3. série
Nerovnosti

1. ÚLOHA
Mějme reálná $x_1, \dots, x_n$ nezáporná taková, že $x_1 + \dots + x_n \leq \frac{1}{2}$. Dokažte, že pak

$$(1 - x_1) \cdot \ldots \cdot (1 - x_n) \geq \frac{1}{2}\,.$$

2. ÚLOHA
Dokažte, že pro každé iracionální α existuje nekonečně mnoho dvojic celých čísel p, q takových, že

$$\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{2q^2}.$$

3. ÚLOHA
Dokažte: pro libovolná reálná a, b platí

$$\frac{a+b}{2} \cdot \frac{a^2+b^2}{2} \cdot \frac{a^3+b^3}{2} \leq \frac{a^6+b^6}{2}.$$

4. ÚLOHA
Mějme n-prvkovou množinu N a systém $\mathcal{F}$ jejích tříprvkových podmnožin takový, že libovolné dvě z nich mají společný nejvýše jeden prvek. Označme pro dané n největší možný počet prvků takového systému jako f_n. Dokažte, že pak

$$\frac{1}{6}(n^2 - 3n) \leq f_n \leq \frac{1}{6}(n^2 - n).$$

5. ÚLOHA
Mějme n přirozené a reálná čísla $a_1, \dots, a_n$. Dokažte, že pak existuje index k, $0 \leq k \leq n$ tak, že

$$\left| \sum_{i=1}^{k} a_i - \sum_{i=k+1}^{n} a_i \right| \leq \max_{i=1\dots n} |a_i|\,.$$

Řešení 3. série

1. ÚLOHA

Je-li $x_1 + \cdots + x_n \leq \frac{1}{2}$, je jistě $1 - (x_1 + \cdots + x_n) \geq \frac{1}{2}$. Ukážeme-li tedy, že $(1 - x_1) \cdot \ldots \cdot (1 - x_n) \geq 1 - (x_1 + \cdots + x_n)$, budeme hotovi. K tomuto účelu položme $R_k = (1 - x_1) \cdot \ldots \cdot (1 - x_k) - 1 + x_1 + \cdots + x_k$. Indukcí podle k ukážeme $R_k \geq 0$. Zjevně $R_1 = 0$. Dále upravujme:

$$\begin{aligned} (1 - x_1) \cdot \ldots \cdot (1 - x_{k+1}) &= ((1 - x_1) \cdot \ldots \cdot (1 - x_k)) \cdot (1 - x_{k+1}) \\ 1 - x_1 - \cdots - x_{k+1} + R_{k+1} &= (1 - x_1 - \cdots - x_k + R_k) \cdot (1 - x_{k+1}), \end{aligned}$$

odkud po dalších úpravách (laskavý čtenář si provede sám)

$$R_{k+1} = R_k (1 - x_{k+1}) + x_{k+1} (x_1 + \cdots + x_k).$$

Z podmínky $x_1 + \cdots + x_n \leq \frac{1}{2}$ vyplývá $x_j \leq 1$, první sčítanec na pravé straně poslední rovnosti je tedy nezáporný, druhý je nezáporný zcela evidentně. Tím je důkaz proveden.

2. ÚLOHA

Je zřejmé, že se stačí omezit pouze na čísla z intervalu $(0, 1)$. Uvažujme následující systém zlomků: na začátku napíšeme vedle sebe $\frac{0}{1}$ a $\frac{1}{1}$ a v každém dalším kroku mezi každé dva sousední zlomky $\frac{a}{b}$ a $\frac{c}{d}$ napíšeme $\frac{a+c}{b+d}$:

$$\begin{array}{ccccccccccccccccc}
\frac{0}{1} & & & & & & & & & & & & & & & & \frac{1}{1} \\
\frac{0}{1} & & & & & & & & \frac{1}{2} & & & & & & & & \frac{1}{1} \\
\frac{0}{1} & & & & \frac{1}{3} & & & & \frac{1}{2} & & & & \frac{2}{3} & & & & \frac{1}{1} \\
\frac{0}{1} & & \frac{1}{4} & & \frac{1}{3} & & \frac{2}{5} & & \frac{1}{2} & & \frac{3}{5} & & \frac{2}{3} & & \frac{3}{4} & & \frac{1}{1} \\
\frac{0}{1} & \frac{1}{5} & \frac{1}{4} & \frac{2}{7} & \frac{1}{3} & \frac{3}{8} & \frac{2}{5} & \frac{3}{7} & \frac{1}{2} & \frac{4}{7} & \frac{3}{5} & \frac{5}{8} & \frac{2}{3} & \frac{5}{7} & \frac{3}{4} & \frac{4}{5} & \frac{1}{1}
\end{array}$$

Tento systém má mnoho zajímavých vlastností, nám se bude hodit, že zlomky „dost hustě“ vyplňují interval $(0, 1)$. Nejdříve pomocné tvrzení:[1] jsou-li $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$ dva sousední zlomky po libovolném kroku, je $bc - ad = 1$. Důkaz pochopitelně indukcí: na začátku to zřejmě platí, vložíme-li mezi $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$ zlomek $\frac{a+c}{b+d}$, máme $b(a + c) - a(b + d) = bc - ad = 1$ a rovněž $(b + d)c - (a + c)d = bc - ad = 1$.

V okamžiku, kdy dokážeme, že pro sousední zlomky $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$ platí také $\frac{a}{b} + \frac{1}{2b^2} \geq \frac{c}{d} - \frac{1}{2d^2}$, budeme mít napůl vyhráno. Po každém kroku totiž naše α padne mezi některé dva

[1] vyplývá z něj např. i to, že zlomky budou vždy srovnány podle velikosti: $bc - ad = 1 \implies \frac{a}{b} < \frac{c}{d}$.

sousední zlomky a toto tvrzení by nám zaručovalo, že aspoň pro jeden z nich je nerovnost splněna. Na začátku opět snadno ověříme, že pro $\frac{0}{1}$ a $\frac{1}{1}$ nerovnost platí, dále indukcí:

$$\begin{aligned}
2bd(ad-bc+1)+2b^2(ad-bc+1)+d^2=d^2\geq 0&\\
2ab^2d+2abd^2+b^2+2bd+d^2&\geq 2b^3c+2b^2cd-b^2\\
2ab^3+4ab^2d+2abd^2+b^2+2bd+d^2&\geq 2ab^3+2ab^2d+2b^3c+2b^2cd-b^2\\
(2ab+1)\,(b+d)^2&\geq b^2\,(2(a+c)(b+d)-1)\\
\frac{a}{b}+\frac{1}{2b^2}&\geq\frac{a+c}{b+d}-\frac{1}{2(b+d)^2}.
\end{aligned}$$

Podobnými úpravami dostaneme z $2bd(ad-bc+1)+2d^2(ad-bc+1)+b^2\geq 0$ druhou potřebnou nerovnost $\frac{a+c}{b+d}+\frac{1}{2(b+d)^2}\geq\frac{c}{d}-\frac{1}{2d^2}$.

Teď už zbývá maličkost: ukázat, že mezi takto získanými zlomky (máme po každém kroku jeden) je nekonečně mnoho různých. K tomu stačí ukázat následující: padne-li α v nějakém kroku mezi $\frac{a}{b}$ a $\frac{c}{d}$, objeví se časem v systému zlomky $\frac{p}{q}$ a $\frac{r}{s}$ tak, že $\frac{a}{b}<\frac{p}{q}<\alpha<\frac{r}{s}<\frac{c}{d}$. Nejbližší zlomek napravo od $\frac{a}{b}$ po n dalších krocích bude $\frac{na+c}{nb+d}$. Pro $n>\frac{b\alpha-a}{c-d\alpha}$ pak bude $\frac{na+c}{nb+d}<\alpha$. Existence $\frac{r}{s}$ se ukáže obdobně. V této části důkazu jsme mimochodem využili iracionality α. Pro α racionální je ovšem tvrzení triviální.

3. Úloha

Označíme-li $s=a+b$, $t=ab^2$, platí snadno $s^2\geq 0$, $s^2-4t=(a-b)^2\geq 0$. Pro $t\geq 0$ je $3s^2-t\geq s^2-4t\geq 0$, pro $t\leq 0$ je $3s^2-t\geq -t\geq 0$. Dohromady tedy dostáváme

$$\begin{aligned}
3s^4-13s^2t+4t^2=\left(3s^2-t\right)\left(s^2-4t\right)\geq 0&\\
s^4-3s^2t&\leq 4\left(s^4-4s^2t+t^2\right)\\
s\left(s^3-3st\right)&\leq 4\left(\left(s^2-2t\right)^2-3t^2\right)\\
(a+b)\left(a^3+b^3\right)&\leq 4\left(a^4+a^2b^2+b^4\right).
\end{aligned}$$

Z čehož po vynásobení výrazem $\frac{1}{8}(a^2+b^2)$ dostaneme dokazované tvrzení.

Jedna obecná poznámka: velice častou chybou při důkazech (ne)rovností je obracení postupu důkazu. Chci-li dokázat nějaké tvrzení, mohu buď vyjít z nějakého tvrzení, jehož pravdivost je všeobecně známa a postupným odvozováním dojít k dokazovanému, nebo vyjít z negace dokazovaného tvrzení a logicky správnými kroky dojít ke sporu. V žádném případě ale není korektní metoda, kdy vyjdu z dokazovaného tvrzení a dojdu k něčemu, o čemž vím, že je to pravda. Tím totiž nemám vůbec zaručeno, že původní tvrzení platí. Příklad: z $a=b$ jistě plyne, že i $a^2=b^2$. Tedy pokud by $-1=1$, bylo by i $1=1$, což

[2]Poměrně běžný trik na zjednodušení výrazů — viz. např. A. Kufner, *Symetrické funkce* (ŠMM 52)

je jistě pravda; nedokázali jsme tím ovšem, že $-1 = 1$, mimo jiné i proto, že to neplatí. Rozmýšlíme-li si důkaz nerovnosti, děláme to samozřejmě tak, že se ji snažíme upravit až na zřejmý tvar. Do důkazu ale musíme postup psát „obráceně“ nebo aspoň podotknout (a ověřit), že použité úpravy byly ekvivalentní.

4. ÚLOHA

Horní odhad je poměrně jednoduchý: všech (neuspořádaných) dvojic prvků množiny N je $\binom{n}{2} = \frac{1}{2}n(n-1)$. Každá množina systému $\mathcal{F}$ obsahuje tři dvojice (např. množina $\{a, b, c\}$ obsahuje dvojice (a, b), (a, c) a (b, c)), dvě různé množiny ale nemohou mít žádnou dvojici společnou, protože pak by obsahovaly dva společné prvky. Pro počet p množin systému splňujícího podmínky ze zadání tedy musí platit $3p \leq \binom{n}{2}$, t.j. $p \leq \frac{1}{6}(n^2 - n)$. Musí tedy nerovnost platit i pro ten největší.

K důkazu dolního odhadu stačí najít systém $\mathcal{F}$, pro jehož počet prvků p by platilo $p \geq \frac{1}{6}(n^2 - 3n)$. Stačí se omezit na množinu $\{1, 2, \ldots, n\}$. Uvažujme systém všech tříprvkových množin $\{x, y, z\}$ takových, že $n \mid x+y+z$. Je zřejmé, že máme-li libovolné prvky x, y z množiny $\{1, 2, \ldots, n\}$, existuje právě jeden prvek z, pro který n dělí $x + y + z$. Odtud také vidíme, že mají-li dvě množiny systému společné dva prvky, musí se shodovat i ten třetí. Zbývá ukázat, že systém obsahuje dost množin. Všech uspořádaných trojic $[x, y, z]$, pro které je $n \mid x + y + z$ je stejně jako všech uspořádaných dvojic $[x, y]$, tedy n^2. Je však třeba odečíst ty trojice, kde se dva prvky shodují t.j. $x = y$, $y = z$ nebo $z = x$. Celkem je jich $3n$. Trojice, kde jsou všechny tři prvky stejné, jsme ale odečetli třikrát. Pro $3 \mid n$ jsou tři ($[\frac{n}{3}, \frac{n}{3}, \frac{n}{3}]$, $[\frac{2}{3}n, \frac{2}{3}n, \frac{2}{3}n]$ a $[n, n, n]$), jinak jedna ($[n, n, n]$). Každé množině odpovídá šest ($= 3!$) trojic s různými prvky. Počet množin systému je tedy $\frac{1}{6}\left(n^2 - 3n + 6\right)$ pro n dělitelné třemi, jinak $\frac{1}{6}\left(n^2 - 3n + 2\right)$. V každém případě ale aspoň $\frac{1}{6}\left(n^2 - 3n\right)$.

5. ÚLOHA

Pro $0 \leq k \leq n$ označme $s_k = \sum_{i=1}^{k} a_i - \sum_{i=k+1}^{n} a_i$, $S = \sum_{i=1}^{n} a_i$. Pak je $s_0 = -S$, $s_n = S$. Bez omezení obecnosti $S \geq 0$ (jinak přejdeme k číslům $-a_i$). Pro $S = 0$ je vše jasné (stačí vzít $k = 0$). Pro $S > 0$ označme k největší index takový, že $s_k < 0$ (zřejmě $k < n$). Pak ale $s_{k+1} \geq 0$. Tedy

$$|s_k| + |s_{k+1}| = s_{k+1} - s_k = a_{k+1} - a_k \leq 2 \max_{i=1\ldots n} |a_i| \; .$$

Odtud už snadno nahlédneme, že aspoň jedno z čísel $|s_k|$, $|s_{k+1}|$ vyhovuje nerovnosti ze zadání.