4. série

Velká čísla

1. ÚLOHA
Řešte nerovnici

$$(x!)! \leq 10^{10^{10}}.$$

2. ÚLOHA
Které z čísel

$$A_n = \left.2^{3^{2^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}}\right\}n \text{ pater} \qquad B_n = \left.3^{2^{3^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}}\right\}n \text{ pater}$$

je větší (v závislosti na n)?

3. ÚLOHA
Je celá část čísla $(\sqrt{2}+1)^{1993}$ sudá nebo lichá?

4. ÚLOHA
Seřaďte podle velikosti čísla

$$\left(10^{10}\right)^{\left(10^{10}\right)} \qquad \left(10^{10}\right)! \qquad 10!^{10!}.$$

5. ÚLOHA
Číslo 9^{4000} začíná devítkou a má 3817 číslic (to nemusíte ověřovat). Zjistěte, kolik z čísel 9^k, kde $k = 1, 2, \ldots, 3999$ také začíná devítkou.

Řešení 4. série

1. ÚLOHA

Na úvod poznámka od Michala Stehlíka, který úlohu opravoval: pokud ukážete, že $(12!)! < 10^{10^{10}} < (13!)!$, není to ještě dostatečný důvod k tomu, abyste tvrdili, že řešením jsou právě čísla 0, 1, … ,12. K tomu je třeba, aby $x > y \implies (x!)! \geq (y!)!$, což je skutečně zřejmé, ale je nutné aspoň podotknout, že toto tvrzení používáme. Já jenom dodávám, že neostrou nerovnost píšu zcela záměrně ($x = 1$, $y = 0$).
Poznámka ode mne: skutečné znění Stirlingovy formule je

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n} = 1$$

nebo přesněji

$$n! = \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n \left(1 + O\left(\tfrac{1}{n}\right)\right) .$$

Odhlédneme-li od toho, že z tohoto tvrzení samotného ještě žádné odhady neplynou, jde o tvrzení příliš silné na to, abyste je coby známé používali v korespondenčním semináři. Ruku na srdce: umíte Stirlingovu formuli dokázat?

Lemma 1. *Pro každé n přirozené je $n! \leq \left(\frac{n+1}{2}\right)^n$.*
Důkaz: Z **AG** nerovnosti dostáváme snadno

$$\sqrt[n]{n!} = \sqrt[n]{1 \cdot \ldots \cdot n} \leq \frac{1 + \cdots + n}{n} = \frac{n+1}{2}$$
$$n! \leq \left(\frac{n+1}{2}\right)^n .$$

Lemma 2. *Pro každé n přirozené je $n! \geq \left(\frac{n}{3}\right)^n$.*
Důkaz: Nejprve pomocná nerovnost:

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 1 + \binom{n}{1}\frac{1}{n} + \cdots + \binom{n}{n}\frac{1}{n^n} \leq 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} \leq$$
$$\leq 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{2\cdot 3\cdot 3} + \cdots = 2 + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{11}{4} < 3 .$$

Pro $n = 1$ dokazovaná nerovnost platí. Nechť nyní $n! \geq \left(\frac{n}{3}\right)^n$. Pak

$$(n+1)! = n!\cdot(n+1) \geq \left(\frac{n}{3}\right)^n \cdot (n+1) = \left(\frac{n+1}{3}\right)^{n+1} \cdot 3\left(\frac{n}{n+1}\right)^n \geq \left(\frac{n+1}{3}\right)^{n+1} .$$

Nyní už můžeme ukázat, že nerovnici vyhovují právě čísla 0, 1, ... , 12. K tomu (viz. výše) stačí ověřit, že $(12!)! \leq 10^{10^{10}} < (13!)!$. Máme ovšem (to se spočítá) $12! < 5 \cdot 10^8$, $13! > 6 \cdot 10^9$. Tedy

$$(12!)! < (5 \cdot 10^8)! \leq \left(\frac{5 \cdot 10^8 + 1}{2}\right)^{5 \cdot 10^8} \leq \left(10^9\right)^{5 \cdot 10^8} = 10^{9 \cdot 5 \cdot 10^8} < 10^{100 \cdot 10^8} = 10^{10^{10}};$$

$$(13!)! > (6 \cdot 10^9)! \geq \left(2 \cdot 10^9\right)^{6 \cdot 10^9} > \left(10^9\right)^{6 \cdot 10^9} = 10^{9 \cdot 6 \cdot 10^9} > 10^{10 \cdot 10^9} = 10^{10^{10}}.$$

2. ÚLOHA

Snadno ověříme $A_1 = 2 < 3 = B_1$, $A_2 = 8 < 9 = B_2$, $A_3 = 512 < 6561 = B_3$, $A_4 = 2^{6561} > 2^{1024} = 4^{512} > 3^{512} = B_4$.

Lemma 3. *Pro $n \geq 2$ platí $2^{3^n} > 3^{2^n}$.*

Důkaz: Zlogaritmováním nerovnosti $3^{2^2} = 81 < 512 = 2^{3^2}$ dostaneme (logaritmus je rostoucí funkce)

$$2^2 \ln 3 < 3^2 \ln 2$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^2 < \frac{\ln 2}{\ln 3}$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^n < \frac{\ln 2}{\ln 3}$$

$$2^n \ln 3 < 3^n \ln 2$$

$$3^{2^n} < 2^{3^n}.$$

Máme tedy $A_4 > B_4$. Je-li $A_n > B_n$, je i $A_{n+2} = 2^{3^{A_n}} > 2^{3^{B_n}} > 3^{2^{B_n}} = B_{n+2}$ (první nerovnost vyplývá z toho, že 2^{3^n} je rostoucí posloupnost, druhá z lemmatu). Z principu matematické indukce tedy $A_n > B_n$ pro všechna $n \geq 4$ sudá. Je-li $A_n > B_n$, je $A_{n+1} = 2^{B_n} < 2^{A_n} < 3^{A_n} = B_{n+1}$. Je tedy $A_n < B_n$ pro všechna $n \geq 5$ lichá.

Shrnuto: jest $A_n > B_n$ pro $n \geq 4$ sudá, jinak $A_n < B_n$.

3. ÚLOHA

Použijeme podobnou myšlenku jako u 1. úlohy 2. série. Čísla $\alpha = \sqrt{2} + 1$ a $\beta = 1 - \sqrt{2}$ jsou kořeny kvadratické rovnice $x^2 - 2x - 1 = 0$. Platí tedy $\alpha^2 = 2\alpha + 1$, $\beta^2 = 2\beta + 1$. Vynásobíme-li rovnice α^n resp. β^n a sečteme, dostaneme (označíme-li $a_n = \alpha^n + \beta^n$)

$$a_{n+2} = 2a_{n+1} + a_n\,.$$

Je $a_0 = 2$, $a_1 = 2$. Indukcí snadno dokážeme, že všechny členy posloupnosti jsou sudá celá čísla. Tedy i a_{1993}. Máme však

$$(\sqrt{2} + 1)^{1993} = a_{1993} - \beta^{1993}\,,$$

kde $-1 < \beta < 0$, 1993 je liché číslo, tedy také $-1 < \beta^{1993} < 0$. Dostáváme tedy

$$a_{1993} \leq (\sqrt{2}+1)^{1993} < a_{1993} + 1\,,$$

celá část $(\sqrt{2}+1)^{1993}$ je tedy a_{1993}, což je sudé číslo.

4. ÚLOHA

Číslo $N!$ je součinem N čísel menších nebo rovných N. Až na jedno jsou dokonce ostře menší. Snadno tedy vidíme, že $N! < N^N$ pro $N > 1$. O tom, že $10^{10} > 1$ jistě nikdo z řešitelů (ani neřešitelů) nepochybuje. Je tedy první číslo větší než druhé. Že je druhé větší než třetí, to je nepatrně složitější. Použijeme odhadu z řešení první úlohy. Je totiž

$$\left(10^{10}\right)! \geq \left(\frac{10^{10}}{3}\right)^{10^{10}} > \left(10^{9}\right)^{10^{10}} > 10!^{10^{10}} > 10!^{10!}.$$

Čísla tedy už seřazena jsou a to sestupně.

5. ÚLOHA

Začíná-li číslo A devítkou, je $9\cdot 10^n \leq A < 10\cdot 10^n$, a tedy $10^n \leq \frac{1}{9}A < \frac{10}{9}\cdot 10^n$. Začíná-li tedy 9^k devítkou, mají 9^{k-1} a 9^k stejný počet číslic. Mají-li naopak čísla A a $9A$ $n+1$ číslic, je zřejmě $A \geq 10^n$, $9 \cdot 10^n \leq 9A < 10 \cdot 10^n$ a $9A$ tedy začíná devítkou. Shrnuto: 9^k a 9^{k+1} mají stejný počet číslic právě tehdy, když 9^{k+1} začíná devítkou. V opačném případě má 9^{k+1} o jednu číslici více. Postupujeme-li od $1 = 9^0$ k 9^{4000}, zvýší se nám exponent o 4000, ale počet číslic jen o $3817 - 1 = 3816$. Celkem 184-krát se tedy stalo, že dvě po sobě jdoucí mocniny měly stejný počet číslic, což je ekvivalentní s tím, že ta druhá začínala na devítku. V těch 184 je ovšem započítána i mocnina 9^{4000}, výsledek je tedy pouze 183.

Opět jedna (bohužel) důležitá poznámka: samozřejmě není problém napsat jednoduchý program, který úlohu vyřeší. Mohli jsme snadno přiměřeně zvýšit exponent tak, aby tato metoda neprošla. Spoléhali jsme však na to, že řešitelé pochopí, že jde o úlohu <u>matematickou</u>, která má otestovat vaši schopnost logicky uvažovat, ne rychlost a paměťovou kapacitu vašeho počítače. Ostatě, když už se problém řeší pomocí počítače, je samozřejmostí dodat úplný výpis programu a protokol o běhu.