7. série

Téma:	Překvapení
Datum odeslání:	24. DUBNA 1997

PROBLEM 1.
Find størsteværdien for funktionen

$$f(x) = \prod_{k=0}^{1997} |x-k|$$

for x i det afsluttede interval $[998, 999]$.

PROBLEM 2.
Lad $a_1, \ldots, a_{1996}$ være positive tal hvis aritmetiske middelværdi er lig med 1996. Vis, at

$$\sqrt[1996]{\prod_{i=1}^{1996} \prod_{j=1}^{1996} \left(1 + \frac{a_i}{a_j}\right)} \geq 2^{1996}$$

og bestem hvornår der gælder lighedstegn.

PROBLEM 3.
Betragt dobbeltuligheden

$$6 < 3^{\sqrt{3}} < 7$$

Idet man kun benytter elementære egenskaber for eksponenter og uligheder (ingen lommeregner, computer, logaritmetabel, eller vurdering af $\sqrt{3}$ må benyttes), skal det bevises at den første ulighed medfører den anden.

PROBLEM 4.
Givet vilkårlige positive tal a, b og c, bevis, at mindst én af de følgende uligheder er falsk:

$$a(1-b) > \frac{1}{4}\,,\ b(1-c) > \frac{1}{4}\,,\ c(1-a) > \frac{1}{4}\,.$$

PROBLEM 5.
Lad $a \neq 0, b$ være reelle tal. Vis, at hvis ligningen $ax^2 - bx + b = 0$ har to reelle løsninger x_1 og x_2, da

$$x_1^2 + x_2^2 \geq 2(x_1 + x_2).$$

7. série

Téma: Překvapení

Datum odeslání: 24. DUBNA 1997

1. FELADAT
Határozzuk meg az

$$f(x) = \prod_{k=0}^{1997} |x-k|$$

függvény maximumát a $[998, 999]$ zárt intervallumon.

2. FELADAT
Legyenek $a_1, \ldots, a_{1996}$ pozitív számok melyek aritmetikai középértéke 1996. Mutassuk meg, hogy

$$\sqrt[1996]{\prod_{i=1}^{1996} \prod_{j=1}^{1996} \left(1 + \frac{a_i}{a_j}\right)} \geq 2^{1996}$$

és vizsgáljuk meg, mikor lép fel egyenlőség.

3. FELADAT
Tekintsük a következő kettős egyenlőtlenséget

$$6 < 3^{\sqrt{3}} < 7$$

Csupán az exponenciális függvény elementáris tulajdonságait és egyenlőtlenségeket használva (számológép, számítógép, logarléc és $\sqrt{3}$ közelítő értékei használata nélkül) mutassuk meg, hogy az első egyenlőtlenségből következik a második.

4. FELADAT
Legyenek a, b és c tetszőleges pozitív válos számok. Mutassuk meg, hogy a következő egyenlőtlenségek közül legalább az egyik nem áll fenn:

$$a(1-b) > \frac{1}{4}\,, \quad b(1-c) > \frac{1}{4}\,, \quad c(1-a) > \frac{1}{4}\,.$$

5. FELADAT
Legyenek a, b valós számok, $a \neq 0$. Bizonyítsuk be, hogy ha x_1, x_2 az $ax^2 - bx + b = 0$ egyenlet valós gyökei, akkor kielégítik a következő egyenlőtlenséget:

$$x_1^2 + x_2^2 \geq 2(x_1 + x_2)\,.$$

7. série

Téma: Překvapení

Datum odeslání: 24. DUBNA 1997

1. ÚLOHA (5 BODŮ)

Najděte maximum funkce

$$f(x) = \prod_{k=0}^{1997} |x-k|$$

pro x z uzavřeného intervalu $\langle 998, 999 \rangle$.

2. ÚLOHA (5 BODŮ)

Buďte $a_1, \ldots, a_{1996}$ kladná reálná čísla, jejichž aritmetický průměr je 1996. Dokažte, že

$$\sqrt[1996]{\prod_{i=1}^{1996} \prod_{j=1}^{1996} \left(1 + \frac{a_i}{a_j}\right)} \geq 2^{1996}$$

a zjistěte, kdy nastává rovnost.

3. ÚLOHA (5 BODŮ)

Uvažme nerovnost

$$6 < 3^{\sqrt{3}} < 7.$$

Za použití jen elementárních vlastností exponentů (užití kalkulačky, počítače, logaritmických tabulek ani odhadů pro $\sqrt{3}$ není povoleno) ukažte, že z první nerovnosti vyplývá druhá.

4. ÚLOHA (5 BODŮ)

Jsou dána kladná čísla a, b, c. Dokažte, že nemohou platit všechny následující nerovnosti:

$$a(1-b) > \frac{1}{4}, \quad b(1-c) > \frac{1}{4}, \quad c(1-a) > \frac{1}{4}.$$

5. ÚLOHA (5 BODŮ)

Buďte a, b reálná, $a \neq 0$. Ukažte, že pokud rovnice $ax^2 - bx + b = 0$ má reálné kořeny x_1, x_2, tak

$$x_1^2 + x_2^2 \geq 2(x_1 + x_2).$$

Řešení 7. série

1. úloha
Najděte maximum funkce

$$f(x) = \prod_{k=0}^{1997} |x-k|$$

pro x z uzavřeného intervalu $\langle 998, 999 \rangle$.

Úlohu zobecníme: horní mez součinu bude $2n+1$, hledáme maximum na intervalu $\langle n, n+1 \rangle$. Ukážeme, že maxima je nabyto pro $x = n + 1/2$. Platí (součin přerovnáme)

$$f(x) = \prod_{k=0}^{n} |x-k| \, |x-(2n+1-k)| \, .$$

Pro $x \in \langle n, n+1 \rangle$ se můžeme zbavit absolutních hodnot, (k+1)-ní činitel (ten pro $k=0$ nazýváme první) je roven $(x-k)((2n+1-k)-x)$, to je podle AG–nerovnosti menší nebo rovno $(\frac{2n+1-2k}{2})^2$, přičemž rovnost nastává přesně tehdy, když $x-k = 2n+1-k-x$, čili pro $x = n+1/2$, tedy pro stejnou hodnotu, nezávisle na k. Odsud tedy víme, že maxima je nabyto v bodě $n+1/2$, snadnou úpravou zjistíme, že

$$f(n+\tfrac{1}{2}) = \frac{\prod_{k=0}^{n} \frac{(2n+1-2k)^2}{4} \prod_{k=0}^{n-1} (2n-2k)^2}{\prod_{k=0}^{n-1} (2n-2k)^2} = \frac{(2n+1)!^2}{4^{n+1} 2^{2n} n!^2} = \frac{(2n+1)!^2}{2^{4n+2} n!^2}$$

2. úloha
Buďte $a_1, \ldots, a_{1996}$ kladná reálná čísla, jejichž aritmetický průměr je 1996. Dokažte, že

$$\sqrt[1996]{\prod_{i=1}^{1996} \prod_{j=1}^{1996} \left(1 + \frac{a_i}{a_j}\right)} \geq 2^{1996}$$

a zjistěte, kdy nastává rovnost.

Umocněním vztahu ze zadání máme

$$\prod_{i=1}^{1996} \prod_{j=1}^{1996} (1 + \frac{a_i}{a_j}) \geq 2^{1996^2}.$$

Na levé straně máme součin $1996 \cdot 1996$ výrazů. V 1996 případech je $i = j$, příslušný činitel je potom roven číslu 2. Proto je levá strana rovna $2^{1996} \cdot$(součin činitelů, kde $i \neq j$). Takových činitelů je $1996 \cdot 1995$, jejich součin se skládá z $(1996 \cdot 1995)/2$ dvojic

$$(1 + \frac{a_i}{a_j})(1 + \frac{a_j}{a_i}) = 2 + \frac{a_i^2 + a_j^2}{a_i a_j}.$$

Úpravou $(a_i - a_j)^2 \geq 0$ máme $a_i^2 + a_j^2 \geq 2a_i a_j$, rovnost nastane pro $a_i = a_j$. Proto

$$(1 + \frac{a_i}{a_j})(1 + \frac{a_j}{a_i}) = 2 + \frac{a_i^2 + a_j^2}{a_i a_j} \geq 2 + 2 = 4.$$

Proto je výraz na levé straně větší nebo roven

$$2^{1996} \cdot 4^{\frac{1996 \cdot 1995}{2}} = 2^{1996^2},$$

což chceme. Jelikož aritmetický průměr čísel $a_1, a_2, \ldots, a_{1996}$ je 1996, nastává v naší nerovnosti rovnost, pokud $a_i = 1996$, $i = 1, 2, \ldots$ 1996.

Poznámky k došlým řešením: Tuto úlohu měli skoro všichni řešitelé správně. O bod přišli převážně ti, kteří se nezabývali otázkou, kdy v nerovnosti nastává rovnost. Většina řešení stejně jako autorské řešení rozebírala v součinu na levé straně nerovnosti činitele $(1 + \frac{a_i}{a_j})$ dvou typů: pro $i = j$ a pro $i \neq j$. Někteří řešitelé případ $i = j$ neuváděli zvlášť a tvrdili, že pro libovolný člen $(1 + \frac{a_i}{a_j})$ nalezneme v součinu jiný člen tvaru $(1 + \frac{a_j}{a_i})$, který s ním dali (jako v autorském řešení) do dvojice. Vzhledem k tomu, že členů $(1 + \frac{a_i}{a_i}) = 2$ je v součinu vlevo 1996, tedy sudý počet, lze z nich též udělat dvojice, takže to jest pravdou. Na druhou stranu ze způsobu, jakým to bylo v oněch řešeních podáno, se mi zdálo, že sudý počet oněch členů je spíše šťastnou náhodou a že s tím oni řešitelé nepočítali, a strhl jsem za opomenutí případu $i = j$ jeden bod.

3. úloha

Uvažme nerovnost

$$6 < 3^{\sqrt{3}} < 7.$$

Za použití jen elementárních vlastností exponentů (užití kalkulačky, počítače, logaritmických tabulek ani odhadů pro $\sqrt{3}$ není povoleno) ukažte, že z první nerovnosti vyplývá druhá.

(volně převyprávěno podle *Lenky Zdeborové*)

Nechť $6 < 3^{\sqrt{3}}$, umocněním obou stran této nerovnosti na $\sqrt{3}$ dostaneme po jednoduchých úpravách $6^{\sqrt{3}} < 3^{\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}} = 3^3 < 36 = 6^2$, tedy z toho, že funkce 6^x je rostoucí máme $\sqrt{3} < 2$.

Nyní pro spor předpokládejme, že $3^{\sqrt{3}} \geq 7$. Umocněním této nerovnosti na $\sqrt{3}$ dostaneme

$$3^3 \geq 7^{\sqrt{3}} = \left(\frac{7}{3}\right)^{\sqrt{3}} \cdot 3^{\sqrt{3}} \geq \left(\frac{7}{3}\right)^{\sqrt{3}} \cdot 7,$$

celkem dostáváme dvojici ekvivalentních nerovností

$$\frac{3^3}{7} \geq \left(\frac{7}{3}\right)^{\sqrt{3}} \qquad , \qquad \left(\frac{7}{3}\right)^{\sqrt{3}} \cdot \left(\frac{3^4}{7^2}\right)^{\sqrt{3}} = \left(\frac{7}{3} \cdot \frac{3^4}{7^2}\right)^{\sqrt{3}} \geq \left(\frac{7}{3}\right)^{\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}},$$

kde druhá vznikne umocněním první na $\sqrt{3}$. Pak

$$\frac{3^3}{7} \cdot \left(\frac{3^4}{7^2}\right)^{\sqrt{3}} \geq \left(\frac{7}{3}\right)^{\sqrt{3}} \cdot \left(\frac{3^4}{7^2}\right)^{\sqrt{3}} \geq \frac{7^3}{3^3} \quad ,$$

nejprve jsme využili první a pak druhou nerovnost. Vynásobením poslední nerovnosti číslem $\frac{7}{3^3}$ získáme

$$\left(\frac{3^4}{7^2}\right)^{\sqrt{3}} \geq \frac{7^4}{3^6}. \tag{$*$}$$

Dle výše ukázané vlastnosti $2 > \sqrt{3}$ však víme, že $\left(\frac{3^4}{7^2}\right)^2 > \left(\frac{3^4}{7^2}\right)^{\sqrt{3}}$, a proto srovnáním se vztahem $(*)$ máme

$$\left(\frac{3^4}{7^2}\right)^2 > \frac{7^4}{3^6} \qquad \Leftrightarrow \qquad 3^{14} > 7^8,$$

což je hledaný spor (neboť $3^{14} = 4782969 < 5764801 = 7^8$), proto $3^{\sqrt{3}} < 7$.

4. úloha
Jsou dána kladná čísla a, b, c. Dokažte, že nemohou platit všechny následující nerovnosti:

$$a(1-b) > \frac{1}{4}, \quad b(1-c) > \frac{1}{4}, \quad c(1-a) > \frac{1}{4}.$$

Důkaz veďme sporem. Vynásobením daných nerovností dostaneme

$$a(1-a)b(1-b)c(1-c) > \frac{1}{4^3}.$$

Ukážeme, že toto není možné. Pro každá dvě reálná čísla x, y platí $4xy \leq (x+y)^2$ (dokážeme to nejsnáze převedením na nerovnost $0 \leq (x-y)^2$). Aplikací pro $x = a$, $y = 1-a$ dostaneme $a(1-a) \leq 1/4$. Pronásobením s analogickými nerovnostmi pro b a c získáme

$$a(1-a)b(1-b)c(1-c) \leq \frac{1}{4^3},$$

což je spor. Pozor, chyba! Musíme ověřit, že levé strany násobených nerovností nejsou záporné (z $-2 < 1$ a $-2 < 2$ neplyne $4 < 2$). To je ovšem snadné: dle zadání je a kladné, z $a(1-b) > 1/4 > 0$ plyne $b < 1$. Obdobně $a < 1$, $c < 1$, takže $a(1-a) > 0$, $b(1-b) > 0$, $c(1-c) > 0$, což jsme potřebovali.

5. úloha
Buďte a, b reálná, $a \neq 0$. Ukažte, že pokud rovnice $ax^2 - bx + b = 0$ má reálné kořeny x_1, x_2, tak

$$x_1^2 + x_2^2 \geq 2(x_1 + x_2).$$

Kvadratická rovnice $ax^2 - bx + b = 0$ má dva reálné kořeny, její diskriminant je tudíž nezáporný, tj. $b^2 - 4ab \geq 0 \quad (*)$. Jelikož x_1, x_2 jsou kořeny naší kvadratické rovnice máme

$$ax^2 - bx + b = a(x - x_1)(x - x_2) = ax^2 - a(x_1 + x_2)x + ax_1x_2,$$

odtud porovnáním lineárních a absolutních členů na obou stranách této identity získáme[1] vztahy

$$a(x_1 + x_2) = b, \qquad ax_1x_2 = b.$$

Úpravou vztahu $(*)$ a využitím posledních rovností máme

$$\frac{b^2}{a^2} \geq 2\frac{a}{b} + 2\frac{a}{b} \Rightarrow (x_1 + x_2)^2 \geq 2(x_1 + x_2) + 2x_1x_2,$$

což po jednoduché úpravě dává požadovaný vztah $x_1^2 + x_2^2 \geq 2(x_1 + x_2)$.

---

[1] Takto obecně můžeme odvodit známé Vietovy vztahy: má-li kvadratická rovnice $x^2 + px + q$ kořeny x_1 a x_2, platí $x_1 + x_2 = -p, x_1x_2 = q$.