1. série

Téma: Různá čísla

Termín odeslání: 13. října 1997

1. ÚLOHA
Dokažte, že číslo
$$\sqrt[3]{19+9\sqrt{6}}+\sqrt[3]{19-9\sqrt{6}}$$
je přirozené.

2. ÚLOHA
Dokažte, že číslo
$$\left(5+2\sqrt{6}\right)^{1998}$$
není přirozené.

3. ÚLOHA
Nechť c je přirozené číslo. Rozhodněte, které z čísel
$$\sqrt{c+1}-\sqrt{c} \qquad \text{a} \qquad \sqrt{c}-\sqrt{c-1}$$
je větší a své tvrzení dokažte.

4. ÚLOHA
Dokažte, že
$$\frac{1}{1999}<\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{7}{8}\cdots\frac{1997}{1998}<\frac{1}{44}\,.$$

5. ÚLOHA
Určete celou část čísla S:
$$S=\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{4}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{1000}}\,.$$

Upozornění: Některé z úloh v této sérii lákají k použití kalkulačky či jiné výpočetní techniky. S jejich pomocí asi snadno zjistíš, že číslo uvedené v prvním příkladě této série je rovno dvěma. To však není úplně vše, co po Tobě chceme. V matematice není důležitý jenom výsledek, ale též zdůvodnění jeho správnosti. Je totiž potřeba přesvědčit i toho nejzarytějšího odpůrce, že toto číslo je skutečně dvě, a ne třeba $1{,}9999999999999999999$, což by použitá kalkulačka mohla zaokrouhlit na číslo dvě.

Řešení 1. série

1. úloha
Dokažte, že číslo

$$\sqrt[3]{19+9\sqrt{6}}+\sqrt[3]{19-9\sqrt{6}}$$

je přirozené.

Užitím vzorce $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$ snadno nahlédneme, že

$$(1\pm\sqrt{6})^3=1\pm3\sqrt{6}+18\pm6\sqrt{6}=19\pm9\sqrt{6}\,, \tag{R}$$

a tedy

$$\sqrt[3]{19+9\sqrt{6}}+\sqrt[3]{19-9\sqrt{6}}=\sqrt[3]{(1+\sqrt{6})^3}+\sqrt[3]{(1-\sqrt{6})^3}=1+\sqrt{6}+1-\sqrt{6}=2\,.$$

Pro ty, kteří mají pocit, že snadno nenahlédnou, aneb jak jsme na to přišli: Označme $x_1=\sqrt[3]{19+9\sqrt{6}}$ a $x_2=\sqrt[3]{19-9\sqrt{6}}$. Numerické odhady nám napoví, že pokud je x_1+x_2 celé číslo, pak je to číslo 2. Zkusme vypočítat součin těchto čísel:

$$x_1\cdot x_2=\sqrt[3]{(19+9\sqrt{6})(19-9\sqrt{6})}=\sqrt[3]{19^2-81\cdot 6}=\sqrt[3]{-125}=-5\,.$$

Čísla x_1 a x_2 mají hezký součin ($=-5$) a *možná* i součet ($=2$). Jsou to tedy *možná* kořeny kvadratické rovnice x^2-2x-5 — připomeňte si vztahy mezi kořeny polynomu a jeho koeficienty (tzv. Viètovy vztahy). Ze vzorce pro kořeny kvadratické rovnice vede přímá cesta k rovnosti (R).

Poznámky opravovatele: Většina řešitelů přišla na to, že dané číslo je řešením rovnice $x^3+15x-38=0$. Někteří však opomněli zdůvodnit, že *jediným* reálným kořenem této rovnice je číslo $x=2$. Mohlo by se totiž stát, že získaná rovnice by měla více než jeden kořen. Pak by ještě bylo potřeba zdůvodnit, že číslo 2 je řešením naší původní úlohy.

2. úloha
Dokažte, že číslo

$$\left(5+2\sqrt{6}\right)^{1998}$$

není přirozené.

Nechť $\mathcal{M}=\{A+B\sqrt{6}\mid A,\,B\in\mathbb{Z}\}$. Lehce ověříme výpočtem, že množina $\mathcal{M}$ je uzavřená na operace sčítání, odčítání a násobení, tedy např. $a,b\in\mathcal{M}\Rightarrow a\pm b\in\mathcal{M}$ atd. Tedy $\left(5+2\sqrt{6}\right)^{1998}=X+Y\sqrt{6}$ pro nějaká celá čísla X a Y; všimněte si, že $Y\neq 0$. (Tohle většina

z vás dokazovala pomocí binomické věty.) Nyní dokážeme, že žádné číslo tvaru $A + B\sqrt{6}$, kde $B \neq 0$ není racionální. Toto číslo (spolu s číslem $A - B\sqrt{6}$) je kořenem polynomu $x^2 - 2Ax + A^2 - 6B^2$, což je polynom s celočíselnými koeficienty. Stačí tedy dokázat tvrzení:
Věta. Nechť x_0 je kořenem polynomu $x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0$, kde $n \geq 1$ a $a_k \in \mathbb{Z}$ pro $k = 0, 1, \ldots, n-1$. Pak je x_0 číslo celé nebo iracionální.
Důkaz: Nechť $x_0 = \frac{p}{q}$, kde $p, q \in \mathbb{Z}$, $q \neq 0$. Dále můžeme předpokládat, že p a q jsou nesoudělná. Dosazením do polynomu a úpravou dostáváme

$$p^n = -a_{n-1}p^{n-1}q - a_{n-2}p^{n-2}q^2 - \cdots - a_0q^n$$

Výraz na pravé straně je zřejmě dělitelný číslem q, což vzhledem k předpokladu nesoudělnosti p a q (a tedy také nesoudělnosti q a p^n) dává $q = \pm 1$, což jsme chtěli dokázat.

Pro $B \neq 0$ je tedy $C = A + B\sqrt{6}$ číslo celé nebo iracionální. Celé však není, jinak by $\sqrt{6} = \frac{C-A}{B}$ bylo číslo racionální. $\sqrt{6}$ je kořenem polynomu $x^2 - 6$, a tedy dle věty je iracionální, neboť není číslem celým (proč?).

Většina z vás ukázala (nebo prohlásila za zřejmé), že druhá odmocnina ze šesti je číslo iracionální a násobek, resp. součet čísla iracionálního s číslem celým je opět iracionální. Což je správně, náš důkaz je trošičku ukecanější, ovšem jen proto, aby vás seznámil s tvrzením, které se vám třeba bude někdy hodit.

Poznámky opravovatele: Většina řešitelů vyřešila úlohu standardním způsobem (tj. rozpis pomocí binomické věty a vyjádření ve tvaru $A + B\sqrt{6}, A, B \in \mathbb{N}$) a obdržela $5 + 0i$. Někteří vyšli z tvrzení $(5+2\sqrt{6})^n + (5-2\sqrt{6})^n \in \mathbb{N}$. Protože $5 - 2\sqrt{6} < 1$, platí $(5+2\sqrt{6}) \notin \mathbb{N}$. Tento způsob se mi líbil ($\Rightarrow 5 + i$). Záporná i byla udělována za zbytečně složité a nepřehledné postupy.

3. úloha

Nechť c je přirozené číslo. Rozhodněte, které z čísel

$$\sqrt{c+1} - \sqrt{c} \qquad \text{a} \qquad \sqrt{c} - \sqrt{c-1}$$

je větší a své tvrzení dokažte.

První číslo je menší než druhé, jak snadno nahlédneš, když si promyslíš následující úpravy:

$$\sqrt{c+1} - \sqrt{c} = \frac{1}{\sqrt{c+1} + \sqrt{c}} < \frac{1}{\sqrt{c} + \sqrt{c-1}} = \sqrt{c} - \sqrt{c-1}$$

Poznámky opravovatele: Třetí úloha byla velice jednoduchá, a proto byla hodnocena poněkud náročněji. Obzvláště přísně byl hodnocen postup, při kterém řešitel vyšel z dokazované nerovnosti a dospěl k všeobecně platnému tvrzení. Není-li totiž zmíněno, že tyto úpravy byly ekvivalentní, je toto řešení logicky chybné. Všichni tito řešitelé obdrželi $4 + 0i$. Vyskytla se ovšem i dlouhá řada jiných řešení — Jensenova nerovnost, AG nerovnost, ...

4. úloha
Dokažte, že

$$\frac{1}{1999} < \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{7}{8} \cdots \frac{1997}{1998} < \frac{1}{44}\,.$$

Položme $A = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{7}{8} \ldots \frac{1997}{1998}$. Uvažujme číslo $1999 \cdot A^2$, snadno nahlédneme, že se dá psát ve tvaru

$$1999 \cdot A^2 = \frac{1 \cdot 3}{2^2} \cdot \frac{3 \cdot 5}{4^2} \cdot \frac{5 \cdot 7}{6^2} \cdot \ldots \cdot \frac{1997 \cdot 1999}{1998^2}.$$

Jedná se tedy o součin činitelů, z nichž každý je tvaru

$$\frac{(\text{číslo} - 1) \cdot (\text{číslo} + 1)}{\text{číslo}^2} = \frac{\text{číslo}^2 - 1}{\text{číslo}^2} < 1.$$

Tudíž každý z činitelů v uvedeném součinu je menší než jedna a proto i číslo $1997 \cdot A^2 < 1$. Jednoduchou úpravou pak máme $A < \frac{1}{\sqrt{1999}} < \frac{1}{44}$. Tím jsme ukázali nerovnost napravo. Druhý odhad je mnohem snažší a plyne například z tohoto vyjádření čísla A:

$$A = \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{4} \cdot \frac{7}{6} \cdot \frac{9}{8} \cdots \frac{1997}{1996} \cdot \frac{1}{1998} > \frac{1}{1998} > \frac{1}{1999},$$

neboť každý z činitelů ve vyjádření čísla A je až na poslední větší než 1. Proto $A > \frac{1}{1999}$, což jsme chtěli.

Poznámky opravovatele: Řešení došla spousta a ta správná z nich byla vesměs stejná. Ten, kdo řešil úlohu přímým výpočtem na počítači, měl smůlu (tj. $0 + 0i$), ačkoliv třeba uvedl program či odhad chyby. Vyskytlo se několik řešení pomocí Stirlingova vzorce.[1] Za ty jsem strhával dva až pět bodů.

5. úloha
Určete celou část čísla S:

$$S = \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{1000}}\,.$$

Pre ľubovoľné prirodzené n zrejme platí odhad

$$\sqrt{n+1} + \sqrt{n} \geq 2\sqrt{n} \geq \sqrt{n + \frac{1}{2}} + \sqrt{n - \frac{1}{2}}$$

[1] Stirlingův vzorec je vzorec pro odhad faktoriálu: $n! \sim (\frac{n}{e})^n \sqrt{2\pi n}$. Potíž je jednak v tom, že je to velice silné tvrzení s komplikovaným důkazem, jednak v tom, co znamená ono $\sim$. Řada řešitelů prostě nahradí faktoriál jeho odhadem a netrápí je, zda je jejich postup korektní.

(druhú z uvedených nerovností overíme tak, že obe jej strany umocníme na druhú). Odtiaľ plynie

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \geq \frac{2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \frac{2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} \cdot \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}} = 2(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$$

a analogicky $\frac{1}{\sqrt{n}} \leq 2(\sqrt{n+\frac{1}{2}} - \sqrt{n-\frac{1}{2}})$, t.j.

$$2(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}) \leq \frac{1}{\sqrt{n}} \leq 2\left(\sqrt{n+\frac{1}{2}} - \sqrt{n-\frac{1}{2}}\right).$$

Sčítaním týchto nerovností pre $n = 1, 2, 3, \ldots, 1000$ dostávame

$$61 < 2(\sqrt{1001} - \sqrt{1}) \leq S \leq 2(\sqrt{1000.5} - \sqrt{0.5}) < 62,$$

takže celá časť S je rovná 61.

Poznámka: Aj keď úloha pochádza z (27. ročníka španielskej) matematickej olympiády, pri ktorej sa znalosť diferenciálneho a integrálneho počtu nepredpokladá, majú integrovania schopní jedinci (aj štátne celky) istú výhodu: ľahko totiž prídu na nápad odhadovať číslo $\frac{1}{\sqrt{n}}$ pomocou výrazov typu $\int_a^{a+1} \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx = 2(\sqrt{a+1} - \sqrt{a})$.

Rozdiel medzi nami dokázaným horným a dolným odhadom je približne $2\sqrt{1} - 2\sqrt{1/2} = 2 - \sqrt{2} \doteq 0.6$, takže sme mali vlastne šťastie, že sme sa s oboma odhadmi "zmestili" medzi dve susedné celé čísla. Nerovnosť $\sqrt{n+1} + \sqrt{n} \geq 2\sqrt{n}$ sa však dá vylepšiť na $\sqrt{n+9/16} + \sqrt{n-7/16} \geq 2\sqrt{n}$ a pri jej použití nám uvedený rozdiel vyjde približne $2\sqrt{9/16} - 2\sqrt{1/2} = 3/2 - \sqrt{2} < 0.1$. Naopak, ak miesto odhadu $2\sqrt{n} \geq \sqrt{n+1/2} + \sqrt{n-1/2}$ použijeme hrubší odhad $2\sqrt{n} \geq \sqrt{n} + \sqrt{n-1}$, potom nám výjde rozdiel v odhadoch väčší ako 1, takže takýto odhad určite nemôžeme použiť pre všetky $n \geq 1$.

Poznámky opravovatele: Vyskytly se tyto typy řešení: pomocí vyšší matematiky, integrálů $(5 + 0i)$; pomocí elementárních nerovností $(5 + 0i)$; pouze výsledek, špatné řešení — 0 bodů.