1. série

Celá čísla, dělitelnost

1. ÚLOHA

Dokažte, že pro každé n celé je $2n^3 + 3n^2 + n$ dělitelné šesti.

2. ÚLOHA

Dokažte, že pokud $a^b - 1$ je prvočíslo ($b > 1$), pak nutně $a = 2$ a b je prvočíslo. Platí to naopak?

3. ÚLOHA

Rozhodněte, zda existuje přirozené číslo dělitelné 2^{1993}, jehož desítkový zápis neobsahuje nulu.

4. ÚLOHA

Posloupnost $2, 3, 5, 6, 7, 10, 11, \ldots$ obsahuje ta přirozená čísla, která nejsou ani druhou ani třetí mocninou. Najděte (**bez počítače**) její pětistý člen.

5. ÚLOHA

Dokažte, že číslo $100\ldots01$, v jehož zápisu je $2^{1993} + 2^{1000} - 1$ nul, je číslo složené.

Řešení 1. série

1. Úloha

Číslo je dělitelné šesti právě tehdy, když je dělitelné současně dvěma a třemi. K důkazu je nejjednodušší použít rozklad $2n^3 + 3n^2 + n = n(n+1)(2n+1)$. Pro n liché je sudé $n+1$, pro n sudé ono samo. Součin je pak sudý vždy. Je-li n dělitelné třemi, není co řešit, má-li zbytek 2, je dělitelný třemi člen $n+1$, má-li zbytek 1, je třemi dělitelný člen $2n+1$. Součin je tedy třemi dělitelný také vždy. Pak je ovšem dělitelný i šesti.

2. Úloha

Roznásobením snadno ověříme identitu

$$a^n - 1 = (a-1)(a^{n-1} + a^{n-2} + \cdots + 1).$$

Pokud by tedy bylo $b > 1$, $a > 2$, mělo by $a^b - 1$ vlastního dělitele $a - 1$. Kdyby pak bylo $a = 2$, $b = kl$, $1 < k, l < b$, bylo by

$$2^b - 1 = 2^{kl} - 1 = \left(2^k\right)^l - 1,$$

což je dělitelné číslem $2^k - 1$. Naopak tvrzení neplatí, 11 je prvočíslo, $2^{11} - 1 = 2047 = 23 \cdot 89$.

3. Úloha

Indukcí dokážeme, že pro každé přirozené n existuje n-ciferné číslo A_n neobsahující ve svém zápisu nulu, které je dělitelné právě 2^n (to jest není dělitelné 2^{n+1}). Za A_1 stačí položit například dvojku. Mějme nyní n-ciferné číslo A_n tak, že 2^n dělí A_n a 2^{n+1} nikoli. 10^n, $3 \cdot 10^n$ mají stejnou vlastnost. To znamená že součty $10^n + A_n$, $3 \cdot 10^n + A_n$ (česky: před A_n přidáme jedničku nebo trojku) jsou dělitelné 2^{n+1} (je to součet dvou čísel tvaru $2^n l$, l liché). Protože jejich rozdíl je $2 \cdot 10^n$, což je dělitelné právě 2^{n+1}, nemohou být obě dělitelná 2^{n+2}; jedno z nich tedy musí být dělitelné právě 2^{n+1}. Že tím do čísla nepřidáme žádnou nulu, to je vidět.

4. Úloha

Posloupnost si označme (a_n); číslo 500 není ani čtverec ani třetí mocnina, má tedy smysl otázka, pro jaké n je $a_n = 500$, což je totéž jako ptát se, která z čísel $1, 2, \ldots, 500$ nejsou druhými ani třetími mocninami. Je $22^2 = 484$, $23^2 = 529$, $7^3 = 343$, $8^3 = 512$, $2^6 = 64$, $3^6 = 9^3 = 729$. Mezi těmito čísly je tedy 22 druhých, 7 třetích a dvě šesté (t.j. druhé a třetí zároveň) mocniny. Těch, které nejsou druhými ani třetími mocninami je tedy $500 - 22 - 7 + 2 = 473$. To znamená, že $a_{473} = 500$, a protože až do 528 s výjimkou 512 žádné druhé ani třetí mocniny nejsou, je $a_{484} = 511$, $a_{485} = 513$, $a_{500} = 528$.

5. Úloha

Použijeme podobné identity jako v druhé úloze. Pro n liché (pouze pro n liché!) platí

$$a^n + 1 = (a+1)(a^{n-1} - a^{n-2} + \cdots - 1).$$

Dosadíme-li za a číslo $10^{2^{1000}}$ a za n číslo $2^{993}+1$, dostaneme,že zkoumané číslo

$$10^{2^{1993}+2^{1000}}+1=10^{2^{1000}\left(2^{993}+1\right)}+1=\left(10^{2^{1000}}\right)^{2^{993}+1}+1$$

je dělitelné číslem $10^{2^{1000}}+1$.

Poznámka: podobně jako v druhé úloze lze dojít k výsledku, že pokud je a^b+1 prvočíslo $(b>1)$, je a sudé, $b=2^k$.