8. série

Téma: To nejlepší na konec

Termín odeslání: 18. KVĚTNA 1998

1. ÚLOHA (ekologická)
V parku roste 10000 stromů (stromy považujte za body), které jsou uspořádány v mřížce 100×100. Kolik z nich můžeme maximálně porazit, aby platilo, že když se posadím na libovolný pařez, žádný jiný ze svého místa neuvidím?

2. ÚLOHA (dopravní)
V Kocourkově se na každé křižovatce stýkají čtyři ulice. Radní města se rozhodli,[1] že z každé ulice udělají jednosměrku, a to tak, aby na každé křižovatce vedly dvě ulice dovnitř a dvě ven a navíc aby nešlo křižovatku projet v přímém směru (označíme-li ulice po směru hodinových ručiček A, B, C, D, pak A a C vedou dovnitř, B a D ven, případně naopak). Vaším úkolem je poradit radním, zda jejich rozhodnutí je proveditelné, a přesvědčit nás, že jste jim poradili správně.

3. ÚLOHA (černobílá)
Polovina políček čtverce 4×4 je obarvena černě a druhá polovina bíle. Hráči A a B se střídají v tazích, začíná hráč B. Hráč A musí v každém tahu změnit barvu jednobarevného sloupce nebo řádku na opačnou, hráč B musí změnit barvu jednobarevného čtverce 2×2 na opačnou. Prohrává hráč, který nemůže táhnout (neexistuje jednobarevný čtverec 2×2 resp. řádek ani sloupec). Partii vyhrál hráč B. Kolik tahů trvala?

4. ÚLOHA (cizojazyčná)
Пусть $P(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0$. Надо доказать, что следующее неровенство справедливо:

$$\max_{x \in \langle -1,1 \rangle} |P(x)| \geq \frac{1}{2^{n-1}}.$$

Pro neznalce ruštiny ještě jednou: Nechť P je polynom stupně n s koeficientem rovným 1 u nejvyšší mocniny. Pak

$$\max_{x \in \langle -1,1 \rangle} |P(x)| \geq \frac{1}{2^{n-1}}.$$

Dokažte.

---

[1] poradci pro bezpečnost silničního provozu je přesvědčili, že je to pro chodce bezpečnější

5. ÚLOHA (estetická)
Jazyk teorie: konstanta ∞, operace $\bowtie$.
Axiomy:

(1) $a \bowtie (b \bowtie c) = (a \bowtie b) \bowtie c$
(2) $a \bowtie \infty = \infty \bowtie a = a$
(3) $(\forall a)\ (\exists b)\ a \bowtie b = b \bowtie a = \infty$
(4) $(\exists a \neq \infty)\ (\exists b \neq \infty)\ a \neq b$

Zjistěte, zda v této teorii platí

(a) $(\exists a \neq \infty)\ a \bowtie a = \infty$
(b) $(\forall a)\ a \bowtie a = \infty$
(c) existuje $n \in \mathbb{N}\ (\exists a)\ (\forall b)\ a = b \bowtie \ldots \bowtie b$ *(n-krát)*
(d) existuje $n \in \mathbb{N}\ (\forall a)\ (\exists b)\ a = b \bowtie \ldots \bowtie b$ *(n-krát)*
(e) $(\forall a)\ a \bowtie a = a$

6. ÚLOHA (fyzikální)
Albert Einstein měl ve svém domě v Princetonu krychlovou místnost, jejíž stěny byly tvořeny čtyřmi velikými zrcadly. Jednoho dne vyslal z náhodně zvoleného bodu uvnitř místnosti foton (chápej jako paprsek světla) celkem nahodilým směrem v rovině rovnoběžné s podlahou. Když ten foton dopadl na stěnu, poslušně se odrazil podle příslušného fyzikálního zákona, když se trefil náhodou do rohu, vrátil se, odkud přišel. To Alberta velice zaujalo, i začal si červeným fixem zaznamenávat na stěnách jednotlivá místa dopadu fotonu. Po několika experimentech zjistil zajímavou věc, že po dostatečně dlouhé době se buď červený puntík objevil libovolně blízko libovolného bodu ležícího v rovině letu fotonu na nějaké stěně, nebo byla dráha fotonu periodická, tj. dopadal periodicky na stále tatáž místa. Při podrobnějším zkoumání naměřených dat přišel na to, že se uvedená dráha zacyklí, pokud je $\operatorname{tg} \alpha$ racionální, kde α je úhel dopadu fotonu na první stěnu, která mu stála v cestě. Pro iracionální hodnotu $\operatorname{tg} \alpha$ nastává druhý pozorovaný jev. Alberta uspokojilo pár měření, nám to však nestačí, my chceme matematický důkaz uvedeného fenoménu. Svedete to?
Chyby měření neuvažujte.

Řešení 8. série

1. úloha
V parku roste 10000 stromů (stromy považujte za body), které jsou uspořádány v mřížce 100×100. Kolik z nich můžeme maximálně porazit, aby platilo, že když se posadím na libovolný pařez, žádný jiný ze svého místa neuvidím?

Maximálně můžeme porazit 2500 stromů. Pokud si totiž rozdělíme les na čtverečky o 4 stromech (bude jich 50×50), je zřejmé, že v každém čtverečku může být při splnění podmínky o viditelnosti nejvýše jeden pařez. Tedy více než 2500 pařezů být nemůže.

Ještě ukážeme, že tohoto čísla lze opravdu dosáhnout. Les si umístíme do soustavy souřadnic. Každý strom bude mít celočíselné souřadnice, strom v levém dolním rohu (0,0), v pravém horním (99,99). Pokácíme právě ty stromy, které mají obě souřadnice sudé — těch je 2500. Takto pročištěný les splňuje podmínku o viditelnosti. Mějme libovolné dva pařezy o souřadnicích (a, b) a (c, d), pak střed úsečky je spojující má souřadnice $(\frac{a+c}{2}, \frac{b+d}{2})$ a ty jsou celočíselné, tedy na tomto místě něco je — buď strom nebo pařez. Předpokládejme, že na úsečce spojující naše dva pařezy není žádný strom, jen pařezy. Potom vezmeme dva sousední a podle předchozí úvahy zjistíme, že sousední nejsou — takže máme spor a dokázali jsme, že náš pročištěný les splňuje podmínku o viditelnosti.

Poznámky opravovatele: Když dokazuji, že maximální hodnota nějaké proměnné p (počet stromů při pokácení splňujícím podmínku o viditelnosti) je rovna číslu c (zde 2500) pak musím dokázat dvě věci:

(1) že p nikdy (tj. pro jakýkoli způsob kácení splňující podmínky zadání) nepřekročí c

(2) že hodnoty c se skutečně nabývá (tj. existuje jedno konkrétní kácení pro které $p = c$)

S druhou částí nebyly většinou problémy, ale první část hodně řešitelů opomenulo nebo ukazovalo, že pro nějaké malé úpravy jejich konkrétního pokácení už nebude splněna podmínka o viditelnosti. To ale nestačí, opravdu je třeba udělat odhad pro libovolný způsob kácení.

2. úloha
V Kocourkově se na každé křižovatce stýkají čtyři ulice. Radní města se rozhodli,[2] že z každé ulice udělají jednosměrku, a to tak, aby na každé křižovatce vedly dvě ulice dovnitř a dvě ven a navíc aby nešlo křižovatku projet v přímém směru (označíme-li ulice po směru hodinových ručiček A, B, C, D, pak A a C vedou dovnitř, B a D ven, případně naopak). Vaším úkolem je poradit radním, zda jejich rozhodnutí je proveditelné, a přesvědčit nás, že jste jim poradili správně.

Nejprve přeformulujeme zadání do řeči teorie grafů: město bude rovinný graf (přesněji rovinné nakreslení rovinného grafu), křižovatky budou jeho vrcholy, (všechny stupně čtyři),

[2] poradci pro bezpečnost silničního provozu je přesvědčili, že je to pro chodce bezpečnější

ulice jeho hrany. Podle 4. úlohy z 3. série je možné obarvit stěny tohoto nakreslení tohoto grafu dvěma barvami (řekněme černou a bílou) tak, že stěny se společnou hranou mají různou barvu. Orientujme nyní hrany tak, aby černá stěna šla objet po směru hodinových ručiček, bílá proti jejich směru (s výjimkou vnější stěny, u té to bude přesně naopak). Každou hranu orientujeme dvakrát (za každou ze stěn k ní přiléhající jednou), pokaždé však stejným směrem (jinak by ty dvě stěny, které s touto hranou sousedí, měly stejnou barvu). Snadno si také rozmyslíte, že směr ulic na křižovatkách je přesně takový, jaký radní chtěli. Takže rozhodnutí radních je vždy proveditelné.

Poznámky opravovatele: Většina správných řešení postupovala podobně jako autorské řešení, někteří však nevyužili úlohu ze 3. série, a tak si řešení zkomplikovali.

Poměrně mnoho řešitelů si špatně vyložilo zadání. Několik řešitelů předpokládalo, že město musí vypadat fádním „americkým“ způsobem: obsahuje několik severojižních ulic a několik západovýchodních, přičemž se protínají jen severojižní ulice se západovýchodními. V zadání se však psalo jen to, že na každé křižovatce se stýkají čtyři silnice a taková města mohou být komplikovanější, než výše popsaná.

Dále několik řešitelů (podmnožina těch, kteří předpokládali „americká města“) ověřovalo, že po žádané orientaci ulic bude město průjezdné. To však nikdo nechtěl, radní chtěli jen rozmístit jednosměrky tak, aby křižovatky vypadaly předepsaným způsobem a neříkali nic o tom, že město má být průjezdné.

Někteří řešitelé si také pohrávali s myšlenkou, že město může být nerovinný graf. K tom bych řekl jen tolik, že mimoúrovňové křížení dvou silnic jsem už viděl, ale dvou ulic ještě ne.

3. úloha

Polovina políček čtverce 4×4 je obarvena černě a druhá polovina bíle. Hráči A a B se střídají v tazích, začíná hráč B. Hráč A musí v každém tahu změnit barvu jednobarevného sloupce nebo řádku na opačnou, hráč B musí změnit barvu jednobarevného čtverce 2×2 na opačnou. Prohrává hráč, který nemůže táhnout (neexistuje jednobarevný čtverec 2×2 resp. řádek ani sloupec). Partii vyhrál hráč B. Kolik tahů trvala?

Na začátku je poměr černých a bílých políček 8:8. Po tahu B bude tento poměr 12:4, po tahu A 8:8 či 12:0, po tahu B opět 12:4, atd. Takže i po vyhrávajícím tahu B je tento poměr 12:4, neboli búno (=bez újmy na obecnosti) čtyři políčka jsou černá, dvanáct bílých.

V závěrečné pozici nemá A tah, proto musí v každém řápci[3] být jedno černé políčko. Ve čtverci jsou jen čtyři černá políčka, tedy bude v každém řápci jedno černé a tři bílá políčka.

Posledním svým tahem změnil B v každém řápci žádné či dvě černá políčka na bílá. Před tímto tahem byla tedy v každém řápci právě jedno nebo právě tři černá políčka, takže žádný řápec není jednobarevný, a tedy tato pozice nemohla vzniknout tahem A. Tudíž tah hráče B byl první a zároveň poslední v partii.

Poznámky opravovatele: Většina řešitelů řešila správně. Několik řešilo rozborem případů, což nebylo nejlepší, protože jednak neuvažovali všechny startovní pozice jednak neuvažovali všechny možné tahy.

[3] Toto divné slovo budu používat jako souhrnné označení pro řádek a sloupec.

4. úloha

Пусть $P(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0$. Надо доказать, что следующее неровенство справедливо:

$$\max_{x\in\langle -1,1\rangle} |P(x)| \geq \frac{1}{2^{n-1}}.$$

Pro neznalce ruštiny ještě jednou: Nechť P je polynom stupně n s koeficientem rovným 1 u nejvyšší mocniny. Pak

$$\max_{x\in\langle -1,1\rangle} |P(x)| \geq \frac{1}{2^{n-1}}.$$

Dokažte.

Uvažujme funkce T_n definované v intervalu $\langle -1, 1\rangle$ předpisem $T_n(x) = \cos(n \cdot \arccos(x))$. Tyto funkce mají význam například v numerické matematice a nazývají se *Čebyševovy polynomy*. Jako domácí cvičení si můžeš zkusit dokázat, že pro každé $n = 0, 1, 2, 3, \dots$ je T_n polynomem stupně n s koeficientem u x^n rovným číslu 2^{n-1}. Pokud si označíme $Q_n = \frac{1}{2^{n-1}} T_n$, je Q_n polynom stupně n, který má u nejvyšší mocniny koeficient rovný jedné. Z definice Čebyševových polynomů snadno plyne,[4] že $|T_n| \leq 1$ (neboť funkce cos má tuto vlastnost) a proto pro polynom Q_n platí $|Q_n| \leq \frac{1}{2^{n-1}}$.

Nyní přistoupíme k řešení naší úlohy. Budeme ji dokazovat sporem. Nechť tedy platí pro každý bod z intervalu $\langle -1, 1\rangle$, že $|P(x)| < \frac{1}{2^{n-1}}$. Pak uvažujme polynom $R_n = P - Q_n$. Tento polynom má stupeň $(n-1)$, neboť oba dva polynomy P i Q_n měly koeficient u x^n roven jedné. Z definice Čebyševova polynomu T_n (a následně i Q_n) vidíme, že polynom Q_n nabývá v bodech $x_k = \cos(\frac{k\pi}{n})$, $\quad k = 0, 1, 2, \dots, n$, hodnoty $Q_n(x_k) = (-1)^k \frac{1}{2^{n-1}}$. Vzhledem k tomu, že polynom P je dle předpokladu v absolutní hodnotě omezen ostře číslem $\frac{1}{2^{n-1}}$, mění polynom R_n v intervalu $\langle -1, 1\rangle$ celkem nejméně $(n+1)$-krát znaménko. To však znamená, že má v tomto intervalu nejméně n kořenů. To je však hledaný spor, neboť dostáváme, že nenulový polynom R_n stupně $(n-1)$ má n různých kořenů, což odporuje tzv. základní větě algebry, která tvrdí, že nenulový polynom stupně k má nejvýše k různých kořenů.

Poznámky opravovatele: Největší potíže činilo asi zadání, které řešitelé pochopili vesměs nesprávně. Pouze jeden řešitel z pěti skutečně dokázal, co měl. Dva řešitelé se dokonce snažili dokazovanou nerovnost vyvrátit. Za úplné řešení jsem udělila 5 bodů, ostatní nedostali nic.

5. úloha

Jazyk teorie: konstanta ∞, operace $\bowtie$.
Axiomy:

(1) $a \bowtie (b \bowtie c) = (a \bowtie b) \bowtie c$
(2) $a \bowtie \infty = \infty \bowtie a = a$
(3) $(\forall a)\ (\exists b)\ a \bowtie b = b \bowtie a = \infty$
(4) $(\exists a \neq \infty)\ (\exists b \neq \infty)\ a \neq b$

Zjistěte, zda v této teorii platí

(a) $(\exists a \neq \infty)\ a \bowtie a = \infty$
(b) $(\forall a)\ a \bowtie a = \infty$
(c) existuje $n \in \mathbb{N}$ $(\exists a)\ (\forall b)\ a = b \bowtie \dots \bowtie b$ *(n-krát)*
(d) existuje $n \in \mathbb{N}$ $(\forall a)\ (\exists b)\ a = b \bowtie \dots \bowtie b$ *(n-krát)*
(e) $(\forall a)\ a \bowtie a = a$

Definujme tři struktury, které nám budou sloužit jako (proti)příklady.

[4] Symbol $|T_n| \leq 1$ znamená, že pro libovolné $x \in \langle -1, 1\rangle$ je $|T_n(x)| \leq 1$.

Označme $\mathbb{Z}_3$ model s nosičem $M = \{0, 1, 2\}$, $a \bowtie b = a + b \mod 3$, $\infty = 0$. Ověřme platnost axiomů:

(1) asociativita platí zřejmě (sčítání je asociativní)
(2) 0 je konstanta: $0 + x \mod 3 = x + 0 \mod 3 = x$ pro libovolné $x \in M$
(3) inverzní prvek:[5] $0 \bowtie 0 = \infty$, $1 \bowtie 2 = \infty$, $2 \bowtie 1 = \infty$
(4) model má alespoň 3 prvky

Označme $\mathbb{Z}_2^2$ model s nosičem $M = \{(a, b) : a, b \in \{0, 1\}\}$, $(a, b) \bowtie (c, d) = (a + c \mod 2, b + d \mod 2)$, $\infty = (0, 0)$.

Jde o množinu dvojic prvků ze $\mathbb{Z}_2$ (sčítání na $\mathbb{Z}$ modulo 2), kde sčítání je definováno po složkách (podobně jako když pracujete v analytické geometrii s vektory).[6] Ověřme platnost axiomů:

(1) asociativita platí zřejmě (sčítání je asociativní)
(2) $(0, 0)$ je konstanta: $(0, 0) \bowtie (x, y) = (x \mod 2, y \mod 2) = (x, y)$ pro libovolé $x, y \in \{0, 1\}$
(3) inverzní prvek: $(0, 0) \bowtie (0, 0) = \infty$, $(0, 1) \bowtie (1, 0) = \infty$, $(1, 1) \bowtie (1, 1) = \infty$
(4) model má alespoň 3 prvky

Označme $\mathbb{Z}$ model s nosičem celých čísel, operací sčítání a $\infty = 0$. Axiomy jsou splněny triviálně.

(a) Tvrzení je nerozhodnutelné.

V modelu $\mathbb{Z}_2^2$ tvrzení platí, neboť např. pro $a = (0, 1)$ platí $a \bowtie a = \infty$.

V modelu $\mathbb{Z}_3$ tvrzení neplatí, neboť $1 \bowtie 1 = 2$, $2 \bowtie 2 = 1$ a jiné prvky různé od ∞ již neexistují.

(b) Tvrzení je nerozhodnutelné.

V modelu $\mathbb{Z}_2^2$ platí i toto tvrzení. Pro $a \in \{(1, 0), (0, 1), (1, 1)\}$ platí $a \bowtie a = \infty$ (neboť $1 + 1 \mod 2 = 0$), a tím vyčerpáme všechny prvky $\mathbb{Z}_2^2$ různé od ∞.

V modelu $\mathbb{Z}_3$ tvrzení platit nemůže tím spíše, že neplatí ani (a).

(c) Tvrzení je nerozhodnutelné.

V modelu $\mathbb{Z}_3$ tvrzení platí. Zvolme např. $n = 3$ a $a = 0$. Pak $0 + 0 + 0 \equiv 1 + 1 + 1 \equiv 2 + 2 + 2 \equiv 0 \pmod 3$.

V modelu $\mathbb{Z}$ tvrzení neplatí. Dokazujme negaci tvrzení, tj. $\forall n \in \mathbb{N}\ \forall a \in \mathbb{Z}\ \exists b \in \mathbb{Z}\ a \neq n \cdot b$. Tedy hledáme b celé tak, aby $b \neq \frac{a}{n}$. To lze triviálně.

---

[5] Inverzním prvkem k x rozumíme takové číslo y, že $x.y = y.x = 1$, kde . je příslušná operace a 1 je příslušný jednotkový prvek.

[6] Petr Zima přišel na zajímavou interpretaci toho modelu – skládání souměrností v prostoru. Prvek $(0, 0)$ odpovídá identitě, ostatní pak postupně osovým souměrnostem podle osy x, y a z. Operace je skládání zobrazení, které je, jak známo, asociativní. Když složíme dvě stejné osové souměrnosti, dostaneme identické zobrazení. Namalujte si tabulku.

(d) Tvrzení platí.

Nechť $n = 1$. Pak pro každé a volíme $b = a$.

(e) Tvrzení neplatí.

Nechť $a \bowtie a = a$. Pak také $(a \bowtie a) \bowtie b = a \bowtie b$ pro libovolné b (axiom rovnosti). Podle axiomu (3) můžeme volit b takové, že $a \bowtie b = \infty$ (†). Použitím axiomu (1) dostáváme $a \bowtie (a \bowtie b) = a \bowtie b$, a tak podle (†) musí být nutně $a = a \bowtie \infty = \infty$. Protože podle axiomu (4) existuje prvek různý od ∞, máme spor s požadavkem, aby $a \bowtie a = a$ platilo pro všechna a.

Poznámky opravovatele: K úloze není příliš co dodat, snad jen, že slovo „zřejmě“ až podezřele často znamenalo „neplatí“ či „nechce se mi dělat“. Tolik ke strhávání bodů. Potěšilo mě pár originálních nápadů, zejména ten Petra Zimy uvedený v řešení, či Petera Novotného ($\mathbb{Z}_2^2$ interpretoval pomocí množin a jejich symetrického rozdílu).

6. úloha

Albert Einstein měl ve svém domě v Princetonu krychlovou místnost, jejíž stěny byly tvořeny čtyřmi velikými zrcadly. Jednoho dne vyslal z náhodně zvoleného bodu uvnitř místnosti foton (chápej jako paprsek světla) celkem nahodilým směrem v rovině rovnoběžné s podlahou. Když ten foton dopadl na stěnu, poslušně se odrazil podle příslušného fyzikálního zákona, když se trefil náhodou do rohu, vrátil se, odkud přišel. To Alberta velice zaujalo, i začal si červeným fixem zaznamenávat na stěnách jednotlivá místa dopadu fotonu. Po několika experimentech zjistil zajímavou věc, že po dostatečně dlouhé době se buď červený puntík objevil libovolně blízko libovolného bodu ležícího v rovině letu fotonu na nějaké stěně, nebo byla dráha fotonu periodická, tj. dopadal periodicky na stále tatáž místa. Při podrobnějším zkoumání naměřených dat přišel na to, že se uvedená dráha zacyklí, pokud je $\operatorname{tg} \alpha$ racionální, kde α je úhel dopadu fotonu na první stěnu, která mu stála v cestě. Pro iracionální hodnotu $\operatorname{tg} \alpha$ nastává druhý pozorovaný jev. Alberta uspokojilo pár měření, nám to však nestačí, my chceme matematický důkaz uvedeného fenoménu. Svedete to?

Chyby měření neuvažujte.

Nejprve si všimněme, že se jedná o rovinný problém (foton létal v rovině rovnoběžné s podlahou), proto naše úloha vlastně hovoří o fotonu, který létá ve čtverci se zrcadlovými stranami.

Klíčem k řešení naší úlohy bude malý myšlenkový obrat. Zákon odrazu nám tvrdí, že po odrazu od stěny se foton pohybuje od ní pod stejným úhlem, jako na ni dopadl (ale s opačným znaménkem). Dráhou fotonu proto je lomená čára, která se „láme“ právě na stěně. Pokud si však za tuto stranu nakreslíme přesný zrcadlový obraz našeho čtverce, můžeme dráhu fotonu chápat jako úsečku procházející touto stranou.

Když nyní zobrazíme náš původní čtverec podle všech jeho stran, dále pak vzniklé obrazy podle všech jejich stran atd., dostaneme postupně z původního čtverce nekonečnou čtvercovou síť tvořenou jeho zrcadlovými obrazy a dráhu fotonu pak bereme jako přímku v této síti. Podrobně si rozmysli, které body v naší síti jsou obrazy stejného bodu v původním čtverci.

Na základě předcházejících úvah lze naši úlohu přeformulovat[7] takto: V rovině máme dánu kartézskou soustavu souřadnic. Dále v ní máme dánu čtvercovou síť s vrcholy v bodech s celočíselnými souřadnicemi (tzv. mřížové body). Čtverec o vrcholech $[0,0]$, $[1,0]$, $[1,1]$, $[0,1]$ nazveme původní čtverec. Pokud bude $[x,y]$ bod z původního čtverce, pak množinou jeho obrazů (značíme $O(x,y)$) nazveme všechny body $[x_0,y_0]$, pro které existují celá čísla m, n, že $x \pm x_0 = 2m$, $y \pm y_0 = 2n$. No a konečně mějme dánu přímku p svírající s osou x úhel $0 \leq \alpha < \frac{\pi}{2}$ a procházející bodem $[0,y_p]$. A stačí nám dokázat (*Podrobně si rozmysli, že to skutečně stačí!*), že pro racionální hodnotu $\operatorname{tg}\alpha$ má přímka p průsečíky se čtvercovou sítí v obrazech jen konečně mnoha bodů, přičemž tyto obrazy se po sobě periodicky střídají. A ve druhé části naší úlohy pak stačí ukázat, že pro iracionální hodnotu $\operatorname{tg}\alpha$ existuje pro libovolně malé číslo ϵ a pro libovolný bod hranice původního čtverce nějaký jeho obraz $[x_0,y_0]$ a nějaký průsečík přímky p s čtvercovou sítí, který má vzdálenost od $[x_0,y_0]$ menší než ϵ.

Jak dále uvidíme, nejtěžší na naší úloze byla formulace zadání v řeči matematiky. První část úlohy je totiž jasná z vyjádření $\operatorname{tg}\alpha = \frac{m}{n}, m \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N}$ (neboť $\operatorname{tg}\alpha$ je racionální). Z rovnice přímky p tvaru $y = x\operatorname{tg}\alpha + y_p$ již snadno usoudíme, že s každým bodem $[x,y]$ prochází přímka p i jeho obrazem $[x+2n, y+2m]$. Z toho ihned máme naše tvrzení.

Pro důkaz druhé části úlohy nejprve dokážeme jedno pomocné lemma:

Lemma. *Pokud je γ iracionální číslo a δ reálné číslo, pak existuje nekonečně mnoho párů celých čísel s a t takových, že $|s\gamma - t - \delta| < \frac{3}{s}$.*

Důkaz: Z příkladu 9 v seriálu vidíme, že existuje nekonečně mnoho celých čísel a a b splňujících $(a,b) = 1$ a $\gamma = \frac{a}{b} + \frac{\xi}{b^2}$ pro nějaké ξ splňující $|\xi| < 1$. Nechť c je celé číslo nejbližší k číslu $b\delta$, tedy $\delta = \frac{c}{b} + \frac{\zeta}{2b}$, kde $|\zeta| < 1$. Díky vlastnosti $(a,b) = 1$ lze nalézt celá čísla s, t splňující $as - bt = c$ a $b \leq 2s < 3b$. S využitím těchto vztahů máme

$$|s\gamma - t - \delta| = \left|\frac{sa}{b} + \frac{s\xi}{b^2} - t - \frac{c}{b} - \frac{\zeta}{2b}\right| = \left|\frac{s\xi}{b^2} - \frac{\zeta}{2b}\right| < \frac{s}{b^2} + \frac{1}{2b} < \frac{9}{4s} + \frac{3}{4s} = \frac{3}{s},$$

kde poslední nerovnosti plynou ze vztahu $b > 2s/3$. Odtud již máme dokazované tvrzení, neboť $s \geq \frac{b}{2}$ a b může být libovolně velké.

c.b.d.

Z právě dokázaného lemmatu již snadno dostaneme druhé dokazované tvrzení z naší úlohy. Nechť se například chceme dostat do blízskosti bodu $[0,y]$. Stačí položit $\gamma = \operatorname{tg}\alpha$, $-\delta = y_p - y$ a lemma nám dává, že se dokážeme přiblížit s přímkou p do libovolné blízskosti obrazu bodu $[0,y]$. Detaily přenecháváme čtenáři. Tím je úloha vyřešena.

Poznámky opravovatele: Úloha se skládala ze dvou částí. První jednodušší část týkající se racionální hodnoty $\operatorname{tg}\alpha$ nedělala řešitelům větší problémy. V té druhé se častěji vyskytla *mylná* úvaha, že když se foton nezacyklí, musí se nutně dostat do libovolné blízkosti libovolného bodu. Ono je to sice pravda, ale předcházející věta není nejlepší zdůvodnění. I když se foton nezacyklí, stále totiž není jasné, proč by na stěně nemohla vznikat bílá místa, kam

[7] Pokládáme stranu v původním čtverci rovnu jedné.

se foton zkrátka nedostane. Přesvědčující je v tomto případě až nějaké dokázané tvrzení podobné *lemmatu* z řešení úlohy.

Poznámka pro fyziky: Nad fyzikálním smyslem této úlohy nehloubejte. Jedná se o úlohu z teorie čísel, která z fyziky využívá jen to, že „zrcadlení“ je vlastně osová souměrnost. Smysluplné (matematické) zadání jsem uvedl v řešení úlohy.