, pak stačí zvolit $x = x_1$. Nechť tvrzení platí pro $m \le k$, dokážeme je i pro $k+1$.
Dle indukčního předpokladu nalezneme číslo z splňující rovnosti

$$z \equiv x_i \qquad \text{mod } a_i\,, \qquad i = 1, 2, \ldots, k.$$

Položme $a = a_1 a_2 \ldots a_k$. Čísla a a a_{k+1} jsou nesoudělná. Hledejme číslo x ve tvaru $z+la$, kde l je nějaké přirozené číslo. Zcela jistě

$$x \equiv x_i \qquad \text{mod } a_i\,, \qquad i = 1, 2, \ldots, k.$$

Ukážeme, že lze zvolit l tak, aby $x \equiv x_{k+1}$ mod a_{k+1}, tedy $z + la \equiv x_{k+1}$ mod a_{k+1} a tedy, že existuje přirozené číslo n tak, že $na_{k+1} + la = x_{k+1} - z$. Vzhledem k nesoudělnosti čísel a a a_{k+1} lze podle lemmatu 3 taková čísla l a n zvolit a důkaz věty je ukončen.

Nyní přistoupíme k samotné úloze. Tvrzení neplatí — dokážeme, že existuje k tak, že pro všechna n je $k\,2^n + 1$ číslo složené. Nejprve ověřte, že čísla $a_m = 2^{2^m} + 1$ pro $m = 0, 1, 2, 3, 4$ jsou po dvou nesoudělná, číslo $2^{32} + 1 = (2^{32} - 1) + 2 = (2^{16} + 1)(2^8 + 1)(2^4+1)(2^2+1)(2+1)(2-1)+2 = a_0a_1a_2a_3a_4 + 2 \equiv 2 \pmod{a}_m$ je nesoudělné s každým z lichých čísel a_m pro $m = 0, 1, 2, 3, 4$. Dále je toto číslo dělitelné číslem 641, ale není dělitelné číslem 641^2. Položme[2] $a_5 = 641$ a $a_6 = \frac{2^{32}+1}{641}$ Čísla $a_0, a_1, \ldots, a_6$ jsou po dvou nesoudělná. Položme $x_m = 1$ pro $m = 0, 1, \ldots, 5$, $x_6 = -1$ a použijme čínskou větu o zbytcích. Existuje tedy k tak, že $x \equiv 1$ mod a_m pro $m = 0, 1, \ldots, 5$ a $x \equiv -1$ mod a_6. Takové k lze přitom zvolit tak, aby $k > \max\{a_0, a_1, \ldots, a_6\}$. Dokážeme, že libovolné číslo tvaru $k \cdot 2^n + 1$, kde $n \in \mathbb{N}$, je složené.

Nechť $n = 2^m p$, kde $m \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$ a číslo p je liché. Potom dostáváme $k \cdot 2^n + 1 \equiv 2^n + 1$ mod a_m, $2^n + 1 = 2^{2^m p} + 1 = (a_m - 1)^p + 1 \equiv (-1)^p + 1$ mod a_m, $k \cdot 2^n + 1 \equiv 0$ mod a_m.

Nechť $n = 2^5 p$, kde p je liché. Potom $k \cdot 2^n + 1 \equiv 2^n + 1$ mod $a_5, 2^n + 1 = 2^{32p} + 1 \equiv (-1)^p + 1$ mod a_5, $k \cdot 2^n + 1 \equiv 0$ mod a_5.

Nechť nakonec $n = 2^6 p$, kde $p \in \mathbb{N}$. Potom $k \cdot 2^n + 1 \equiv -2^n + 1$ mod a_6, $2^n - 1 = 2^{64p} - 1 \equiv (-1)^{2p} - 1$ mod $a_6, k \cdot 2^n + 1 \equiv 0$ mod a_6.

Poněvadž číslo $k \cdot 2^n + 1 > k$ je větší než libovolné z prvočísel $a_0, a_1, \ldots, a_6$ a je dělitelné alespoň jedním z nich, musí být složené.

2. ÚLOHA

Nejprve si povšimneme, že p je nesoudělné s číslem 10. Jistě existuje číslo dělitelné p, které začíná cifrou 1. Pozpátku napsané číslo končí cifrou jedna, není tedy dělitelné

[2]Doufám, že vás nevyvede z míry různá definice čísel a_m pro různá m

dvojkou ani pětkou.
Nyní uvažujme číslo dělitelné číslem p, které začíná ciframi $500\ldots$. Nechť má tvar $A = 500a_1a_2a_3\ldots a_l$, $a_i \in \{0,1,2,\ldots,9\}$, $\quad i = 1,2,\ldots,l$. Pak jsou číslem p také dělitelná čísla

(1) $B = a_l\ldots a_3a_2a_1005$ (číslo A zapsané pozpátku)
(2) $C = a_l\ldots a_3a_2a_101000a_1a_2a_3\ldots a_l$ (součet čísel A a $10^{l+2}B$)
(3) $D = a_l\ldots a_3a_2a_100010a_1a_2a_3\ldots a_l$ (číslo C zapsané pozpátku)
(4) $99\cdot 10^{l+1}$ (rozdíl čísel C a D)

Číslo p tedy nutně dělí číslo 99. Tato podmínka je, jak snadno nahlédnete, již postačující. (Uvažte kritéria dělitelnosti trojkou, devítkou a jedenáctkou.)

3. Úloha
Číslo 5^{1000} končí cifrou 5. Nevyskytují-li se v dekadickém zápisu tohoto čísla nuly, jsme hotovi. V opačném případě uvažujme nulu „nejvíce vpravo“. Nechť je na k - tém místě (počítáno od prava). Přičtěme k tomuto číslu číslo $5^{1000}10^{k-1}$. Výsledkem je číslo, které na prvních k místech neobsahuje nulu,a přitom je dělitelné číslem 5^{1000}. Opakujme tuto proceduru, až dostaneme číslo, které je dělitelné číslem 5^{1000} a na prvních tisíci místech neobsahuje nulu. Nyní vezmeme číslo tvořené posledními tisíci ciframi tohoto čísla a jsme hotovi. (Zdůvodněte podrobněji.)

4. Úloha
Tvrzení dokážeme indukcí podle n. Pokud $n = 2,3$, je tvrzení zřejmé. Nechť tvrzení platí pro všechna $m \le n$, dokážeme je i pro $n+1$.
Nechť $a < (n+1)!$. Vydělme číslo a číslem $n+1$ se zbytkem:

$$a = d(n+1) + r, \qquad d < n!, \quad r < n+1\,.$$

Podle indukčního předpokladu $d = d_1 + d_2 + \cdots + d_l$, kde d_i jsou po dvou různí dělitelé čísla $n!$ a $l \le n$. Potom

$$a = d_1(n+1) + d_2(n+1) + \cdots + d_l(n+1) + r\,,$$

což je hledaný rozklad.

5. Úloha
Ano. Nechť n je nějaké k ciferné číslo, v jehož zápisu se vyskutují pouze cifry 1 (m-krát) a 0 ($k-m$-krát). Ciferný součet tohoto čísla je tedy m. Nechť ciferný součet čísla n^2 je m^2. (Najděte jednoduchý příklad takovéhoto čísla.) Položme $n_1 = 10^{k+1}n + 1$. Potom ciferný součet čísla n_1 je $m+1$ a ciferný součet čísla n_1^2 je $(m+1)^2$. (Rozmyslete si to podrobně!) Několikerým opakováním tohoto postupu dostáváme kýžené.