

# 6. série

## Planimetrie

### 1. ÚLOHA

Pokud má mnohoúhelník několik os symetrie, protínají se všechny v jednom bodě. Dokažte.

### 2. ÚLOHA

Úhlopříčka tětivového čtyřúhelníka jej dělí na dva trojúhelníky. Součet délek poloměrů kružnic vepsaných těmito trojúhelníkům nezávisí na výběru úhlopříčky. Dokažte.

### 3. ÚLOHA

Jsou zadána tři kladná čísla  $x, y, z$ . Najděte nutné a postačující podmínky pro to, aby existoval trojúhelník  $ABC$  takový, že jeho výšky  $v_a, v_b, v_c$  mají po řadě velikosti  $x, y, z$ .

### 4. ÚLOHA

Je dán trojúhelník  $ABC$  s obsahem 1 a reálné číslo  $p \in (0, 1)$ . Na stranách  $AB, BC$  a  $CA$  jsou po řadě sestrojeny body  $D, E$  a  $F$  tak, že

$$|AD| : |AB| = |BE| : |BC| = |CF| : |CA| = p.$$

Vypočítejte obsah trojúhelníka  $DEF$  a najděte takovou hodnotu  $p$ , aby byl tento obsah minimální.

### 5. ÚLOHA

Nechť pro vnitřní úhly trojúhelníka  $ABC$  platí

$$|\sphericalangle ACB| > |\sphericalangle ABC| > |\sphericalangle BAC|.$$

Označme po řadě  $O, I, H$  střed kružnice opsané, střed kružnice vepsané a průsečík výšek trojúhelníka  $ABC$ . Potom bod  $I$  leží uvnitř trojúhelníka  $OBH$ . Dokažte.

# Řešení 6. série

## 1. ÚLOHA

Řešme úlohu v kartézské soustavě souřadnic. Připomeňme několik základních poznatků: Nechť  $A, B \in \mathbb{R}^2$ ,  $A = [a_1, a_2]$ ,  $B = [b_1, b_2]$  a  $t \in \mathbb{R}$ . Pak definujeme body  $A + B$  a  $tA$  takto

$$A + B = [a_1 + b_1, a_2 + b_2] \quad tA = [ta_1, ta_2].$$

Bod  $\frac{1}{2}(A + B)$  je středem úsečky  $AB$ .

**Lemma .** Nechť body  $A_1, \dots, A_n$  leží na přímce  $p$  o rovnici  $ax + by + c = 0$ , necht  $p_i \in \mathbb{R}$ ,  $i = 1, \dots, n$  a necht  $\sum_{i=1}^n p_i = 1$ . Potom bod o souřadnicích  $\sum_{i=1}^n p_i A_i$  leží také na přímce  $p$ .

*Důkaz:* Tvrzení ověříme přímým výpočtem.

Nechť  $o$  je nějaká osa symetrie mnohoúhelníka o vrcholech  $V_1, \dots, V_n$ . Přeznačme vrcholy takto: Nechť  $O_1, \dots, O_l$  jsou vrcholy mnohoúhelníka ležící na  $o$  a necht dále  $M_1, N_1, \dots, M_k, N_k$  jsou dvojice vrcholů symetrických dle osy  $o$ . (Tedy  $n = l + 2k$ .) Dokážeme, že osa  $o$  prochází bodem  $T = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n V_i$ . Podle našeho označení máme

$$T = \frac{1}{l + 2k} (O_1 + \dots + O_l + M_1 + N_1 + \dots + M_k + N_k).$$

Označíme-li ještě  $S_i = \frac{1}{2}(M_i + N_i)$ ,  $i = 1, \dots, k$ , pak

$$T = \frac{1}{l + 2k} (O_1 + \dots + O_l + 2(S_1 + \dots + S_k)).$$

Užitím lemmatu (řádně si rozmyslete, co je co) dostáváme, že bod  $T$  leží na ose  $o$ , neboli každá osa symetrie prochází tímto bodem.

**Poznámka:** Fyzikálně citící čtenář jistě přeformuluje náš důkaz takto: Necht je těleso vyrobeno z homogenního materiálu, pak každá jeho osa symetrie je také těžnicí a prochází těžištěm, tedy všechny osy symetrie se protínají v těžišti.

## 2. ÚLOHA

Připomeňme nejprve Ptolemaiovu větu: V tětíkovém čtyřúhelníku  $ABCD$  platí

$$(PT) \quad |AB| \cdot |CD| + |BC| \cdot |AD| = |AC| \cdot |BD|.$$

Toto tvrzení snadno dokážeme: Podle kosinové věty

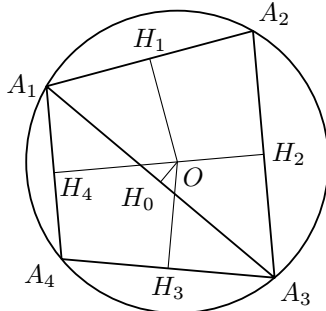
$$\begin{aligned} |AC|^2 &= |AB|^2 + |BC|^2 - 2|AB| \cdot |BC| \cos(\angle ABC), \\ |AC|^2 &= |AD|^2 + |DC|^2 + 2|AD| \cdot |DC| \cos(\angle ADC), \end{aligned}$$

neboť  $|\sphericalangle ABC| + |\sphericalangle CDA| = \pi$ . Vynásobme první rovnici číslem  $|AD| \cdot |DC|$ , druhou číslem  $|AB| \cdot |BC|$  a obě rovnice sečtěme. Z obdržené rovnice lehce vyjádříme velikost úhlopříčky  $AC$ :

$$|AC| = \sqrt{\frac{|AB| \cdot |BC| + |CD| \cdot |DA|}{|BC| \cdot |CD| + |AB| \cdot |DA|}} (|AB| \cdot |CD| + |BC| \cdot |DA|).$$

Vynásobíme-li tento vztah obdobným vztahem pro velikost úhlopříčky  $BD$ , dostáváme rovnost (PT).

Nechť čtyřúhelník  $A_1A_2A_3A_4$  je vepsán kružnici o středu  $O$  a poloměru  $R$ . Označme kolmé projekce bodu  $O$  na tětivy  $A_1A_3$ ,  $A_1A_2$ ,  $A_2A_3$ ,  $A_3A_4$ , a  $A_4A_1$  postupně  $H_0$ ,  $H_1$ ,  $H_2$ ,  $H_3$  a  $H_4$ . (Body  $H_i$  příslušné úsečky půlí.) Označme  $h_i = |OH_i|$ ,  $S_1$ ,  $p_1$  a  $r_1$  resp.  $S_2$ ,  $p_2$  a  $r_2$  plochu, polovinu obvodu a poloměr kružnice vepsané trojúhelníka  $A_1A_2A_3$  resp.  $A_3A_4A_1$ .



Zabýváme se pouze případem, kdy bod  $O$  leží uvnitř čtyřúhelníka  $A_1A_2A_3A_4$ . Nechť je obsažen např. v trojúhelníku  $A_1A_2A_3$  (viz obr.). Užitím Ptolemaiovy věty na tětivové čtyřúhelníky  $A_3H_0OH_2$ ,  $A_1H_1OH_0$  a  $A_2H_2OH_1$  (Proč jsou tyto čtyřúhelníky tětivové?) a toho, že  $H_0H_2$ ,  $H_0H_1$  a  $H_1H_2$  jsou střední příčky trojúhelníka  $A_1A_2A_3$  dostáváme

$$\begin{aligned} (R + r_1)p_1 &= R|H_0H_2| + R|H_0H_1| + R|H_1H_2| + S_1 = \\ &= (h_0|H_2A_3| + h_2|H_0A_3|) + (h_0|H_1A_1| + h_1|H_0A_1|) + (h_2|H_1A_2| + h_1|H_2A_2|) + \\ &\quad + \frac{1}{2}(h_1|A_1A_2| + h_2|A_2A_3| + h_0|A_3A_1|) = (h_1 + h_2 + h_3)p_1 \end{aligned}$$

a odtud

$$R + r_1 = h_1 + h_2 + h_3.$$

Nyní se zabýváme trojúhelníkem  $A_1A_3A_4$ , ve kterém bod  $O$  neleží. V tomto případě právě jeden vrchol tohoto trojúhelníka leží v opačné polorovině vyřazené přímkou, která obsahuje stranu protilehlou tomuto vrcholu, než ve které leží bod  $O$ . Nechť je to např. vrchol  $A_4$ . (Tak je tomu na našem obrázku.) Pak jsou čtyřúhelníky  $A_1H_4H_0O$ ,  $A_3H_3H_0O$  a  $A_4H_4OH_3$  tětivové (proč?), a tedy

$$\begin{aligned} (R + r_2)p_2 &= R|H_0H_4| + R|H_0H_3| + R|H_3H_4| + S_2 = \\ &= (h_4|H_0A_1| - h_0|H_4A_1|) + (h_3|H_0A_3| - h_0|H_3A_3|) + (h_4|H_3A_4| + h_3|H_4A_4|) + \\ &\quad + \frac{1}{2}(h_3|A_3A_4| + h_4|A_4A_1| - h_0|A_3A_1|) = (h_3 + h_4 - h_0)p_2 \end{aligned}$$

a odtud

$$R + r_2 = h_2 + h_4 - h_0.$$

Pokud situace vypadá jako na našem obrázku, pak

$$r_1 + r_2 = h_1 + h_2 + h_3 + h_4 - 2R.$$

Rozeberte ostatní možné polohy bodu  $O$  a ukažte, že výsledek je (až na možné znaménkové změny) obdobný.

### 3. ÚLOHA

Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že  $0 < x < y < z$ . Potom má hledaná podmínka tvar

$$(P) \quad \frac{1}{x} > \frac{1}{y} + \frac{1}{z}.$$

(1) (P) je postačující podmínka:

Je-li podmínka (P) splněna, můžeme sestrojít trojúhelník  $A_1B_1C_1$  o stranách  $a_1 = \frac{1}{x}$ ,  $b_1 = \frac{1}{y}$  a  $c_1 = \frac{1}{z}$ . Označme jeho obsah  $S$ . Z rovností

$$S = \frac{1}{2}a_1v_{a_1} = \frac{1}{2}b_1v_{b_1} = \frac{1}{2}c_1v_{c_1}$$

plyne, že

$$v_{a_1} = 2Sx, \quad v_{b_1} = 2Sy, \quad v_{c_1} = 2Sz.$$

Nyní stačí sestrojít trojúhelník  $ABC$  podobný s trojúhelníkem  $A_1B_1C_1$  tak, aby poměr podobnosti byl  $1 : 2S$ , a jsme hotovi.

(2) (P) je podmínka nutná:

Existuje-li trojúhelník  $ABC$  s výškami předepsaných velikostí, potom jistě  $a > b + c$ . Označíme-li obsah tohoto trojúhelníka  $S$ , můžeme podle předchozích úvah upravit tuto nerovnost na

$$\frac{2S}{v_a} > \frac{2S}{v_b} + \frac{2S}{v_c}.$$

Dosazením čísel  $x$ ,  $y$  a  $z$  za jednotlivé výšky a vydělením číslem  $2S$  dostáváme podmínku (P).

### 4. ÚLOHA

Ze vzorce pro obsah trojúhelníka  $P = \frac{1}{2}bc \sin \alpha$  plyne, že obsahy trojúhelníků  $ADF$ ,  $BED$  a  $CFE$  jsou si rovny a hodnota každého z nich je  $p(1 - p)$ . Obsah trojúhelníka

$DEF$  je potom  $S = 1 - 3p(1 - p)$ . Podle nerovnosti mezi aritmetickým a geometrickým průměrem je

$$p(1 - p) \leq \left( \frac{p + 1 - p}{2} \right)^2 = \frac{1}{4},$$

tedy  $S \geq 1 - 3 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$ , přičemž rovnost zde nastává právě tehdy, když  $p = 1 - p$ . Hledaná hodnota je  $p = \frac{1}{2}$ .

## 5. ÚLOHA

Z nerovností

$$|\sphericalangle ABO| < |\sphericalangle ABI| < |\sphericalangle ABH|$$

plyne, že bod  $I$  leží v úhlu  $OBH$ . Označme  $S$  střed úsečky  $OH$ ,  $O_a$ ,  $S_a$ ,  $H_a$ ,  $I_a$  kolmé průměty bodů  $O$ ,  $S$ ,  $H$ ,  $I$  na stranu  $a$  (Obdobně  $O_b, \dots, O_c, \dots$ ). Protože platí

$$|O_c I_c| > |I_c H_c| \quad \text{a} \quad |O_a I_a| > |I_a H_a|,$$

leží bod  $S_c$  resp.  $S_a$  mezi body  $O_c$  a  $I_c$  resp. mezi body  $O_a$  a  $I_a$ . Odtud plyne, že bod  $I$  leží uvnitř čtyřúhelníka  $BS_aSS_c$  a odtud již snadno dostáváme kýžené tvrzení.