7. série

Téma: Teorie čísel

Termín odeslání: 20. DUBNA 1998

1. ÚLOHA

Uvažujme následující posloupnost čísel: 1, 12, 123, 1234, 12345, 123456, 1234567, 12345678, 123456789, 12345678910, 1234567891011, ..., tj. dekadický zápis n-tého čísla naší posloupnosti vznikne tak, že za sebe postupně napíšeme čísla od jedné do n.

(a) Nalezněte nějaké číslo v naší posloupnosti dělitelné číslem 7.

(b) Ukažte, že 109-tý člen naší posloupnosti, tj. číslo 1234567891011...106107108109, je dělitelný číslem 7.

(c) Dokažte, že naše posloupnost obsahuje dokonce nekonečně mnoho čísel, která jsou dělitelná číslem 7.

2. ÚLOHA

Uvažujme posloupnost čísel 73, 703, 7003, 70003, 700003, ..., tj. čísla tvaru $7 \cdot 10^n + 3$. Dokažte, že tato posloupnost obsahuje nekonečně mnoho čísel složených.

3. ÚLOHA

Platí vztahy

$$3^2 + 4^2 = 5^2, \qquad 3^3 + 4^3 + 5^3 = 6^3.$$

(a) Výše uvedené vztahy by nám mohly napovídat, že platí vzoreček: $3^n + 4^n + \dots (n+1)^n + (n+2)^n = (n+3)^n$. Skutečně pro $n = 2$, $n = 3$ dostaneme vztahy výše uvedené, které (jak si snadno přepočítáš) jsou správné. Pro $n = 4$ však už vzoreček neplatí. Přesvědčte se o tom.

(b) Vzoreček uvedený v (a) neplatí dokonce kromě $n = 2$ a $n = 3$ pro žadné další n. Dokonce je vždy pravá strana větší než levá. Dokažte.

(c) Vzoreček uvedený v časti (a) neplatil. Zkuste však na základě vztahů $3^2+4^2 = 5^2$, $3^3 + 4^3 + 5^3 = 6^3$ vymyslet nějaký lepší vzoreček, lepší jejich zobecnění, který už bude fungovat.[1]

4. ÚLOHA

Pro která přirozená čísla n je číslo $3^{n!} - 2^{n!}$ dělitelné číslem n ?

---

[1] Bod (c) této úlohy je zadaný trochu nestandardně. Pokud zde objevíš nějaké pěkné tvrzení, budeme rádi, když nám ho pošleš, a samozřejmě ho nějak oceníme. V každém případě však na tomto místě podotýkáme, že pokud úlohu 3 vyřešíš správně až na tuto část (c), obdržíš plný počet bodů.

5. ÚLOHA

(a) Pro která přirozená čísla n má rovnice $x^n + y^n = z^{n+1}$ řešení v přirozených číslech x, y, z ? Pro která čísla n má tato rovnice dokonce nekonečně mnoho řešení ?

(b) Jak bude znít odpověď[2] na otázky z části (a) pro rovnice:
$x^{n+1} + y^{n+1} = z^n, \quad x^{n+1} + y^n = z^n, \quad x^n + y^n = z^n$?

(c) Jak se změní odpověď na otázky v (a), (b), pokud se budeme zajímat jen o nesoudělná řešení, tj. zajímají nás přirozená čísla x, y, z, která řeší příslušnou rovnici a platí navíc $(x, y) = 1$, $(x, z) = 1$ a $(y, z) = 1$?

[2] V částech (b) a (c) je těch otázek možná trochu moc. Na některé z nich existuje jednoduchá odpověď, na některé nám ani třeba odpověď není známa. Čím více se Ti toho podaří vyřešit, tím lépe a tím více bodů můžeš získat.

Řešení 7. série

1. úloha
Uvažujme následující posloupnost čísel: 1, 12, 123, 1234, 12345, 123456, 1234567, 12345678, 123456789, 12345678910, 1234567891011, ..., tj. dekadický zápis n-tého čísla naší posloupnosti vznikne tak, že za sebe postupně napíšeme čísla od jedné do n.

(a) Nalezněte nějaké číslo v naší posloupnosti dělitelné číslem 7.

(b) Ukažte, že 109-tý člen naší posloupnosti, tj. číslo 1234567891011...106107108109, je dělitelný číslem 7.

(c) Dokažte, že naše posloupnost obsahuje dokonce nekonečně mnoho čísel, která jsou dělitelná číslem 7.

Jako přípravu k řešení tohoto příkladu si nejprve zjistíme zbytky několika prvních mocnin čísla 10 při dělení číslem 7, k čemu to bude potřeba záhy uvidíš. Při tom budeme využívat trochu aparát kongruencí, o kterém ses mohl dozvědět například z prvního textu našeho seriálu. Předně, přímým výpočtem zjistíme, že platí

$$10^i \equiv z_i \pmod 7, \qquad \text{pro} \quad i = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, \tag{1}$$

kde symbolem z_i bylo postupně označeno
$(z_0, z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, z_6) = (1, 3, 2, 6, 4, 5, 1)$, odtud také[3] vidíme, že

$$10^{6k+i} \equiv z_i \pmod 7, \qquad \text{pro přirozené číslo} \quad k \quad \text{a} \quad i = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6. \tag{2}$$

Takto jsme vlastně popsali, jaké zbytky dávají při dělení číslem 7 všechny mocniny desítky. Nyní přistupme k samotnému řešení našeho příkladu. Pro lepší vyjadřování si označme n-té číslo naší zkoumané posloupnosti symbolem $R(n)$.

(a) Příkladem může být například 11-tý člen naší posloupnosti, jak si třeba přímým výpočtem můžeš sám ověřit, nebo jím je číslo zkoumané v části (b).

(b) Tato část úlohy byla trochu počítavá a záleželo na řešiteli, jak k ní přistoupil a jak si tím ušetřil, nebo přidělal práci. Samozřejmě lze to udělat přímým výpočtem (písemné dělení), já zde však uvedu trochu méně namáhavý postup. Vzhledem k tomu, že tento postup bude využívat úvahy z části (c), nechám si tuto část úlohy až na závěr.

(c) Uvažujme přirozené číslo n takové, že všechna z čísel $n+1$, $n+2$, $n+3$, ..., $n+12$ mají stejný počet cifer, přičemž tento počet je tvaru $6k+3$, kde k je nějaké nezáporné celé číslo.[4] Potom ze vztahu označeného číslem (1) plyne (*podrobně si rozmysli,* využívám zde nejprve vlastnosti čísel $R(n)$ a pak vztah (2))

$$R(n+2) = 10^{2\cdot(6k+3)}R(n) + 10^{6k+3}(n+1) + (n+2) \equiv$$

[3] K zdůvodnění tohoto lze též využít Fermatovu větu pro $p = 7$ (*lemma 2(b)* ze seriálu), ale v našem konkrétním případě po ní není nutné sahat.

[4] Přirozených čísel n s touto vlastností je docela dost (dokonce nekonečně mnoho), příkladem může být například číslo $n = 123456789$, kde pak to k bude rovno jedné.

$$\equiv R(n) - (n+1) + (n+2) \equiv R(n) + 1 \pmod 7,$$

a indukcí si odtud už laskavý čtenář sám dokáže, že platí vztah

$$R(n+2m) \equiv R(n) + m \pmod 7 \qquad \text{pro} \quad m = 1,2,3,4,5,6. \tag{3}$$

Odtud vidíme, že právě jedno z čísel $R(n)$, $R(n+2)$, $R(n+4)$, $R(n+6)$, $R(n+8)$, $R(n+10)$, $R(n+12)$ je dělitelné číslem 7. Čísel n s požadovanou vlastností je zřejmě nekonečně mnoho, proto i čísel $R(n)$, která jsou dělitelná číslem 7 je nekonečně mnoho.
(b) (dokončení) Nyní ukážeme, že číslo $R(109)$ je dělitelné sedmi. Použitím vztahu (3) máme $R(109) = R(99 + 2 \cdot 5) \equiv R(99) + 5 \pmod 7$. Nyní aplikujeme vztahy (1) a (2) na $R(99)$, dostaneme (jednotlivé kroky úprav jsou celkem přirozené, pokud Ti tak nepřipadají zkus si přesně rozmyslet, co znamenají uvedené sumy Σ)

$$R(99) = 10^{180} \cdot R(9) + \sum_{j=10}^{99} 10^{198-2j} \cdot j = 10^{180} \cdot R(9) + \sum_{k=3}^{32} \sum_{i=1}^{3} 10^{198-2(3\cdot k+i)}(3 \cdot k + i) \equiv$$

$$\equiv 1 + \sum_{k=3}^{32} (-3(3k+1) + 2(3k+2) + 1(3k+3)) = 1 + 30 \cdot 4 \equiv 2 \pmod 7.$$

Proto dle již uvedeného máme $R(109) \equiv R(99) + 5 \equiv 2 + 5 \equiv 0 \pmod 7$, a proto číslo $R(109)$ je dělitelné číslem 7 (neboť dává při dělení sedmi zbytek 0).

2. úloha
Uvažujme posloupnost čísel 73, 703, 7003, 70003, 700003, ..., tj. čísla tvaru $7 \cdot 10^n + 3$. Dokažte, že tato posloupnost obsahuje nekonečně mnoho čísel složených.

Experimentováním snadno přijdeš na to, že $703 = 19 \cdot 37$, $700003 = 37 \cdot 18919$, $700000003 = 37 \cdot 18918919$, atd. To by mohlo naznačovat, že číslo 37 dělí $(3 \cdot n - 1)$-tý člen naší posloupnosti, tj. číslo $7 \cdot 10^{3n-1} + 3$. Pokud toto nyní dokážeme, ukážeme tím zřejmě, že naše posloupnost obsahuje nekonečně mnoho čísel složených. Stačí tedy ukázat, že $37 | 7 \cdot 10^{3n-1} + 3$, to skutečně platí a důkaz provedeme matematickou indukcí: Pro $n = 1$ je tvrzení výše ukázáno $(37|703)$. Předpokládejme tedy, že naše tvrzení platí pro $n = k$, tj. $37 | 7 \cdot 10^{3k-1} + 3$, to znamená $7 \cdot 10^{3k-1} \equiv -3 \pmod{37}$. Když tuto kongruenci vynásobíme zřejmě platící kongruencí $10^3 \equiv 1 \pmod{37}$, dostaneme

$$7 \cdot 10^{3k+2} = 10^3 \cdot 7 \cdot 10^{3k-1} \equiv -3 \pmod{37},$$

proto vidíme, že $37 | 7 \cdot 10^{3k+2} + 3$, což znamená, že naše tvrzení platí i pro $n = k + 1$ a tím je hotov druhý indukční krok. A tím jsme dokázali, co bylo třeba.

3. úloha
Platí vztahy

$$3^2 + 4^2 = 5^2, \qquad 3^3 + 4^3 + 5^3 = 6^3.$$

(a) Výše uvedené vztahy by nám mohly napovídat, že platí vzoreček: $3^n + 4^n + \ldots (n+1)^n + (n+2)^n = (n+3)^n$. Skutečně pro $n = 2$, $n = 3$ dostaneme vztahy výše uvedené, které (jak si snadno přepočítáš) jsou správné. Pro $n = 4$ však už vzoreček neplatí. Přesvědčte se o tom.

(b) Vzoreček uvedený v (a) neplatí dokonce kromě $n = 2$ a $n = 3$ pro žadné další n. Dokonce je vždy pravá strana větší než levá. Dokažte.

(c) Vzoreček uvedený v části (a) neplatil. Zkuste však na základě vztahů $3^2 + 4^2 = 5^2$, $\;3^3 + 4^3 + 5^3 = 6^3$ vymyslet nějaký lepší vzoreček, lepší jejich zobecnění, který už bude fungovat.[5]

(a) Kromě otrockého naťukání na kalkulačce lze toto ukázat i jednoduchou úvahou. Na levé straně našeho vztahu pro $n = 4$ máme součet dvou sudých a dvou lichých čísel, což je číslo sudé, napravo pak máme číslo liché, proto vidíme, že $3^4 + 4^4 + 5^4 + 6^4 \neq 7^4$.

(b) Chceme tedy ukázat, že pro $n \geq 4$ platí vzoreček $3^n+4^n+\ldots (n+1)^n+(n+2)^n < (n+3)^n$. Nejprve ověříme přímým dosazením tento vztah pro $n = 4, 5, 6$:

$$n = 4: \qquad 3^4 + 4^4 + 5^4 + 6^4 = 2258 < 2401 = 7^4$$

$$n = 5: \qquad 3^5 + 4^5 + 5^5 + 6^5 + 7^5 = 28975 < 32768 = 8^5$$

$$n = 6: \qquad 3^6 + 4^6 + 5^6 + 6^6 + 7^6 + 8^6 = 446899 < 531441 = 9^6$$

Nyní si ještě před samotným řešením naší úlohy dokážeme jedno pomocné lemma:

Lemma. *Pro každé přirozené číslo $n \geq 7$ platí vztah $(\frac{n+3}{n+2})^n > 2$.*

Důkaz: Snadno nahlédneme, že pro $n \geq 7$ platí vztah $n^2 > 5n + 8$ (neboť pro $n = 7$ je tato nerovnost splněna a pravá strana roste s rostoucím n rychleji než levá). Odečteme-li od obou stran této nerovnosti číslo n a vydělíme-li výsledek výrazem $2(n+2)^2$, dostaneme nerovnost $\frac{n(n-1)}{2(n+2)^2} > \frac{2}{n+2}$. Pokud k oběma stranám této nerovnosti přičteme výraz $1 + \frac{n}{n+2}$, dostaneme po drobné úpravě nerovnost:

$$1 + \binom{n}{1} \cdot \frac{1}{n+2} + \binom{n}{2} \cdot \frac{1}{(n+2)^2} > 1 + \frac{n+2}{n+2} = 2,$$

odtud a z binomické věty máme:

$$\left(\frac{n+3}{n+2}\right)^n = \left(1 + \frac{1}{n+2}\right)^n > 1 + \binom{n}{1} \cdot \frac{1}{n+2} + \binom{n}{2} \cdot \frac{1}{(n+2)^2} > 2,$$

[5] Bod (c) této úlohy je zadaný trochu nestandardně. Pokud zde objevíš nějaké pěkné tvrzení, budeme rádi, když nám ho pošleš, a samozřejmě ho nějak oceníme. V každém případě však na tomto místě podotýkáme, že pokud úlohu 3 vyřešíš správně až na tuto část (c), obdržíš plný počet bodů.

což jsme chtěli dokázat.

Nyní se vrátíme k našemu příkladu. Asi nejpřirozenější způsob řešení je matematickou indukcí. Pro $n = 4, 5, 6$ jsme již platnost dokazovaného vzorečku ověřili. Předpokládejme proto, že naše tvrzení platí pro $n = k$ a dokážeme jeho platnost i pro $n = k + 1$. Dle předpokladu tedy máme $3^k + 4^k + \cdots + (k+1)^k + (k+2)^k < (k+3)^k$. K této nerovnosti přičteme $(k+3)^k$ a získanou nerovnost přenásobíme výrazem $(k + 3)$. Po těchto drobných úpravách obdržíme vztah $(k+3)\cdot 3^k + (k+3)\cdot 4^k + \cdots + (k+3)^{k+1} < 2\cdot(k+3)^{k+1}$. Z poslední nerovnosti pak už snadno nahlédneme, že

$$\begin{aligned} 3^{k+1} + 4^{k+1} + \cdots + (k+3)^{k+1} &< (k+3)\cdot 3^k + (k+3)\cdot 4^k + \cdots + (k+3)^{k+1} \\ &< 2\cdot(k+3)^{k+1} < (k+4)^{k+1}, \end{aligned}$$

kde poslední nerovnost plyne pro $n = k + 1$ z našeho dříve dokázaného *lemmatu*. Tím jsme ukázali, že naše tvrzení platí i pro $n = k + 1$ a tím je důkaz matematickou indukcí hotov.

(c) Na nějaké „přímé zobecnění“ obou vzorečků nikdo nepřišel. Každopádně několik zajímavých identit se mezi řešeními našlo. Nejčastěji nabízený vztah byla (poměrně známá) rovnost: $1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + \cdots + n^3 = (1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + n)^2$, kterou si můžeš snadno dokázat například matematickou indukcí. *Pavel Podbrdský* též uvádí i jiný zajímavý vztah. Například přímým přepočítáním snadno nahlédneš, že platí:

$$\begin{aligned} 3^2 + 4^2 &= 5^2 \\ 10^2 + 11^2 + 12^2 &= 13^2 + 14^2 \\ 21^2 + 22^2 + 23^2 + 24^2 &= 25^2 + 26^2 + 27^2 \\ 36^2 + 37^2 + 38^2 + 39^2 + 40^2 &= 41^2 + 42^2 + 43^2 + 44^2 \end{aligned}$$

Dostáváme zajímavou tabulku. Pokud ještě nevidíš zákonitost v tvorbě těchto členů, ukážu ji podrobněji na dalším, pátém řádku: vezmeš číslo řádku, vynásobíš číslem o jednu větším a pak číslem 2, pro pátý řádek dostaneš takto číslo 60. Od tohoto čísla napíšeš pět (=číslo řádku) druhých mocnin po sobě jdoucích čísel vlevo, pět vpravo a hned za číslo 60 dáš rovnítko, výsledkeme je $55^2 + 56^2 + 57^2 + 58^2 + 59^2 + 60^2 = 61^2 + 62^2 + 63^2 + 64^2 + 65^2$. Nyní[6] již pro pozorného čtenáře nebude problém zformulovat obecně tuto zákonitost a jednoduchou úpravou ověřit, že tento vztah skutečně platí.

4. úloha

Pro která přirozená čísla n je číslo $3^{n!} - 2^{n!}$ dělitelné číslem n ?

Pro přirozené číslo n značíme symbolem $\varphi(n)$ počet přirozených čísel menších než n a s ním nesoudělných[7]. Klíčem k řešení naší úlohy je všimnout si, že pro libovolné přirozené n

[6] Jestli jsi to dobře pochopil si můžeš ověřit na šestém řádku, kde vyjde $78^2 + 79^2 + 80^2 + 81^2 + 82^2 + 83^2 + 84^2 = 85^2 + 86^2 + 87^2 + 88^2 + 89^2 + 90^2$.

[7] Funkce φ, která každému n přiřazuje $\varphi(n)$, je Eulerova funkce, se kterou ses mohl setkat například v první části našeho seriálu.

platí $\varphi(n)|n!$. To však není těžké, stačí si uvědomit, že pro přirozené číslo n s prvočíselným rozkladem $n = p_1^{q_1} \cdot p_2^{q_2} \cdot \ldots \cdot p_n^{q_n}$ je $\varphi(n)$ dáno předpisem
$\varphi(n) = (p_1^{q_1-1} \cdot p_2^{q_2-1} \cdot \ldots \cdot p_n^{q_n-1}) \cdot (p_1 - 1) \cdot (p_2 - 1) \cdot \ldots \cdot (p_n - 1)$. V tomto vztahu však výraz v první závorce dělí číslo n a součin zbývajících členů $(p_1 - 1) \cdot (p_2 - 1) \cdot \ldots \cdot (p_n - 1)$ zase dělí číslo $(n-1)!$, proto dohromady máme $\varphi(n)|(n-1)! \cdot n = n!$.

Je-li nyní číslo n nedělitelné číslem 2, máme z Eulerovy věty (viz. seriál *lemma 2(a)*): $n|2^{\varphi(n)} - 1|2^{n!} - 1$, tj. $n|2^{n!} - 1$. Anologicky pro číslo n nedělitelné číslem 3 plyne z Eulerovy věty $n|3^{n!} - 1$.

Pomocí předcházejích úvah nyní budeme řešit samotnou naši úlohu. Rozlišíme tři případy (podotýkám zde, že první dva se nevylučují):

(a) Nechť n je dělitelné číslem 2, pak $n = 2k$ pro nějaké k přirozené. Kdyby $n|3^{n!} - 2^{n!}$, pak by existovalo přirozené c, že $2kc = 3^{n!} - 2^{n!}$, to však není možné, neboť pravá strana je lichá a levá sudá.

(b) Pokud je n dělitelné číslem 3, pak stejně jako v části (a) obdržíme spor. (Podrobnosti přenecháváme čtenáři.)

(c) Pokud číslo n není dělitelné ani číslem 2, ani číslem 3, pak využitím výsledků získaných výše z Eulerovy věty máme $n|2^{n!} - 1$ a $n|3^{n!} - 1$. Odtud odečtením vidíme, že platí $n|3^{n!} - 2^{n!}$.

Závěr: Číslo $3^{n!} - 2^{n!}$ je dělitelné číslem n pro taková čísla n, která nejsou dělitelná čísly 2 a 3, tj. pro čísla n tvaru $6k + 1$ a $6k + 5$, kde k je přirozené číslo.

5. úloha

(a) Pro která přirozená čísla n má rovnice $x^n + y^n = z^{n+1}$ řešení v přirozených číslech x, y, z ? Pro která čísla n má tato rovnice dokonce nekonečně mnoho řešení ?

(b) Jak bude znít odpověď[8] na otázky z části (a) pro rovnice:
$x^{n+1} + y^{n+1} = z^n, \quad x^{n+1} + y^n = z^n, \quad x^n + y^n = z^n$?

(c) Jak se změní odpověď na otázky v (a), (b), pokud se budeme zajímat jen o nesoudělná řešení, tj. zajímají nás přirozená čísla x, y, z, která řeší příslušnou rovnici a platí navíc $(x, y) = 1$, $(x, z) = 1$ a $(y, z) = 1$?

Tato úloha byla zadána trochu netradičně. Obsahovala totiž (v části (c)) tvrzení, na která nám nebyly známy odpovědi. Ani našim řešitelům se nepodařilo všechny problémy rozlousknout, a tak následující řešení zákonitě nemůže obsahovat vše.
(a) Po kratičkém experimentování snadno přijdeš na to, že pro každé přirozené číslo n má naše diofantická rovnice řešení $x = 2, y = 2, z = 2$, neboť $2^n + 2^n = 2^{n+1}$. Naše rovnice má dokonce pro každé přirozené číslo n nekonečně mnoho řešení, jak se dá nahlédnout z identity[9]

[8]V částech (b) a (c) je těch otázek možná trochu moc. Na některé z nich existuje jednoduchá odpověď, na některé nám ani třeba odpověď není známa. Čím více se Ti toho podaří vyřešit, tím lépe a tím více bodů můžeš získat.

[9]Tuto identitu není těžké objevit. Můžeš na ní přijít například mírným zobecňováním těch řešení této rovnice, na která zkusmo přijdeš. Případně nalezneš ještě obecnější rovnost $[l(l^n + k^n)]^n + [k(l^n + k^n)]^n = [l^n + k^n]^{n+1}$.

$(1+k^n)^n + [k(1+k^n)]^n = (1+k^n)^{n+1}$, kterou snadno ověříš úpravou výrazu vlevo. Z uvedené rovnosti je vidět, že řešením naší rovnice jsou $x = 1 + k^n, y = k(1 + k^n), z = 1 + k^n$, kde k je přirozené číslo.
(b) Podobně jako v části (a) můžeme nahlédnout, že rovnice $x^{n+1} + y^{n+1} = z^n$ má nekonečně mnoho řešení pro libovolné přirozené n z rovnosti
$[(1 + k^{n+1})^{n-1}]^{n+1} + [k(1 + k^{n+1})^{n-1}]^{n+1} = [(1 + k^{n+1})^n]^n$, která platí pro k přirozené. Nekonečně mnoho řešení však můžeme dostat i v mnohem jednodušší formě, například ve tvaru $x = y = 2^{n-1}, z = 2^n$. Na takovéto řešení není problém přijít, stačí vlastně hledat vhodné mocniny dvojky, které vyhovují naší rovnici.

Rovnici $x^{n+1} + y^n = z^n$ si můžeme zjevně přepsat na tvar $z^n - y^n = x^{n+1}$, který se nápadně podobá rovnici v části (1), a proto můžeme postupovat celkem obdobně. Nakonec dostáváme, že tato rovnice má nekonečně mnoho řešení pro libovolné přirozené n ve tvaru $x = k^n - 1, y = k^n - 1, z = k(k^n - 1)$. (Opět by samozřejmě šlo využít i obecnější rovnost $[l^n - k^n]^{n+1} + [k(l^n - k^n)]^n = [l(l^n - k^n)]^n$.)

A tady v jádru končí elementární úvahy v této úloze. Poslední rovnice v části (b) je rovnice ze známé Velké Fermatovy věty (viz. text k seriálu). Do zadání jsme ji dali jen pro úplnost (ostatní rovnice jí byly víceméně motivované) a taky nás zajímalo, jestli některý z našich řešitelů na nějaký ten její elementární důkaz nepřijde. Nestalo se tak, proto zde jen konstatujme jako fakt, že tato rovnice pro $n \geq 3$ nemá řešení.[10]

Jediný, kdo se zde o něco pokusil byl Pavel Podbrdský, který si dal práci s tím, že asi na 10 stránkách ukázal (až na jeden nedokázaný fakt), že tato rovnice pro $n = 3$ nemá řešení. (Dokázal dokonce, že nemá řešení v okruhu třetí odmocniny z jedné). Jeho řešení bylo sice rozhodně nejdelší v tomto ročníku semináře, ale (nechci se chlubit) historický rekord nejdelšího řešení v dějinách semináře ani zdaleka neohrozilo `;-)`.
(c) Co se týče nesoudělných řešení, až na triviální případ $n = 1$ nikdo skoro nic nezjistil, pouze Martin Hriňák a Pavel Podbrdský našli u druhé rovnice v (b) pro n=2 nekonečně mnoho řešení. Vzhledem k tomu, že to není moc obecný výsledek, nebudeme ho zde uvádět. (Samozřejmě je však za to chválíme.)

Poznámky opravovatele: Víceméně většina řešitelů přišla na to, že první 3 rovnice mají pro každé n nekonečně mnoho řešení. V příkladu (a), resp. (b2), stačí totiž vzít čísla splňující k^n + *(resp.−)* $l^n = m$ a vynásobit rovnici číslem $a^{n(n+1)}$. V příkladu (b1) lze za x, y, z brát např. vhodné mocniny dvojky. Zbývající část poznámek opravovatele je zahrnuta v autorském řešení.

[10]Velká Fermatova věta je tvrzení, že pro $n \geq 3$ nemá rovnice $x^n + y^n = z^n$ řešení v přirozených číslech. Je to tvrzení s „pohnutou“ historií, a ve většině učebnic teorie čísel o ní najdeš zmínku, v poslední době dokonce vyšla i knížka speciálně věnovaná jí a jejímu vlivu na rozvoj matematiky.