Jak rozeznáváme nekonečné množiny.

Nejprve něco o zobrazeních:

Náš výklad bude založen na intuitivní představě zobrazení $f : A \to B$ jako něčeho, co každému prvku $a \in A$ přiřazuje nějaký prvek $f(a) \in B$.

Mějme zobrazení $f : A \to B$. Řekneme, že f je prosté pokud z $f(a) = f(b)$ plyne $a = b$. Jinak řečeno, každý prvek z B je přiřazen nejvýše jednomu prvku z A.

Prosté zobrazení $f : A \to B$ nazveme bijekcí pokud pro každé $b \in B$ existuje $a \in A$ tak, že $f(a) = b$. Lidsky řečeno, každý prvek z B je přiřazen právě jednomu prvku z A.

A nyní něco o velikostech množin:

Existuje-li prosté zobrazení $f : A \to B$, píšeme $A \preccurlyeq B$ a říkáme, že B má mohutnost větší rovnu než A. Existuje-li bijekce $f : A \to B$, píšeme $A \asymp B$ a říkáme, že A, B mají stejnou mohutnost. Za domácí cvičení si dokažte, že z $A \preccurlyeq B$, $B \preccurlyeq C$ plyne také $A \preccurlyeq C$.

Velmi důležitá je věta Cantor–Bernsteinova: Pokud platí zároveň $A \preccurlyeq B$, $B \preccurlyeq A$, pak také $A \asymp B$.

Pro konečné množiny je tato věta triviální. Nekonečné množiny ale vykazují některé zvláštní vlastnosti. Pokud jsou A, B množiny $A \subset B$ (vlastní podmnožina) pak jistě $A \preccurlyeq B$, není však vyloučeno, že pro nekonečné A, B bude také platit $A \asymp B$.

Zde je malý příklad. Mějme $\mathbb{N}$ množinu přirozených čísel a $\mathbb{M}$ množinu sudých přirozených čísel. Prostým zobrazením $\mathbb{N} \to \mathbb{M}$ je například $f(n) = 4n$, prostým zobrazením $\mathbb{M} \to \mathbb{N}$ může být $g(m) = m$. Platí tedy $\mathbb{N} \asymp \mathbb{M}$. Bijekcí $\mathbb{N} \to \mathbb{M}$ je $h(n) = 2n$. Závěr: přirozených čísel je stejně jako čísel sudých (tj. tyto množiny mají stejnou mohutnost).

Spočetné a nespočetné množiny.

Pro další úvahy nechť výrok „A nemá více prvků než B“ znamená $A \preccurlyeq B$. A výrok „A má více prvků než B“ znamená $B \preccurlyeq A$ avšak již nikoliv $B \asymp A$.

Každou množinu, která nemá více prvků než přirozená čísla nazveme spočetnou. Příkladem spočetné množiny je množina racionálních čísel.

Každou množinu, která má více prvků než přirozená čísla nazveme nespočetnou. Příkladem nespočetné množiny je množina reálných čísel.

Jak vidíme, existují „různě velká nekonečna“. Důkaz nespočetnosti $\mathbb{R}$ si najdete v literatuře nebo jej uslyšíte na soustředění, tento úvod musí být ze své povahy jen velmi stručný. Vám bude stačit přijmout tuto věc jako fakt. Co se týče spočetnosti $\mathbb{Q}$, tak snadno nahlédnete

$$\mathbb{N} \preccurlyeq \mathbb{Q} \preccurlyeq \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \asymp \mathbb{N} \times \mathbb{N},$$

kde $A \times B$ je symbol pro kartézský součin množin A, B (tj. množinu všech uspořádaných dvojic $[a, b]$, kde $a \in A$, $b \in B$). Opět prosím přijměte jako fakt,[1] že

$$\mathbb{N} \asymp \mathbb{N} \times \mathbb{N} \asymp \mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N} \asymp \cdots$$

Z toho ale podle věty Cantor–Bernsteinovy plyne $\mathbb{Q} \asymp \mathbb{N}$.

Právě získané poznatky lze jednoduše aplikovat. Mějme A — spočetnou podmnožinu reálných čísel. $\mathbb{R}$ je nespočetná (a tedy větší než A), proto jistě existuje nespočetně mnoho bodů z $\mathbb{R}$ nenáležející A. Podobně uvažujte v příkladech 3, 4, 5.

[1] A ve svých řešeních jej využijte.

6. série

Téma: Velikosti množin

Datum odeslání: 16. BŘEZNA 1997

1. ÚLOHA (5 BODŮ)

Marťanská abeceda má dvanáct písmen. Marťanskou větou rozumíme libovolnou konečnou posloupnost marťanských písmen. Je takových vět spočetně nebo nespočetně mnoho?

2. ÚLOHA (5 BODŮ)

Jak jistě víte, rovinné geometrické objekty lze chápat jako množiny bodů v rovině. Tramtárijský vědecký tým objevil, že jednotkový čtverec obsahuje stejný počet bodů jako jednotková úsečka.[2] Může z toho tento vědecký tým usoudit, že též rovina obsahuje stejně bodů jako jednotková úsečka?

3. ÚLOHA (5 BODŮ)

Zlovolní obři kreslili na rovinu přímky. Mohli spočetným počtem přímek pokrýt celou rovinu?

4. ÚLOHA (5 BODŮ)

Racionálně uvažující lidé od sebe udržují pouze racionální vzdálenosti. Může existovat nespočetně mnoho racionálně uvažujících lidí?

Jinými slovy: V rovině máme umístěno nespočetně mnoho bodů. Dokažte, že mezi nimi existují dva, které mají iracionální vzdálenost.

5. ÚLOHA (5 BODŮ)

Mějme nějakou konečnou množinu A bodů v rovině. Dokažte, že v rovině existuje bod, který z těchto bodů nelze zkonstruovat euklidovskými prostředky.

Pod pojmem euklidovsky zkonstruovat si představujte něco takového:

(1) Každý bod množiny A je euklidovsky zkonstruovatelný (dále jen euklidovský).

(2) Mějme množinu B euklidovských bodů.

  a) Kružnici $k(S, r)$, kde $S \in B$ a r je vzdálenost některých dvou bodů v B, nazveme euklidovskou.

  b) Přímku KL, kde $K, L \in B$, nazveme euklidovskou.

(3) V průniku dvou různých euklidovských kružnic, dvou různých euklidovských přímek, resp. euklidovské kružnice a euklidovské přímky leží euklidovské body.

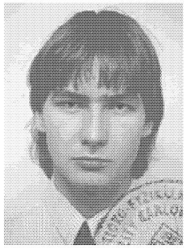
Euklidovské body dostaneme konečným počtem aplikací pravidel 1, 2, 3.

Za tyto úlohy se omlouvají Michal, Punťa i Beneš.

---

[2] Jako domácí cvičení si takové tvrzení můžete dokázat. Pro potřeby této úlohy z něj však vycházejte.

Řešení 6. série


Michal Beneš

1. úloha

Marťanská abeceda má dvanáct písmen. Marťanskou větou rozumíme libovolnou konečnou posloupnost marťanských písmen. Je takových vět spočetně nebo nespočetně mnoho?

Označme si A množinu všech marťanských vět. Je vidět, že vezmeme-li zápis přirozeného čísla v dvanáctkové soustavě a jednotlivé cifry $\{0, 1, \ldots, 11\}$ nahradíme jednotlivými marťanskými písmeny, dostaneme marťanskou větu. Při tomto postupu nám dvě různá přirozená čísla kódují dvě různé marťanské věty. Z toho bezprostředně plyne $\mathbb{N} \preccurlyeq A$.

Mějme naopak marťanskou větu a její jednotlivá písmena nahraďme ciframi $\{1, 2, \ldots, 12\}$, dostaneme přirozené číslo zapsané v třináctkové soustavě.[3] Při tomto postupu nám dvě různé marťanské věty kódují dvě různá přirozená čísla. Z toho bezprostředně plyne $A \preccurlyeq \mathbb{N}$. Výsledkem úlohy je tedy $A \asymp \mathbb{N}$.

2. úloha

Jak jistě víte, rovinné geometrické objekty lze chápat jako množiny bodů v rovině. Tramtárijský vědecký tým objevil, že jednotkový čtverec obsahuje stejný počet bodů jako jednotková úsečka.[4] Může z toho tento vědecký tým usoudit, že též rovina obsahuje stejně bodů jako jednotková úsečka?

Jednotkovou úsečku můžeme ztotožnit s intervalem $\langle 0, 1\rangle$. Nejdříve ukážeme ekvipotenci $\langle 0, 1\rangle \asymp \mathbb{R}$. Nerovnost $\langle 0, 1\rangle \preccurlyeq \mathbb{R}$ je očividná. Dále si rozmysleme, že funkce

$$f : \mathbb{R} \to (0, 1); \quad f(x) = \operatorname{arccotg}(x)/\pi$$

je bijekcí mezi množinami $\mathbb{R}$ a $(0, 1)$. To nám dává druhou potřebnou nerovnost $\mathbb{R} \preccurlyeq \langle 0, 1\rangle$.

Jednotkový čtverec lze ztotožňovat s množinou $\langle 0, 1\rangle \times \langle 0, 1\rangle$, celou rovinu ztotožíme s množinou $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Vzhledem k $\langle 0, 1\rangle \asymp \mathbb{R}$ máme také ekvipotenci $\langle 0, 1\rangle \times \langle 0, 1\rangle \asymp \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Ze zadaní úlohy $\langle 0, 1\rangle \asymp \langle 0, 1\rangle \times \langle 0, 1\rangle$, a z toho konečně $\langle 0, 1\rangle \asymp \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, což jsme chtěli ukázat.

Poznámky k došlým řešením: Řešitelé, kteří použili Cantor-Bernsteinovu větu, měli většinou celou úlohu správně a dostali 5 bodů. Ti, co ji nepoužili, hledali bijekci mezi přímkou a úsečkou nebo mezi čtvercem a rovinou a většinou zapomněli na krajní body, případně na hranici čtverce. Tito řešitelé dostali 4 body. Jeden kladný imaginární bod jsem udělil jednomu velice elegantnímu řešení a těm, kdo se pokusili dokázat domácí cvičení. Dva kladné imaginární body dostali ti, kteří dokázali (bez chyby) domácí cvičení, tedy nikdo.

Nejčastější byly důkazy pomocí funkce tangens nebo racionálních funkcí, ale také geometrické důkazy využívající buď kruhové inverze, nebo rovnoběžného promítání a následovného promítání z bodu (úsečka → půlkružnice → přímka, nebo čtverec → jehlan → rovina).

---

[3] Víte proč bylo nutné použít dvě různé číselné soustavy?

[4] Jako domácí cvičení si takové tvrzení můžete dokázat. Pro potřeby této úlohy z něj však vycházejte.

Závěr některých řešení (většinou 0 bodů) zněl: „Obě množiny jsou nespočetné, mají tedy stejnou mohutnost“. **To, že jsou dvě množiny nespočetné, ještě neznamená, že mají stejnou mohutnost!!!**

3. úloha
Zlovolní obři kreslili na rovinu přímky. Mohli spočetným počtem přímek pokrýt celou rovinu?

Obři rovinu spočetným počtem přímek pokrýt nemohli. Důkaz veďme sporem. Mějme nějaké pokrytí roviny spočetným počtem přímek. Zvolme libovolnou kružnici. Každá ze zvolených přímek ji protne nejvýše ve dvou bodech, takže všechny přímky dohromady s ní mají spočetně mnoho společných bodů. Kružnice má však nespočetně mnoho bodů, takže „obří“ přímky nepokrývají ani celou zvolenou kružnici, natož celou rovinu.

4. úloha
Racionálně uvažující lidé od sebe udržují pouze racionální vzdálenosti. Může existovat nespočetně mnoho racionálně uvažujících lidí?

Jinými slovy: V rovině máme umístěno nespočetně mnoho bodů. Dokažte, že mezi nimi existují dva, které mají iracionální vzdálenost.

Nechť A, B jsou libovolní dva různí racionálně uvažující lidé. Každý další bod C v rovině lze jednoznačně popsat pomocí vzdáleností $|AC|$, $|BC|$ a poloroviny určené přímkou AB, ve které leží. Je-li C racionálně uvažující člověk, pak $|AC|, |BC| \in \mathbb{Q}$. Každého racionálně uvažujícího člověka lze tedy popsat pomocí uspořádané trojice $[x, y, z]$, kde $x, y \in \mathbb{Q}$ a $z \in \{\varrho_1, \varrho_2\}$. Množina $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \times \{\varrho_1, \varrho_2\}$ však má stejně prvků jako množina přirozených čísel. To je již dokazované tvrzení.

Poznámky k došlým řešením: Všechna správná řešení byla založena na stejné myšlence, jako autorské řešení. Vyskytly se dvě zaznamenáníhodné chyby:

- Všechny racionálně uvažující body/lidi spojím lomenou čarou, tu „narovnám“, a dostanu přímku, na níž jsou body, které mají mezi sebou racionální vzdálenosti. Tedy je jich spočetně.

  Vypadá to jako elegantní řešení, ale bohužel je to špatně. Proč? K tomu, abych mohl nějakou množinu bodů pospojovat lomenou čarou potřebuju ty body probírat „jeden po druhém“ a to mohu udělat jen tehdy, je-li těch bodů spočetně mnoho. Uvědomte si, že podobnou úvahou by šlo dokázat, že dvojice rovnoběžek ve vzdálenosti jedna má spočetně mnoho bodů. Body spojím křivkou, narovnám, na vzniklé (polo)přímce budou body ve vzdálenosti alespoň jedna, je jich tedy spočetně.
- Kdyby byla množina bodů nespočetná, tvořila by nějakou křivku/část křivky. ...

  To samozřejmě není pravda. Existují i mnohem „šerednější“ nespočené množiny bodů. Jedna taková (tzv. Cantorovo diskontinuum) je tvořena těmi čísly z $\langle 0, 1\rangle$, která lze v trojkové soustavě zapsat bez použití jedničky. Jiný popis téže množiny: z jednotkové úsečky vymažu prostřední třetinu (koncové body nechám), ze dvou vzniklých úseček opět vymažu prostřední třetinu, atd. „Po nekonečně mnoha krocích“ (korektně řečeno: vezmu průnik všech mezivýsledků) dostanu Cantorovo diskontinuum. Tato množina má mnoho zajímavých vlastností, rozhodně ji však nelze považovat za křivku.

5. úloha
Mějme nějakou konečnou množinu A bodů v rovině. Dokažte, že v rovině existuje bod, který z těchto bodů nelze zkonstruovat euklidovskými prostředky.

Pod pojmem euklidovsky zkonstruovat si představujte něco takového:

(1) Každý bod množiny A je euklidovsky zkonstruovatelný (dále jen euklidovský).
(2) Mějme množinu B euklidovských bodů.
    a) Kružnici $k(S, r)$, kde $S \in B$ a r je vzdálenost některých dvou bodů v B, nazveme euklidovskou.
    b) Přímku KL, kde $K, L \in B$, nazveme euklidovskou.
(3) V průniku dvou různých euklidovských kružnic, dvou různých euklidovských přímek, resp. euklidovské kružnice a euklidovské přímky leží euklidovské body.

Euklidovské body dostaneme konečným počtem aplikací pravidel 1, 2, 3.

Označme si $A_1 = A$. Dále nechť n značí počet prvků množiny A. Povšimeme si, že nové euklidovské[5] body nám dává jen pravidlo (3). Euklidovská kružnice odvozená z množiny A_1 může mít jeden z n různých středů a nejvýše $\binom{n}{2} \leq n^2$ poloměrů. Různých euklidovských přímek může existovat nejvýše $\binom{n}{2} \leq n^2$. Euklidovských kružnic a euklidovských přímek nalezneme tedy v prvním kroku nejvýše $n^2 + n^3 \leq 2n^3$. Protože se dva z těchto objektů mohou protínat nejvýše ve dvou bodech, dostáváme v prvním kroku nejvýše $8n^6$ nových euklidovských bodů. V tuto chvíli tedy máme nalezenu množinu A_2 euklidovských bodů, které lze nalézt po prvním kroku. Tato množina má nejvýše $n + 8n^6$ prvků (odhady jsou samozřejmě silně nadsazené).

Množinu všech euklidovských bodů pak dostaneme jako $A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \ldots$ Každá z množin A_i má ale jen konečně mnoho prvků. Naznačené sjednocení tedy nemůže mít více prvků než množina $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, a proto euklidovských bodů existuje jen spočetně mnoho. Bodů v rovině je ale nespočetně. Některých bodů v rovině tedy euklidovskými prostředky nedosáhneme.

[5] To zde (i dále) rozuměj ve vztahu k množině A.