3. série

Stereometrie

1. ÚLOHA

V prostoru máme krychli o hraně 1. Kam umístit a jakým směrem vystřelit míček tak, aby se postupně odrazil od všech šesti stěn, vrátil se do stejného bodu a vzdálenost mezi jednotlivými odrazy přitom byla vždy stejná?

2. ÚLOHA

V prostoru máme dán mnohostěn. Ke každé jeho stěně uvažujeme na ni kolmý vektor, mířící z tělesa ven, jehož velikost je rovna obsahu příslušné stěny. Dokažte, že součet těchto vektorů je nulový.

3. ÚLOHA

V prostoru je dána množina M, obsahující aspoň dva body. Víme, že její průnik s libovolnou rovinou je kružnice, jeden bod nebo prázdný. Dokažte, že za těchto podmínek je M sféra (povrch koule).

4. ÚLOHA

V prostoru je dána koule o poloměru 30 a v ní 1993 koulí o poloměru 1. Dokažte, že pro libovolnou přímku p existuje přímka q a rovina ρ; $p \parallel q$, $p \perp \rho$, že q protíná aspoň tři a ρ aspoň 60 z malých koulí.

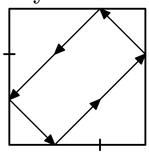
5. ÚLOHA

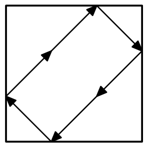
V prostoru je dán bod. Jaké je nejmenší n takové, že do prostoru lze rozmístit n disjunktních koulí tak, aby zcela zakrývaly výhled z tohoto bodu (to jest aby libovolná polopřímka z něj vedená protínala aspoň jednu z koulí)?

Řešení 3. série

1. ÚLOHA

Na obrázku jsou sdružené průměty dráhy míčku. Je třeba si uvědomit, že průmět okolí odrazu do roviny rovnoběžné s rovinou, od níž se odráží, je přímka a že průmět do roviny kolmé se chová podle zásady „úhel odrazu se rovná úhlu dopadu“. Umístíme-li míček do libovolného bodu dráhy a vystřelíme-li ho podél čáry v libovolném směru, bude se navždy pohybovat po vyznačené dráze.





2. ÚLOHA

Nejprve pomocná úvaha: máme-li libovolný vnitřní bod, lze přirozeným způsobem rozdělit mnohostěn na jehlany s hlavním vrcholem v tomto bodě. Jehlan ale není problém rozdělit na čtyřstěny (stačí rozdělit podstavu na trojúhelníky). Každý konvexní mnohostěn lze tedy rozřezat na konečný počet čtyřstěnů[1]

Sestrojíme-li si analogický systém vektorů pro každý z těchto čtyřstěnů, vyruší se nám v celkovém součtu vektory odpovídající společným plochám sousedních čtyřstěnů a součet všech jejich systémů je tedy stejný jako součet součet systému mnohostěnu (v součtu zbydou vektory těch trojúhelníků, které jsou na povrchu mnohostěnu a posčítáním vektorů trojúhelníků jedné stěny dostaneme vektor odpovídající této stěně). Stačí tedy tvrzení dokázat pro čtyřstěn.

Mějme čtyřstěn $ABCD$. Snadno nahlédneme, že vektor příslušející stěně ABC je $\frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AB})$ (předpokládáme, že při pohledu zvenčí je trojice bodů A, B, C orientována po směru hodinových ručiček)[2]. Analogicky v dalších stěnách. Celkový součet je tedy roven polovině výrazu

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{BD} \times \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} \times \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{AD} \times \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AB} = \\
&= (\overrightarrow{BD} \times \overrightarrow{BA} - \overrightarrow{BD} \times \overrightarrow{BC}) + (\overrightarrow{AD} \times \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}) = \\
&= \overrightarrow{BD} \times (\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{BC}) + (\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}) \times \overrightarrow{AC} = \\
&= \overrightarrow{BD} \times \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{BD} \times \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD} \times (\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AC}) = \overrightarrow{BD} \times 0 = 0,
\end{aligned}$$

je tedy nulový, což jsme chtěli dokázat.

Poznámka: Tato úloha má jednoduchou fyzikální interpretaci: představme si mnohostěn naplněný plynem o nějakém tlaku. Plyn působí na každou stěnu tlakovou silou

[1] platí i pro nekonvexní mnohostěny, důkaz však není tak triviální

[2] připomeňte si definici vektorového součinu!

přímo úměrnou její ploše (směr síly je kolmo na stěnu směrem ven. Protože je součet vektorů nulový, těleso se nezačne samo od sebe pohybovat.

3. ÚLOHA

Označme body $A, B \in M$ a veďme jimi dvě kolmé roviny ρ_1, ρ_2. Průnik M s kteroukoli z nich obsahuje alespoň dva body, je to tedy kružnice. Jejich středy označme S_1, S_2; tyto dva body leží na ose úsečky AB (to je rovina obsahující ty body, jejichž vzdálenost od A a B je stejná), kolmice jimi vedené na ρ_1, ρ_2 se tedy musí protínat, jejich průsečík označme S, sféru se středem S, na níž leží A, B označme κ. Rozmyslete si, že původní dvě kružnice leží také na κ.

Nyní už ukážeme, že $\kappa = M$. K tomu veďme libovolným vnitřním bodem úsečky AB rovinu ρ kolmou na AB. Průniky $\rho \cap M$ i $\rho \cap \kappa$ musí být kružnice, které mají aspoň čtyři společné body (průsečíky ρ s původními kružnicemi)[3], musejí tedy být totožné. Vezmeme dvě různé takto vzniklé kružnice k_1, k_2. Je-li nyní X bod prostoru, vedeme rovinu σ rovnoběžně s úsečkou AB. $\sigma \cap \kappa$ a $\sigma \cap M$ opět musí být kružnice, mající aspoň čtyři společné body (průsečíky s k_1 a k_2), jsou tedy opět totožné. Je tedy $\sigma \cap \kappa = \sigma \cap M$, z čehož ovšem vyplývá $X \in \kappa \iff X \in M$, což znamená, že $\kappa = M$. κ je sféra, M tedy také.

4. ÚLOHA

Uvažujme nejprve průměty koulí na přímku p. Průmětem koule je úsečka o délce rovné jejímu průměru. Průmětem velké koule je tedy úsečka o délce 60, průměty malých úsečky o délce 2 (které ovšem musí ležet na velké úsečce). Kdyby byl každý bod průmětu velké koule obsažen nejvýše v 59 úsečkách, musel by být součet jejich délek nejvýše $59 \cdot 60 = 3540$, on je však $1993 \cdot 2 = 3986$. Musí tedy existovat bod ležící aspoň v 60 průmětech. Za ρ pak stačí vzít rovinu kolmou na p, procházející tímto bodem.

Nyní uvažujme analogicky průměty do roviny kolmé na p (např. ρ). Průmět velké koule je kruh o poloměru 30 (a obsahu $\pi \cdot 30^2 = 900\pi$), průměty malých jsou v něm ležící kruhy o poloměru 1 (a obsahu π). Kdyby každý bod velkého kruhu ležel nejvýše ve dvou malých, byl by součet obsahů všech malých nejvýše $2 \cdot 900\pi = 1800\pi$, ve skutečnosti je však roven 1993π. Za q už stačí vzít kolmici na ρ, vedenou tímto bodem (ta je rovnoběžná s p).

5. ÚLOHA

Označme S náš bod a κ jednotkovou sféru se středem S. Průmět koule neobsahující S se středem A na sféru κ je tvořen těmi body X z κ, pro které je $|\sphericalangle XSA| \leq \alpha$, kde α je nějaký úhel, závisející na A a poloměru koule ($\alpha = \arcsin \frac{r}{|SA|}$), vždy však $\alpha < \frac{\pi}{2}$.

Nejprve ukážeme, že tři koule nestačí. Mějme tři koule o středech A, B, C. Body A, B, C leží v jedné rovině, označme ji ρ (pokud leží na přímce, vezměme libovolnou takovou rovinu). Pokud na ρ vedeme bodem S kolmici a označíme P ten z jejích průsečíků

[3] mimochodem, tím, že obsahují čtyři různé body, je také zaručeno, že průniky jsou kružnice

s κ, který leží ve stejném poloprostoru určeném ρ jako S (je-li $S \in \rho$, vezmeme kterýkoli), je velikost úhlů $\sphericalangle PSA$, $\sphericalangle PSB$, $\sphericalangle PSC$ alespoň $\frac{\pi}{2}$, z čehož vyplývá (viz. úvod), že polopřímka SP nemá z žádnou z koulí společný bod.

Je potřeba si ještě rozmyslet, že čtyři koule stačí. Návod: umístíme bod S do středu ctyřstěnu a ctyřmi koulemi (se značně rozdílnými poloměry) zakryjeme všechny stěny tohoto čtyřstěnu.