6. série

Planimetrie

1. Úloha

Pokud má mnohoúhelník několik os symetrie, protínají se všechny v jednom bodě. Dokažte.

2. Úloha

Úhlopříčka tětivového čtyřúhelníka jej dělí na dva trojúhelníky. Součet délek poloměrů kružnic vepsaných těmto trojúhelníkům nezávisí na výběru úhlopříčky. Dokažte.

3. Úloha

Jsou zadána tři kladná čísla x, y, z. Najděte nutné a postačující podmínky pro to, aby existoval trojúhelník ABC takový, že jeho výšky v_a, v_b, v_c mají po řadě velikosti x, y, z.

4. Úloha

Je dán trojúhelník ABC s obsahem 1 a reálné číslo $p \in (0, 1)$. Na stranách AB, BC a CA jsou po řadě sestrojeny body D, E a F tak, že

$$|AD| : |AB| = |BE| : |BC| = |CF| : |CA| = p\,.$$

Vypočítejte obsah trojúhelníka DEF a najděte takovou hodnotu p, aby byl tento obsah minimální.

5. Úloha

Nechť pro vnitřní úhly trojúhelníka ABC platí

$$|\sphericalangle ACB| > |\sphericalangle ABC| > |\sphericalangle BAC|\,.$$

Označme po řadě O, I, H střed kružnice opsané, střed kružnice vepsané a průsečík výšek trojúhelníka ABC. Potom bod I leží uvnitř trojúhelníka OBH. Dokažte.

Řešení 6. série

1. ÚLOHA
Řešme úlohu v kartézské soustavě souřadnic. Připomeňme několik základních poznatků: Nechť $A, B \in \mathbb{R}^2$, $A = [a_1, a_2]$, $B = [b_1, b_2]$ a $t \in \mathbb{R}$. Pak definujeme body $A + B$ a tA takto

$$A + B = [a_1 + b_1, a_2 + b_2] \qquad tA = [ta_1, ta_2] .$$

Bod $\frac{1}{2}(A + B)$ je středem úsečky AB.

Lemma . Nechť body $A_1, \dots, A_n$ leží na přímce p o rovnici $ax + by + c = 0$, nechť $p_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, n$ a nechť $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$. Potom bod o souřadnicích $\sum_{i=1}^{n} p_i A_i$ leží také na přímce p.

Důkaz: Tvrzení ověříme přímým výpočtem.

Nechť o je nějaká osa symetrie mnohoúhelníka o vrcholech $V_1, \dots, V_n$. Přeznačme vrcholy takto: Nechť $O_1, \dots, O_l$ jsou vrcholy mnohoúhelníka ležící na o a nechť dále $M_1, N_1, \dots, M_k, N_k$ jsou dvojice vrcholů symetrických dle osy o. (Tedy $n = l + 2k$.) Dokážeme, že osa o prochází bodem $T = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} V_i$. Podle našeho označení máme

$$T = \frac{1}{l + 2k} (O_1 + \dots + O_l + M_1 + N_1 + \dots + M_k + N_k) .$$

Označíme-li ještě $S_i = \frac{1}{2}(M_i + N_i)$, $i = 1, \dots, k$, pak

$$T = \frac{1}{l + 2k} (O_1 + \dots + O_l + 2(S_1 + \dots + S_k)) .$$

Užitím lemmatu (řádně si rozmyslete, co je co) dostáváme, že bod T leží na ose o, neboli každá osa symetrie prochází tímto bodem.

Poznámka: Fyzikálně cítící čtenář jistě přeformuluje náš důkaz takto: Nechť je těleso vyrobeno z homogenního materiálu, pak každá jeho osa symetrie je také těžnicí a prochází těžištěm, tedy všechny osy symetrie se protínají v těžišti.

2. ÚLOHA
Připomeňme nejprve Ptolemaiovu větu: V tětivovém čtyřúhelníku $ABCD$ platí

$$|AB| \cdot |CD| + |BC| \cdot |AD| = |AC| \cdot |BD| . \qquad \text{(PT)}$$

Toto tvrzení snadno dokážeme: Podle kosínové věty

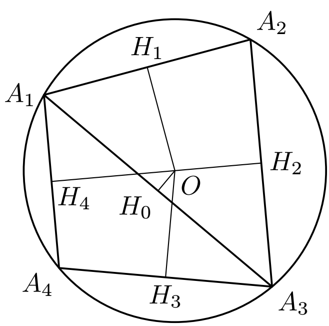
$$|AC| = |AB|^2 + |BC|^2 - 2|AB| \cdot |BC| \cos(|\sphericalangle ABC|) ,$$
$$|AC| = |AD|^2 + |DC|^2 + 2|AD| \cdot |DC| \cos(|\sphericalangle ABC|) ,$$

neboť $|\sphericalangle ABC| + |\sphericalangle CDA| = \pi$. Vynásobme první rovnici číslem $|AD| \cdot |DC|$, druhou číslem $|AB| \cdot |BC|$ a obě rovnice sečtěme. Z obdržené rovnice lehce vyjádříme velikost úhlopříčky AC:

$$|AC| = \sqrt{\frac{|AB| \cdot |BC| + |CD| \cdot |DA|}{|BC| \cdot |CD| + |AB| \cdot |DA|}(|AB| \cdot |CD| + |BC| \cdot |DA|)}\,.$$

Vynásobíme-li tento vztah obdobným vztahem pro velikost úhlopříčky BD, dostáváme rovnost (PT).

Nechť čtyřúhelník $A_1A_2A_3A_4$ je vepsán kružnici o středu O a poloměru R. Označme kolmé projekce bodu O na tětivy A_1A_3, A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4, a A_4A_1 postupně H_0, H_1, H_2, H_3 a H_4. (Body H_i příslušné úsečky půlí.) Označme $h_i = |OH_i|$, S_1, p_1 a r_1 resp. S_2, p_2 a r_2 plochu, polovinu obvodu a poloměr kružnice vepsané trojúhelníka $A_1A_2A_3$ resp. $A_3A_4A_1$.



Zabývejme se pouze případem, kdy bod O leží uvnitř čtyřúhelníka $A_1A_2A_3A_4$. Nechť je obsažen např. v trojúhelníku $A_1A_2A_3$ (viz obr.). Užitím Ptolemaiovy věty na tětivové čtyřúhelníky $A_3H_0OH_2$, $A_1H_1OH_0$ a $A_2H_2OH_1$ (Proč jsou tyto čtyřúhelníky tětivové?) a toho, že H_0H_2, H_0H_1 a H_1H_2 jsou střední příčky trojúhelníka $A_1A_2A_3$ dostáváme

$$\begin{aligned}(R + r_1)p_1 &= R|H_0H_2| + R|H_0H_1| + R|H_1H_2| + S_1 = \\ &= (h_0|H_2A_3| + h_2|H_0A_3|) + (h_0|H_1A_1| + h_1|H_0A_1|) + (h_2|H_1A_2| + h_1|H_2A_2|) + \\ &\quad + \frac{1}{2}(h_1|A_1A_2| + h_2|A_2A_3| + h_0|A_3A_1|) = (h_1 + h_2 + h_3)p_1\end{aligned}$$

a odtud

$$R + r_1 = h_1 + h_2 + h_3\,.$$

Nyní se zabývejme trojúhelníkem $A_1A_3A_4$, ve kterém bod O neleží. V tomto případě právě jeden vrchol tohoto trojúhelníka leží v opačné polorovině vyťaté přímkou, která obsahuje stranu protilehlou tomuto vrcholu, než ve které leží bod O. Nechť je to např. vrchol A_4. (Tak je tomu na našem obrázku.) Pak jsou čtyřúhelníky $A_1H_4H_0O$, $A_3H_3H_0O$ a $A_4H_4OH_3$ tětivové (proč?), a tedy

$$\begin{aligned}(R + r_2)p_2 &= R|H_0H_4| + R|H_0H_3| + R|H_3H_4| + S_2 = \\ &= (h_4|H_0A_1| - h_0|H_4A_1|) + (h_3|H_0A_3| - h_0|H_3A_3|) + (h_4|H_3A_4| + h_3|H_4A_4|) + \\ &\quad + \frac{1}{2}(h_3|A_3A_4| + h_4|A_4A_1| - h_0|A_3A_1|) = (h_3 + h_4 - h_0)p_2\end{aligned}$$

a odtud

$$R + r_2 = h_2 + h_4 - h_0\,.$$

Pokud situace vypadá jako na našem obrázku, pak

$$r_1 + r_2 = h_1 + h_2 + h_3 + h_4 - 2R\,.$$

Rozeberte ostatní možné polohy bodu O a ukažte, že výsledek je (až na možné znaménkové změny) obdobný.

3. ÚLOHA

Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že $0 < x < y < z$. Potom má hledaná podmínka tvar

$$\text{(P)} \qquad \frac{1}{x} > \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\,.$$

(1) (P) je postačující podmínka:
Je-li podmínka (P) splněna, můžeme sestrojit trojúhelník $A_1B_1C_1$ o stranách $a_1 = \frac{1}{x}$, $b_1 = \frac{1}{y}$ a $c_1\frac{1}{z}$. Označme jeho obsah S. Z rovností

$$S = \frac{1}{2}a_1 v_{a_1} = \frac{1}{2}b_1 v_{b_1} = \frac{1}{2}c_1 v_{c_1}$$

plyne, že

$$v_{a_1} = 2Sx, \qquad v_{b_1} = 2Sy, \qquad v_{c_1} = 2Sz\,.$$

Nyní stačí sestrojit trojúhelník ABC podobný s trojúhelníkem $A_1B_1C_1$ tak, aby poměr podobnosti byl $1 : 2S$, a jsme hotovi.

(2) (P) je podmínka nutná:
Existuje-li trojúhelník ABC s výškami předepsaných velikostí, potom jistě $a > b + c$. Označíme-li obsah tohoto trojúhelníka S, můžeme podle předchozích úvah upravit tuto nerovnost na

$$\frac{2S}{v_a} > \frac{2S}{v_b} + \frac{2S}{v_c}\,.$$

Dosazením čísel x, y a z za jednotlivé výšky a vydělením číslem $2S$ dostáváme podmínku (P).

4. ÚLOHA

Ze vzorce pro obsah trojúhelníka $P = \frac{1}{2}bc\sin\alpha$ plyne, že obsahy trojúhelníků ADF, BED a CFE jsou si rovny a hodnota každého z nich je $p(1-p)$. Obsah trojúhelníka

DEF je potom $S = 1 - 3p(1-p)$. Podle nerovnosti mezi aritmetickým a geometrickým průměrem je

$$p(1-p) \leq \left(\frac{p+1-p}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}\,,$$

tedy $S \geq 1 - 3\frac{1}{4} = \frac{1}{4}$, přičemž rovnost zde nastává právě tehdy, když $p = 1-p$. Hledaná hodnota je $p = \frac{1}{2}$.

5. Úloha

Z nerovností

$$|\sphericalangle ABO| < |\sphericalangle ABI| < |\sphericalangle ABH|$$

plyne, že bod I leží v úhlu OBH. Označme S střed úsečky OH, O_a, S_a, H_a, I_a kolmé průměty bodů O, S, H, I na stranu a (Obdobně $O_b, \ldots, O_c, \ldots$). Protože platí

$$|O_cI_c| > |I_cH_c| \qquad \text{a} \qquad |O_aI_a| > |I_aH_a|\,,$$

leží bod S_c resp. S_a mezi body O_c a I_c resp. mezi body O_a a I_a. Odtud plyne, že bod I leží uvnitř čtyřúhelníka BS_aSS_c a odtud již snadno dostáváme kýžené tvrzení.