6. série

Extremální úlohy

1. Úloha

Který trojúhelník, vepsaný do kružnice o poloměru 1, má největší obsah?

2. Úloha

V rovině je dán pravidelný 1993-úhelník. Najděte bod, pro nějž je součet vzdáleností od vrcholů minimální.

3. Úloha

V rovině je dán rovnostranný trojúhelník ABC. Kde nabývá výraz

$$|AX| + |BX| - |CX|$$

svého minima?

4. Úloha

Najděte minimum výrazu

$$5x^2 - 2xy + 2y^2 - 6x - 6y + 37$$

pro x, y reálná čísla.

5. Úloha

K dispozici máte dva klobouky, deset bílých a deset černých kuliček. Losování vypadá takto: náhodně vyberete klobouk a z něho pak náhodně jednu kuličku. Jakým způsobem rozdělíte kuličky do klobouků (do každého klobouku musíte dát aspoň jednu kuličku), aby pravděpodobnost vytažení černé kuličky byla největší?

Řešení 6. série

1. ÚLOHA

Jedná se (jaký div) o rovnostranný trojúhelník. Nejprve si ukažme, že pokud v trojúhelníku ABC platí $AC \neq BC$, existuje rovnoramenný trojúhelník ABC' s větším obsahem: za C' stačí vzít ten z průsečíků osy úsečky AB s kružnicí, pro nějž je vzdálenost od úsečky největší; ze všech ABX má totiž největší výšku na stranu AB, a tedy i obsah (nerovnoramenné ho mají menší).

Pokud bychom věděli, že maxima obsahu se pro nějaký trojúhelník skutečně nabývá, byli bychom hotovi — jediný trojúhelník, který tímto postupem zvětšit nejde, je rovnostranný. Z poměrně hlubokých vět opravdu vyplývá, že maximum se nabývá, elementární důkaz však budeme muset vést jinak. Zatím víme, že stačí hledat mezi rovnoramennými trojúhelníky. Nechť $AC = BC$, polovinu úhlu $\sphericalangle ACB$ označme γ. Rozmyslete si, že pak $AC = BC = 2\cos\gamma$. Obsah ABC je pak $\frac{1}{2}\,|AC| \cdot |BC| \cdot \sin(2\gamma) = 4\sin\gamma\cos^3\gamma$ (využíváme vztahu $\sin(2\gamma) = 2\sin\gamma\cos\gamma$). Ten nabývá maxima, právě když nabývá maxima výraz

$$\sqrt{3\sin\gamma\cos^3\gamma} = \sqrt[4]{3\sin^2\gamma\cdot\cos^2\gamma\cdot\cos^2\gamma\cdot\cos^2\gamma},$$

což je podle **AG** nerovnosti menší nebo rovno číslu

$$\frac{1}{4}\left(3\sin^2\gamma + \cos^2\gamma + \cos^2\gamma + \cos^2\gamma\right) = \frac{3}{4}.$$

Rovnost nastává právě tehdy, když $3\sin^2\gamma = \cos^2\gamma$, to znamená pro $\operatorname{tg}\gamma = \frac{1}{\sqrt{3}}$, to jest pro $\gamma = \frac{\pi}{3}$, a to je právě onen rovnostranný trojúhelník.

2. ÚLOHA

V řešení ztotožníme body a jejich polohové vektory. S označme střed. Označíme-li $f(X)$ vzdálenost X od pevně zvoleného bodu P, máme z trojúhelníkové nerovnosti

$$f\left(\frac{X_1+\cdots+X_n}{n}\right) = \left\|\frac{X_1}{n}+\cdots+\frac{X_n}{n}-P\right\| = \left\|\left(\frac{X_1}{n}-\frac{P}{n}\right)+\cdots+\left(\frac{X_n}{n}-\frac{P}{n}\right)\right\| \le$$
$$\left\|\frac{X_1}{n}-\frac{P}{n}\right\|+\cdots+\left\|\frac{X_n}{n}-\frac{P}{n}\right\| = \frac{1}{n}\left(f(X_1)+\cdots+f(X_n)\right)$$

s rovností právě tehdy, když mají všechny vektory $X_j - P$ stejný směr a orientaci.

Sečteme-li několik funkcí s touto vlastností, dostaneme opět funkci, mající tuto vlastnost. Tedy i součet vzdáleností $g(X)$ od vrcholů 1993-úhelníka má tuto vlastnost. Navíc rovnost nastane pouze pokud nastane ve všech sčítancích, což lze pouze v případě, že jsou body X_j všechny stejné. Mějme nyní bod X v rovině. Označíme-li nyní X_j bod, který z něj dostaneme otočením o úhel $\frac{2\pi j}{1993}$ (pro $j = 1, \dots, 1993$), snadno nahlédneme, že $g(X_j) = g(X)$. Je tedy

$$g(S) = g\left(\frac{X_1 + \cdots + X_{1993}}{1993}\right) \leq \frac{1}{1993}\left(g(X_1) + \cdots + g(X_{1993})\right) = g(X).$$

Rovnost nastává pouze pokud $X_1 = \cdots = X_{1993}$, což znamená $X = S$. Minima se tedy nabývá pro střed 1993-úhelníka (a nikde jinde).

3. ÚLOHA

Ptolemaiův vzorec nám říká, že pro libovolné čtyři body P, Q, R, S v rovině platí nerovnost $|PQ| \cdot |RS| + |QR| \cdot |PS| \geq |PR| \cdot |QS|$ s rovností právě tehdy, když body P, Q, R, S leží na kružnici (v tomto pořadí). Dosadíme-li za P, Q, R, S body C, A, X, B, dostáváme (a je délka strany)

$$a\,|BX| + a\,|AX| \geq a\,|CX|$$
$$|AX| + |BX| - |CX| \geq 0$$

s rovností právě když X leží na oblouku kružnice opsané ABC mezi body A, B.

4. ÚLOHA

Jest

$$5x^2 - 2xy + 2y^2 - 6x - 6y + 37 = (x + y - 3)^2 + (2x - y)^2 + 28,$$

z čehož snadno nahlédneme, že minimum je 28 a nabývá se ho pro $x + y = 3$, $2x - y = 0$, tedy pro $x = 1$, $y = 2$.

5. ÚLOHA

Je-li v klobouku A kuliček a místo jedné bílé do něj dáme černou, zvětší se pravděpodobnost, že z něj vytáhneme černou, o $\frac{1}{A}$ (a naopak, dáme-li místo černé bílou, zmenší se o tutéž hodnotu). Počet kuliček v prvním klobouku označme n_1, ve druhém n_2.

Nejprve pevně zvolme n_1, n_2 ($n_1 + n_2 = 20$) a uvažujme jen takováto rozdělení. Vyměníme-li černou kuličku z prvního a bílou z druhého, zmenší se pravděpodobnost vytažení z prvního o $\frac{1}{n_1}$ a pravděpodobnost vytažení z druhého se zvýší o $\frac{1}{n_2}$. Celková pravděpodobnost se tedy zvýší o $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n_2} - \frac{1}{n_1}\right)$. Při pevných n_1, n_2 je tedy nejlepší takové rozdělení, kdy v klobouku s méně kuličkami jsou všechny černé (je-li $n_1 = n_2$ jsou všechna rozdělení stejná)

Máme-li nyní v klobouku, kde je kuliček méně, všechny černé, můžeme pravděpodobnost zvýšit tím, že z něj jednu přemístíme do druhého (pravděpodobnost vytažení z původního zůstane 1 a v druhém se zvýší, celková pravděpodobnost je jejich aritmetickým průměrem). To můžeme dělat tak dlouho, dokud v něm nezůstane jen jedna kulička. Nejlepší rozdělení je tedy takové, kdy je v jednom klobouku jedna černá kulička a v druhém všechny ostatní.