Seriál – Lobačevského geometrie

Geometrie a její modely[1]

„ ... může Tě to připravit o všechen Tvůj čas, o Tvoje zdraví, o Tvůj klid a všechno Tvoje životní štěstí. Tato propastná temnota by mohla pohltit i tisíce obrovitých Newtonů a nikdy nebude světlo na Zemi.“

Farkas Bolyai[2]

Snad každý z Vás už někdy slyšel, že to byl Eukleides,[3] kdo pravděpodobně jako první zformuloval systém čtrnácti axiomů (z nichž pět nazval postuláty) geometrie ve svých Základech. Z pohledu dnešní matematiky to byl systém značně neúplný, nicméně zůstal jako východisko i pro dnešní geometrii. A možná víte i o bouřlivých diskuzích, které vyvolal tzv. 5. Eukleidův postulát.[4] Eukleides svůj slavný postulát formuloval takto: „*Dvě přímky v rovině, které protínají jinou přímku této roviny a tvoří s ní po jedné straně vnitřní úhly, jejichž součet je menší dvou pravých, se vždy protínají, a to po té straně přímky, kde je součet menší.*“ Jen pro zajímavost, další postuláty chtějí, aby se každý bod dal s každým jiným spojit přímkou, každou úsečku bylo možno neomezeně prodloužit, kolem každého bodu bylo možno opsat kružnici libovolného poloměru a konečně, aby si všechny pravé úhly byly rovny. 5. postulát je na první pohled složitější než ty ostatní, když se nad ním ale zamyslíte, zjistíte, že neříká nic jiného než to, že k dané přímce a bodu mimo ní existuje pouze jedna rovnoběžka, která tím bodem prochází. Právě jeho relativní složitost vedla matematiky k tomu, že se ho snažili dokázat.

---

[1] Varování redaktora: Tento text je plný historických poznámek a zajímavých souvislostí, proto Ti na některých místech nemusí připadat příliš srozumitelný. Nenech se proto odradit tím, že některé odstavce nepochopíš ani po několikátém čtení. Autor text zčásti napsal tak, že některé pasáže nejsou pro začátečníka příliš jasné. (To je drobná nevýhoda toho, když autor ví, o čem píše.) Věříme, že ta podstatná matematická informace, která je potřeba k řešení příkladů seriálu, se z textu dá vyčíst. Další díly budou více o matematice, a tím snad i lépe stravitelné.

[2] Farkas (Wolgang) Bolyai [Farkaš Bojai] (1775–1856) byl spolu s N. I. Lobačevským jedním z tvůrců neeukleidovské geometrie. Po marných pokusech dokázat 5. Eukleidův postulát se takto snažil, naštěstí neúspěšně, odradit svého syna, Jánose Bolyaie [Jánoše Bojaie] (1802–1860). Jak se F. B. přiznal v jiném dopise, tyto marné pokusy ho natolik zničily, že se raději začal věnovat poezii.

[3] Eukleides z Alexandrie (365(?)–300(?) před n.l.)

[4] Je zajímavé, že některé rukopisy Základů mají postuláty pouze 4 a tento 5. je uveden mezi axiomy, nejčastěji jako axiom číslo 11, někdy 9 a zřídka též 12.

Eukleidovy axiomy, byly víceméně axiomy aritmetiky, tvrzení typu „pokud $a = b, b = c$ pak $a = c$." Je vidět, že všechny tyto axiomy a postuláty jsou v jistém smyslu rozumné, avšak formálně vzato, neříkají zatím téměř nic,[5] protože my zatím nevíme, o čem vlastně vypovídají. Asi si řeknete, co to je za nesmysl, každý přece ví, co je to bod, přímka, kružnice, atd. A to je právě ta krása a úskalí matematiky, že ona zpochybňuje „evidentně jasné a nezpochybnitelné pojmy". Ještě než budete číst dál, zkuste přijít na to, co ty pojmy vlastně znamenají.

Povedlo se? Podívejme se teď na to, jak se s nimi vypořádal Eukleides. *Bod* je to, co nemá částí. *Čára* je délka bez šířky. *Přímka* je ta čára, která je stejně položena vzhledem ke všem svým bodům. *Plocha* je to, co má délku a šířku, atd. Moc jsme si nepomohli, protože co je to část, délka, šířka? Jistě, najdou se jejich definice, ale co budou ty pojmy, které se v nich budou vyskytovat? Aby se matematici dostali z tohoto bludného kruhu ven, jednoho krásného dne prohlásili, že bod je prostě bod, přímka je přímka, jsou to nějaké abstraktní objekty, které vyhovují dříve uvedeným axiomům.

Tím se geometrie stala dokonalou teorií, bez jakýchkoliv logických nedostatků, ale bohužel se tak odtrhla od světa. A tak zase bylo zapotřebí se realitě přiblížit a vzniklo něco, čemu se říká model geometrie. To je formálně řečeno nějaký jiný matematický objekt, který je nám znám i mimo kontext geometrie a ve kterém popíšeme, co to geometrické objekty jsou. Bude lepší si to ukázat na příkladě. Modelem eukleidovské geometrie je rovina, tj. množina bodů $[x, y]$ takových, že $x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}$, bodem bude $[x, y]$, přímku budeme chápat jako množinu těch $[x, y]$, pro které $ax + by = c$ atd. Jistě každý ví, že takto definované body a přímky splňují axiomy eukleidovské geometrie.

Je nutné si uvědomit rozdíl mezi abstraktní geometrií a jejím modelem. Cokoliv dokážu v geometrii, dokáži i v modelu. Ale pozor, když nějaké tvrzení dokážu v modelu, nemusím to dokázat v geometrii. Jediné, co mohu říci, je to, že dané tvrzení nelze vyvrátit. Toto je velmi jemná úvaha a bude dobré si ji pečlivě promyslet. Co totiž dělala spousta matematiků už od dob Eukleida? Podívali se na geometrii bez 5. postulátu, přičemž model geometrie, a to naši rovinu, nechali beze změny. V rovině se dá pomocí aritmetiky „sporný" axiom snadno dokázat, a proto si mysleli, že to půjde i v abstraktní geometrii. Byl to omyl, ale právě tento omyl byl jedním z důvodů, proč se geometrie rozvíjela.

Objevilo se mnoho pseudodůkazů 5. postulátu. Na chyby v některých z nich se přišlo brzy, některé odolaly déle. I když všechny byly špatně, většina z nich byla poučná tím, že ukazovala příklady tvrzení ekvivalentních Eukleidovu postulátu. Jedním z nejznámějších takových tvrzení je poučka, že součet úhlů v trojúhelníku je roven 180°. Kupodivu stačí požadovat pouze to, aby součet úhlů u všech trojúhelníků byl roven téže konstantě. Eukleidův postulát také plyne z požadavku, že existují dva podobné, nikoliv však shodné trojúhelníky (tzv.

[5] O tom, že axiomy jsou neúplné, svědčí následující příklad: konstruujeme trojúhelník podle věty SSS a třetí bod získáme jako průsečík dvou kružnic. Kde ale bereme tu jistotu, že se kružnice protnou, že v tom místě, kde by se měly protnout, nemá jedna z nich díru a ony se tak minou? Pro doplnění, hezké zavedení geometrie lze nalézt např. v první z doporučených knih.

Wallisova[6] poučka). Na začátku zmiňovaný F. Bolyai ukázal, že 5. postulát je ekvivalentní s tvrzením, že libovolnými třemi body neležícími v přímce lze vést kružnici. Dále, jak každý ví, délka strany pravidelného šestiúhelníka je rovna poloměru kružnice jemu opsané, což je další ekvivalentní přepis.

Takto slavní matematikové chrlili jednu větu za druhou, a protože nebyli schopni 5. postulát dokázat, dospívali postupně k názoru, že se ani dokázat nedá. V roce 1829 N. I. Lobačevskij[7] přišel s převratnou prací *O načalach geometrii*, v níž popisoval neeukleidovskou geometrii a o kterou, jak to tak bývá, nikdo nejevil zájem. Jeho popis byl čistě axiomatický, my pro snazší pochopení nebudeme budovat teorii, ale rovnou model neeukleidovské geometrie, tj. geometrie, kde je 5. postulát nahrazen požadavkem: „*Ke každé přímce a každému bodu mimo ní lze vést alespoň dvě rovnoběžky procházející tímto bodem.*“

V dalším textu se budou místy objevovat slova jako „vezmu dostatečně malé číslo“ a „vyjde mi to téměř přesně“. Ti z vás, kteří už jsou seznámeni s pojmem limita, vždy si ji tam v konkrétním případě představte, ostatní nechť to chápou tak, že beru strašně malá čísílka, tak malá, že kdyby mi to nevyšlo tak přesně, jak chci, vezmu si ještě menší. Smysl rčení je v tom, že pro dostatečně malé čísílko mi to vyjde.

Souběžně s modelem Lobačevského geometrie $\mathbb{L}$ budu zavádět model geometrie eukleidovské $\mathbb{E}$. To, že určitý objekt budu chápat ve smyslu Lobačevského geometrie, budu značit změnou písma, tj. budu psát *přímka*, *kružnice*, apod. Normální písmo bude značit geometrické objekty v $\mathbb{E}$ nebo tyto objekty chápané obecně. Body v $\mathbb{E}$ budou obvyklé body reálné roviny, tj. $\{[x,y]; x,y \in \mathbb{R}\}$, *body* v $\mathbb{L}$ budou body poloroviny, tj. $\{[x,y]; x,y \in \mathbb{R}, y > 0\}$, což můžeme chápat též jako $\{z \in \mathbb{C}; \mathrm{Re}\ z > 0\}$, kde $\mathbb{C}$ značí komplexní čísla a Re z je reálná část čísla z. Přímku v $\mathbb{E}$ můžeme chápat jako množinu těch bodů $[x,y]$, pro které $ax + by = c$ (a, b, c jsou reálné konstanty). To nám ale nikterak nenapovídá, jak by měly vypadat *přímky* v $\mathbb{L}$. Všímejme si tedy vlastností přímek v $\mathbb{E}$. První, co nás napadne, je to, že ji můžu po sobě posouvat, tj. že je všude stejně křivá. V $\mathbb{E}$ už takovou vlastnost mají jen kružnice. V dalším ale ukážeme, že v $\mathbb{L}$ takovou vlastnost má i jiný objekt.

To, že je přímka rovná, je v jistém smyslu charakteristika toho, že je to nejkratší spojnice dvou svých bodů, tj. potřebujeme si rozmyslet pojem vzdálenosti. V $\mathbb{E}$ se vzdálenost dvou bodů zavede celkem jednoduše tím, že řeknu: body $[x,y]$, $[x',y']$ jsou od sebe daleko $\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2}$. Existuje ale i jiný, rafinovanější způsob. Vezmu si dva body A_0, B_0 pevně a prohlásím, že mají vzdálenost 1. Pro každé k kladné reálné si vezmu systém zobrazení Π_k, jeho prvky (zobrazení $\pi : \mathbb{E} \to \mathbb{E}$) nazvu podobnosti s koeficientem k. Pro všechna taková π z Π_k a A, B z $\mathbb{E}$ definuji, že body $\pi(A)$ a $\pi(B)$ jsou od sebe daleko k-krát tolik, co A a B, Rozmyslete si, že k tomu, abych mohl určit vzdálenost libovolných dvou bodů, mi stačí, aby systém $\{\Pi_k; k \in \mathbb{R}^+\}$ měl tyto vlastnosti: z bodů A_0, B_0 se musím umět postupnou aplikací podobností dostat do jakékoliv jiné dvojice bodů a když se do stejných bodů dostanu více

[6] John Wallis (1616–1703), od roku 1643 do smrti profesor geometrie v Oxfordu.

[7] Nikolaj Ivanovič Lobačevskij (1793–1856), profesor v Kazani. Pozdější prameny však uvádějí, že se narodil 1. 12. 1792, podle ještě pozdějších dokonce 20. 11. 1792; druhá nesrovnalost je však pravděpodobně zaviněna rozdílem gregoriánského a juliánského kalendáře.

způsoby, výsledný koeficient podobnosti musí být stejný.[8] Podobnosti s koeficientem 1 budu nazývat shodnosti.

V $\mathbb{E}$ se dají všechny shodnosti získat pomocí maximálně třikrát provedeného zrcadlení (viz příklady na konci textu) a základní podobnost je stejnolehlost. Náš model $\mathbb{L}$ teď opatříme těmito shodnostmi: eukleidovskou osovou souměrností podél přímek rovnoběžných s osou y a kruhovou inverzí kolem kružnic (polokružnic) se středy na ose x. Kruhová inverze je takové zobrazení určené kružnicí k se středem S a poloměrem r, které každý bod X mimo S zobrazí na takový bod $\tilde{X}$, že $S, X, \tilde{X}$ leží (v tomto pořadí) na přímce a $|XS|.|\tilde{X}S| = r^2$. Její elementární vlastnosti jsou tyto: je sama sobě inverzním zobrazením, kružnice neprocházející bodem S zobrazuje na kružnice, kružnice, které bodem S procházejí, zobrazuje na přímky, body náležející k nechává na místě. Má tedy podobné vlastnosti jako eukleidovská osová souměrnost. Více se o kruhové inverzi a zejména o jejím použití můžeš dočíst např. v ročence 16. ročníku našeho semináře.

Možná Tě napadne, proč za shodnost považovat něco tak exotického, jako je kruhová inverze. Ona je totiž z hlediska komplexní analýzy velmi hezké a přirozené zobrazení, v $\mathbb{C}$ se dá obraz bodu z v uvažované kruhové inverzi chápat jako $r^2/(\bar{z}-S)$, kde $\bar{z}$ je číslo komplexně sdružené k z.

Podobnost zavedu jen pro *body* tvaru $[0,a]$, a to tak, že $\pi([0,a]) = [0,a^k]$ je podobnost s koeficientem k.[9] Už mi zbývá jen prohlásit, že body $[0,1]$, $[0,e]$ mají vzdálenost 1.

Abych určil vzdálenost dvou *bodů* a, b, musím na ně nějak zobrazit body $[0,1]$, $[0,e]$. To se dá udělat tak, že a, b zobrazím na $[0,1]$, $[0,e]$ pomocí f a vezmu inverzní zobrazení f^{-1}. Zobrazení f najdu takto: nechť *body* a, b leží na nějaké polokružnici se středem na ose x protínající osu x v bodech A, B, uvažuji polokružnici k s dvojnásobným poloměrem a středem v A. Kruhová inverze kolem k mi a, b převede na body ležící na přímce rovnoběžné s osou y, použiji zrcadlení, abych je dostal přímo na osu y, dále eukleidovskou stejnolehlost (všimněte si, že je to složení dvou inverzí kolem kružnic o stejném středu a různém poloměru), abych jeden z bodů zobrazil na $[0,1]$ a nakonec pobobnost, abych druhý bod zobrazil na $[0,e]$.[10] Vzdálenost a, b pak bude převrácená hodnota koeficientu podobnosti, které jsem použil. Po chvíli výpočtů se dá zjistit, že body $[0,x], [0,y]$ mají vzdálenost $|\ln \frac{x}{y}|$.

Právě definovaná vzdálenost, přestože se to na první pohled nezdá, úzce souvisí s normální eukleidovskou vzdáleností. Ono totiž pro dva *body*, které jsou ds daleko v eukleidovském smyslu (ds malé), vyjde jejich *vzdálenost* v $\mathbb{L}$ skoro přesně ds/y, kde y je eukleidovská vzdálenost jednoho z bodů od osy x. (Spočte se to buď pomocí vztahu $\ln(1+x) \doteq x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$ pro $x \doteq 0$, nebo to vyplyne z geometrické úvahy.)

---

[8] Všimněte si, že je-li $\pi \in \Pi_k$, $\varrho \in \Pi_l$, a jejich složení $\pi \circ \varrho \in \Pi_t$, pak $t = kl$.

[9] Není to tedy přesně ten systém zobrazení, který jsem uvažoval v obecném případě, podobnost s koeficientem jiným než 1 totiž není definovaná na celém $\mathbb{E}$. Ukazuje se však, že systém shodností je natolik bohatý, že vzdálenost můžu korektně definovat.

[10] Pokud a, b jsou na přímce rovnoběžné s osou y, tak samozřejmě mám práci snazší a nemusím v prvním kroku dělat žádnou kruhovou inverzi; obdobně, pokud a, b leží přímo na ose y, atd.

Křivky a jejich vlastnosti

„Autor, jak se zdá, si postavil za cíl psát tak, aby mu nebylo vůbec rozumět.“
M.V. Ostrogradskij (1801–1861)

„Ale může se někdo zeptat, nač psát nebo dokonce tisknout takové nejapné fantasie. Na tuto otázku je těžko odpovědět.“
Neznámý kritik[11]

Už vím, co to je vzdálenost dvou bodů, ještě bych rád věděl, co to je délka křivky. Křivka φ pro mě v $\mathbb{E}$ i v $\mathbb{L}$ bude znamenat množinu bodů, která „připomíná zkroucený provázek.“ V $\mathbb{E}$ si můžu φ nahradit lomenou čarou, tu změřím a získám tím něco, co je skoro délka φ. Udělám to tak i v $\mathbb{L}$, vezmu konečně mnoho *bodů*, zjistím, jak jsou od sebe *daleko*, a výsledky posčítám. Tuto proceduru udělám pro všechny možné konečné výběry *bodů* na *křivce* a ze získaných výsledků vezmu tzv. supremum.[12] Laicky řečeno, délka *křivky* je téměř totéž, co délka *lomené čáry*, která má hodně *bodů* zlomu, přičemž ty *body* jsou na *křivce* dostatečně hustě.

Vraťme se teď k původnímu problému, co to je *přímka*. V $\mathbb{E}$ se přímky shodností zobrazují na přímky (obdobné tvrzení platí i pro jiné objekty: kružnice se zobrazují na kružnice, trojúhelníky na trojúhelníky, ...), bude tedy rozumné to tak chtít i v $\mathbb{L}$. Přímky v $\mathbb{E}$ realizují vzdálenost mezi každými dvěma svými body — tj. pro libovolné dva body přímky platí, že křivka nejkratší délky, která je spojuje, je celá částí naší přímky. To už v našem případě stačí. Protože jeden z axiomů zní, že každými dvěma body lze vést právě jednu přímku, stačí určit, jaká *přímka* spojuje *body* $[0,1],[0,2]$. Všechny ostatní *přímky* získám přenesením této význačné *přímky* pomocí *shodností*. A protože Lobačevského geometrie není zas tak odlišná, hledaná *přímka* je právě osa y (přesněji ta její část, která leží v našem modelu, tj. kladná poloosa; tohoto zjednodušení se občas dopustíme). Stručné ověření by mohlo být následující — sporem, nechť je to jiná *křivka*. Vezmu si *lomenou čáru*, která mi její *délku* aproximuje dostatečně přesně. *Čáru shodnostmi* narovnám tak, aby byla rovnoběžná s osou y a přitom *bod* $[0,1]$ zůstal na místě. Není těžké se přesvědčit, že *bod* $[0,2]$ se zobrazí na $[0,a]$, kde $a>2$, tj. *lomená čára* je mezi $[0,1],[0,2]$ *delší* než úsek na ose y, což je ve sporu s vlastností *přímky*. Protože podobnou úvahu mohu provést pro libovolnou dvojici *bodů* $[0,r]$,$[0,s]$, je osa y skutečně *přímka*.

Snadno se přesvědčíte, že *přímky* v $\mathbb{L}$ jsou právě polopřímky rovnoběžné s osou y a bez počátku, který by byl na ose x a polokružnice se středy na ose x. To je další paralela s eukleidovskou geometrií — v $\mathbb{E}$ byly shodnosti osové souměrnosti podél přímek, kruhová inverze v $\mathbb{L}$ je něco jako osová souměrnost kolem osy tvořené polokružnicí.

Jak si prostor $\mathbb{L}$ představit? Rozumná představa je např. taková, že téměř všechna hmota je natěsnána v blízkosti osy x a čím jsem od ní dál, tím je prostor řidší. Tím se vysvětluje,

---

[11] Oba citáty pochází z kritiky na Lobačevského práci *O načalach geometrii*, ale hodí se i na některé jiné texty.

[12] tj. číslo větší nebo rovno než všechny mé výsledky, ale zároveň nejmenší ze všech takových čísel, které mají tutéž vlastnost — učeně se tomu říká nejmenší horní závora.

že při *osové souměrnosti* se hmota neztrácí, i když skoro celý prostor zobrazím do libovolně malého půlkruhu (i v něm je hmoty „nekonečně“). Obdobně když chci jít co nejsnáze z *bodu* A do *bodu* B, beru to na první pohled oklikou, protože chodím raději řidším prostředím, kde jsem rychlejší.[13]

Paralely $\mathbb{L}$ s $\mathbb{E}$ ovšem nekončí u přímek, pokračují dále, a to místy až překvapivě. *Kružnice* v $\mathbb{L}$ (tj. množina *bodů*, které mají od jednoho pevného *bodu* konstantní *vzdálenost*) je opět kružnice ve smyslu $\mathbb{E}$, avšak s jiným středem. Důkaz tohoto faktu je obsažen v řešení 3. úlohy seriálové série.

Dále splývá i měření úhlů. Položme si otázku, co to vlastně je úhel, resp. jeho velikost? Úhel, který svírají dvě přímky, je délka oblouku, který vytínají z kružnice se středem v průsečíku, dělená jejím poloměrem. Pro obecné protínající se křivky se jejich odchylka definuje jako odchylka jejich tečen ve společném bodě. Tečnou (resp. *tečnou* (v $\mathbb{E}$ i v $\mathbb{L}$) budu rozumět přímku (resp. *přímku*), která má s křivkou dotek prvního řádu, neboli je nerozlišitelná od původní křivky, jsem-li dostatečně blízko bodu dotyku. Přesněji, když jsem ve vzdálenosti ds od tečného bodu, pak pro odchylku dt tečny od křivky platí $dt/ds \doteq 0$ pro malá ds. Obdobně, dva objekty mají dotek k-tého řádu, pokud $dt/ds^k \doteq 0$. To teď využiji k obecné definici úhlu: je to podíl délky oblouku, který křivky vytnou na kružnici se středem v průsečíku a poloměru dané kružnice, pro dostatečně malý poloměr. V této definici už nepotřebuji žádnou tečnu, nezáleží tedy na tom, jsem-li v $\mathbb{E}$ nebo ne, můžu tak tedy měřit *úhly* v $\mathbb{L}$. Vzhledem k tomu, že na malých vzdálenostech měřím v $\mathbb{L}$ stejně jako v $\mathbb{E}$ (až na násobení nějakou konstantou), tedy i malé kružnice a *kružnice* jsou hodně podobné, vychází mi podíl při počítání odchylky křivek skoro stejně, ať se na křivky dívám, jako by byly v $\mathbb{E}$ nebo v $\mathbb{L}$ (zde by ovšem bylo třeba trošku počítat). Všimněte si, že kruhová inverze zachovává velikosti úhlů, ale mění jejich orientaci.[14]

Co vlastně z dosavadního povídání plyne? Kdybych byl tvoreček, který nikdy nepřekročí jistou mez (např. ve vesmíru bych mohl provádět pouze měření na Zemi), úplně klidně bych si vystačil s eukleidovskou geometrií, a nejen to, ani bych nebyl schopen poznat, jestli svět kolem se řídí zákonitostmi geometrie eukleidovské nebo Lobačevského. Uvědomte si totiž, že na dostatečně malých vzdálenostech je i velká kružnice „k nerozeznání“ od přímky.

Budujme model $\mathbb{L}$ dál. Eukleides přímky nazýval rovnoběžnými, pokud se nikde neprotínají. Je snadno vidět, že takovýchto *rovnoběžek* lze k dané *přímce* v $\mathbb{L}$ vést spoustu. Zkusme tedy hledat nějakou lepší definici rovnoběžnosti. Rovnoběžky mají v $\mathbb{E}$ také tu vlastnost, že jsou od sebe všude stejně daleko. Množinám bodů, které mají stejnou vzdálenost od dané přímky, říkejme ekvidistanty; jejich vzdálenosti od „mateřské přímky“ říkejme výška. Zkoumejme *ekvidistanty* v $\mathbb{L}$. Pro jednoduchost vezměme za základní *přímku* osu y. Tvrdím, že *ekvidistantou* k ose y je právě každá dvojice polopřímek s (vynechaným) počátkem v bodě $[0, 0]$ s odchylkou α od osy y. (Takovýto útvar nazvěme „véčko“.) K tomu stačí ukázat, že

[13] Všimněte si, že toto odpovídá „fyzikálním přímkám“, tj. křivkám, po nichž se šíří světlo. Typický příklad „fyzikální přímky“, která není přímka, je paprsek, který se lomí na rozhraní dvou opticky různých prostředí.

[14] Velikost úhlu je určená délkou oblouku na kružnici, orientace úhlu závisí na tom, jakým směrem ten oblouk procházím.

podobnosti se středem na ose x jsou v $\mathbb{L}$ *shodnosti*. A skutečně, stačí uvažovat složení dvou kruhových inverzí kolem kružnic s poloměry $\sqrt{\frac{1}{k}}$ a 1 se stejným středem a dostanu podobnost s koeficientem k. Kolem *přímky* ve tvaru polokružnice má *ekvidistanta* tvar dvou oblouků kružnice.

Stojí za povšimnutí, že *ekvidistanty* nejsou *přímky* v $\mathbb{L}$, a přesto se dají samy po sobě posouvat (tj. existují *shodnosti*, které je zachovávají a přitom jakýkoli *bod ekvidistanty* můžu jejich užitím zobrazit na každý jiný). Dá se dokonce dokázat, že v neeukleidovské geometrii to ani *přímky* být nemůžou a že to s *kružnicemi*, *přímkami* a kružnicemi, které se dotýkají osy x, jsou jediné objekty s konstantní křivostí

Je vidět, že když k „véčku" hledám *přímku*, která by s ním byla *ekvidistantní*, najdu vždy jen jednu takovou. Další zajímavá vlastnost *ekvidistant* je tato — mají-li různou výšku (a nezáleží dokonce ani na tom, od které „mateřské přímky"), nemůžu ztotožnit (tj. převést na sebe *shodností*) ani jejich části, jsou jakoby kružnice různých poloměrů. Tady je třeba opět pečlivě rozlišovat mezi „shodností" a „*shodností*". *Ekvidistanta* k *přímce* tvaru polokružnice tvoří dva kruhové oblouky, které jsou určeny svými středy a poloměry. Není ale těžké najít jinou *přímku* a k ní *ekvidistantu* (s jinou *výškou*), která obsahuje kruhový oblouk stejného poloměru. Eukleidovskými shodnostmi jsou tedy na sebe převoditelné (alespoň jejich části), *shodnostmi* v $\mathbb{L}$ však nikoli.

Fakt, že se dá křivka po sobě libovolně posouvat, úzce souvisí s tím, jak je ta křivka „křivá". Položme si tedy opět zásadní otázku, co je to vlastně křivost. V $\mathbb{E}$ se dá křivost chápat takto: v daném bodě s křivky φ sestrojím kružnici, která má s křivkou dotyk druhého řádu a vezmu převrácenou hodnotu jejího poloměru — čím prudčeji zahýbám, tím je křivost větší. Přímka (chápaná jako kružnice s nekonečným poloměrem) má křivost 0. Podrobnější analýzou slov „prudce zahýbat" dostaneme toto — vezmu si jeden vektor s počátkem v s pevně (říkejme mu $\vec{v}$), změřím úhel $\theta(s)$ mezi ním a tečnou k φ v s, posunu se do bodu $s+ds$, změřím $\theta(s+ds)$ a spočtu $\mathrm{k(s)} = \frac{\theta(s+ds)-\theta(s)}{ds}$ pro malé ds.[15] Číslo $k(s)$ prohlásím za křivost φ v bodě s. Předpokládám, že ds je ve všech bodech s stejné, tj. že probíhám křivku pořád stejnou, jednotkovou rychlostí.

Dopustil jsem se menšího podvodu, když jsem tvrdil, že změřím $\theta(s+ds)$. V bodě $s+ds$ totiž žádný vektor nemám, musím nějak popsat, jak tam vektor $\vec{v}$ dostat. To je klíč k definici křivosti v obecném případě. Mám bod s a $s+ds$, v bodě s vektor $\vec{v}(s)$. Body s a $s+ds$ mám spojeny *přímkou* p, a tak vektor $\vec{v}(s+ds)$ definuji jednoduše tak, aby s p svíral stejný úhel jako $\vec{v}(s)$. Učeně se tomu říká paralelní přenos, a i když je tento způsob přirozený, rozmyslete si, že obecně není jednoznačný (např. když jsem na kouli a chci se dostat z rovníku na pól, tak záleží na cestě, kterou tam vektor přenáším). Teď už je jasné, jak změřit $\theta(s+ds)$ a pak spočítat $k(s)$.

Aby příště bylo lépe vidět do definice křivosti plochy, uvědomte si, že jsem-li v $\mathbb{E}$, tak vlastně místo libovolného vektoru $\vec{v}$ lze vzít jeden speciální, a to jednotkový tečný vektor. Někde vedle si nakreslím jednotkovou kružnici a v jejím středu jednotkový vektor $\vec{w}$ rovnoběžný s $\vec{v}$. Jak po přímkách přenáším $\vec{v}$ do sousedních bodů křivky φ, koncový bod $\vec{w}$

---

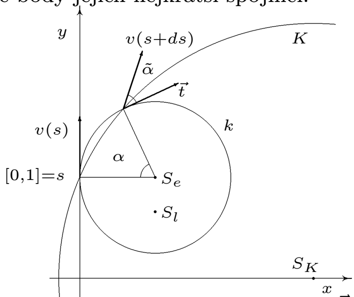
[15] $k(s)$ sice závisí na tom, jak velké si zvolím ds, ale dá se ukázat, že pro dostatečně malá ds už se $k(s)$ téměř nemění.

rotuje po jednotkové kružnici a já zkoumám, jak velkou část z ní objel. To je právě hodnota $\theta(s+ds)-\theta(s)$.

Kdyby křivka byla uložena v prostoru větší dimenze než 2, nahradím ji křivkou, která už v rovině leží — vezmu tři dostatečně blízké body, ty mi určí rovinu, křivku do této roviny kolmo promítnu a křivost měřím už jen na té promítnuté křivce.

Z obrázku se dá zjistit, že kružnice (v $\mathbb{E}$ i v $\mathbb{L}$) mají křivost rovnu $1/r$, kde r je eukleidovský (!) poloměr. Přirozeně, *přímky* mají *křivost* 0. I v obecných případech jsou křivky s nulovou křivostí právě ty, jež jsou pro dostatečně blízké body jejich nejkratší spojnicí.

Když dvě křivky mají dotyk druhého řádu, tak mají v bodě styku stejnou křivost (protože jsem ji měřil jen ve veličinách prvního řádu). Odtud pak plyne původní návod na počítání křivostí — pro každou rozumnou křivku totiž v každém bodě najdu vhodně se přimykající kružnici nebo přímku.



Popis obrázku: k je kružnice, jejíž křivost měříme, S_e její eukleidovský střed, S_l její střed v $\mathbb{L}$. Búno je bod $s=[0,1]$ (díky přenášení pomocí shodností). Počáteční vektor $\vec{v}$ je „tečný“ ke k, do bodu $s+ds$ ho přenáším pomocí kružnice K. Dále $\vec{t}$ značí „tečný“ vektor ke k v $s+ds$, $\tilde{\alpha}$ je odchylka $\vec{v}(s+ds)$ a $\vec{t}$. Pro malá α platí: $ds \doteq r\alpha$ a protože K má dostatečně velký poloměr, je $\alpha \doteq \tilde{\alpha}$. Tedy křivost v s je skutečně rovna r^{-1}.

Plochy

„Na první pohled se dá říci, že poučky geometrie, již jsem nazval pomyslnou geometrií, jsou všeobecně protimyslné; tu musím podotknout, že i když sebevíc odporují našim představám a zvykům, přece jen jsou po logické stránce zcela bezesporné.“

Nikolaj Ivanovič Lobačevskij

Na úvod malé opakování. Zavedli jsme model $\mathbb{L}$, umíme v něm měřit *vzdálenosti* a *úhly*, víme, co je *přímka* a jak vypadají *kružnice*, umíme určit *křivost křivky*. Další přirozeným pojmem pro zkoumání je *křivost plochy*.

Pro jednoduchost uvažujme kouli o poloměru R v eukleidovském prostoru $\mathbb{R}^3$. Všimněme si základního rozdílu mezi sférou a kružnicí. Část kružnice můžu narovnat, nikdy se mi to ale nepovede u sféry. Zakřivení tedy je vlastně to, jak moc se liší sféra od svého jakoby narovnání. Přesněji, když si vezmu kruh s (malým) poloměrem r (měřeno na sféře), změřím jeho obsah a porovnám s obsahem kruhu v $\mathbb{E}$ se stejným poloměrem, zjistím, že se liší až v řádu r^3, a to o $\frac{1}{R^2}$ (krát nepodstatná konstanta). Přesně řečeno, obsah kruhu o velmi malém poloměru r na sféře je $\pi r^2 - \frac{\pi}{12R^2}r^3 + \text{cosi}.r^4 + \cdots$. Pro malé r jsou členy s r^4 mnohem menší než členy s r^3, lze je tedy „s klidným svědomím“ zanedbat.

Křivost můžu charakterizovat i tak, že vezmu kružnici, změřím její délku na sféře, porovnám s odpovídající kružnicí v $\mathbb{E}$ a vyjde mi, že se zase liší až u koeficientu u r^3 a až na konstantu zase o $\frac{1}{R^2}$. Pak mě napadne porovnat poloměr r s číslem $\frac{1}{k}$ (k je křivost mé kružnice), což, jak jsme viděli, je eukleidovský poloměr kružnice se stejnou křivostí. A opět dostanu tentýž výsledek. Ukazuje se, že to není náhoda a že číslo $\frac{1}{R^2}$ je pro sféru charakteristické (je to i logické, jestliže si uvědomíme, že křivost kružnice je $\frac{1}{R}$) a je to právě její křivost; říká se jí hlavní (někdy Gaussova) křivost.[16]

Gaussova křivost se řadí mezi takzvané vnitřní vlastnosti plochy, tj. takové, které závisí jen na ploše a nikoli na tom, jak je plocha uložená v prostoru.[17] Např. rovina, válec i kužel mají stejnou, nulovou křivost. To je způsobeno tím, že se dají na sebe vzájemně rozvinovat. Obecně, dvě plochy mají stejnou křivost právě tehdy, když jednu z druhé lze dostat „kroucením“, které zachovává délky.[18]

Vraťme se opět k našemu modelu. Porovnáním poloměru v $\mathbb{L}$ a poloměru stejné kružnice v $\mathbb{E}$ dostaneme, že křivost $\mathbb{L}$ je -1. Skutečně, vezměme kružnici se středem v $[0, 1]$ a s malým (eukleidovským) poloměrem r. Tato kružnice protne osu y v bodech $[0, 1-r]$ a $[0, 1+r]$ Chápána jako *kružnice* má tedy *poloměr* (pro úpravy využijeme tzv. Taylorova rozvoje funkce ln)

$$\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+r}{1-r}\right) = \frac{1}{2}\left(\left(r - \frac{r^2}{2} + \frac{r^3}{3} - \cdots\right) - \left(-r - \frac{r^2}{2} - \frac{r^3}{3} - \cdots\right)\right) = r + \frac{r^3}{3} + \cdots .$$

A protože tentokrát je „nepodstatná“ konstanta rovna -3, je křivost našeho modelu -1.

Tady je důvod, proč se Lobačevského geometrii říká hyperbolická. Sedlový bod hyperboloidu[19] má totiž zápornou křivost. K naší smůle celý hyperboloid není model $\mathbb{L}$, ale alespoň lokálně jej za model můžeme brát. Stojí za zmínku, že v $\mathbb{R}^3$ neexistuje plocha, která by měla přesně stejné vlastnosti jako $\mathbb{L}$, dá se však ukázat, že v $\mathbb{R}^n$ pro $n \geq 4$ už taková plocha existuje (a její projekce do $\mathbb{R}^3$ připomíná hyperboloid).

Uvažujme *trojúhelník*, tj. trojici *bodů*, navzájem spojených částmi *přímek*. Teď si můžu začít trochu hrát, vezmu si nějaký *vektor* ve *vrcholu trojúhelníka*, přenesu ho do druhého, pak do třetího a nakonec zpátky. Ke svému zděšení ale zpozoruji, že jsem nedostal původní *vektor* a že odchylka od původního *vektoru* je[20] $\alpha + \beta + \gamma - \pi$, kde α, β, γ jsou vnitřní *úhly trojúhelníka*. Gauss–Bonnetova věta (pochází z aparátu diferenciální geometrie a při důsledném zavedení křivosti je to jen triviální důsledek definice) tvrdí, že to tak je správné a že tento rozdíl se rovná křivosti modelu násobené *obsahem trojúhelníka*. Tedy *obsah trojúhelníka* je $\pi - (\alpha + \beta + \gamma)$.

---

[16] Všechny tyto postupy na výpočet křivosti spadly z nebe. Přesto věř, že mají logická vysvětlení a neuvádím je zde jen proto, že jsem v těchto místech oprávněnost výčitek svých kolegů ohledně nesrozumitelnosti uznal.

[17] „V praxi“ to znamená, že jako dvourozměrný človíček žijící na té ploše jsem schopný její křivost nějakými prostředky změřit, aniž plochu opustím.

[18] Toto „kroucení“ zachovává všechny podstatné lokální vlastnosti, tj. ty, které mohu zjistit, když znám byť jen malilinký kousek plochy. Bohužel už nezachovává vlastnosti globální, takže třeba na válci existuje uzavřená geodetika, zatímco v rovině ne.

[19] Ti z Vás, kdo neví, co je hyperboloid, si jej mohou představit jako jezdecké sedlo.

[20] Vše se bere v radiánech.

Na jednu stranu na tom není nic překvapivého, uvažujeme-li sféru o poloměru 1, pak má křivost 1, trojúhelník je na sféře trojice bodů spojená hlavními kružnicemi, jeho obsah se dá relativně snadno spočítat a vyjde $(\alpha+\beta+\gamma-\pi).1^2$. Náš model Lobačevského geometrie se dá formálně zavést úplně stejně jako geometrie sférická, s tím rozdílem, že poloměr sféry, po které se pohybuji, je imaginární jednotka[21] i. Raději nebudu rozvádět, co to přesně znamená, uvedu pouze, že křivost imaginární sféry pak je -1 a existuje tedy jakési „kroucení“, které ji převede na model $\mathbb{L}$ (přesněji na plochu v $\mathbb{R}^n$ zmíněnou výše). A protože obsah troúhelníka na imaginární sféře vyšel $(\alpha+\beta+\gamma-\pi).i^2$, je to přesně to, co jsme získali pomocí Gauss–Bonnetovy věty.

Všimněte si několika věcí. Za prvé, v rovině je odchylka vektorů nulová — mám krásný způsob, jak přenášet vektory, dělám to jednodušše po přímkách, přenášení můžu libovolně skládat a když mám více možností, jak se někam dostat, nezáleží na tom, kterou z nich si vyberu. Na obecné ploše jsme si sice také ukázali v jistém smyslu kanonický způsob (přenášení po přímkách), je ale vidět, že přenášení už nemůžu skládat a čekat při tom hezké vlastnosti.

Za druhé, rovina má křivost 0, je to jako bychom byli na povrchu koule s nekonečně velkým poloměrem.[22] To, že se pak nedají počítat obsahy z Gauss–Bonnetovy věty je způsobeno tím, že všechny trojúhelníky jsou vzhledem k poloměru nekonečně malé a jako takové nerozlišitelné. To je příklad toho, že s nekonečnem si nelze jen tak beztrestně pohrávat.

Za třetí, předchozí odstavec dává návod, jak (v $\mathbb{L}$ spočítat *obsah* libovolné *oblasti* ohraničené *přímkami* (třeba tím, že použiji *triangulaci*) a protože prakticky každou *křivku* můžu libovolně přesně nahradit *lomenou čarou*, spočtu tak *obsah* každé *oblasti*.

Dále, jestliže po *podobnosti* chceme, aby natahovala všechny *vzdálenosti* a tedy i *obsahy*, a přitom zachvávala úhly, nezbývá nám než konstatovat, že žádné takové zobrazení v $\mathbb{L}$ neexistuje. Proto jsem v první části seriálu *„podobnosti“* definoval tak zvláštně.[23] Neexistence *podobností* (jako zobrazení z $\mathbb{L}$ do $\mathbb{L}$) má dalekosáhlé důsledky. Jedním z nejdůležitějších je existence takzvané absolutní délky.

Přibližme si to nejprve v eukleidovské geometrii na úhlech. V rovině totiž nezávisle na tom, jaké mám měřítko (a to jak úhlové tak délkové), existuje konstrukce, která mi vždy sestrojí úhel $\frac{\pi}{2}$, resp. 90 stupňů. Je proto logické, vzít pravý úhel za jednotku měření (ale kdo by dnes používal gradiány, že?). Není úplně jednoduché to dokázat, ale neexistuje konstrukce, která by bez použití měřítka zkonstruovala úsečku délky 1. Situace v našem modelu $\mathbb{L}$ je zcela odlišná. Pro snazší vyjadřování definujme pojem *souběžky* k dané *přímce*. Je to taková *přímka*, která původní *přímku neprotíná*, ale protíná (tj. má s ní společný bod právě na ose x). Je to vlastně krajní případ *rovnoběžných přímek*.

V $\mathbb{L}$ nejenže umím sestrojit úhel $\frac{\pi}{2}$, umím též sestrojit následující (jedná se vlastně o mezní případ *trojúhelníka*) — *přímky* p, q, k, že p je *souběžná* s q, k je kolmá na p a k protíná q pod úhlem[24] $\frac{\pi}{4}$. Vlivem neexistence *podobností* je tato konstrukce jednoznačná v tom smyslu, že

[21] Platí $i^2 = -1$.

[22] Nebo na nekonečně velikém hyperboloidu.

[23] Ve skutečnosti jsem definoval *podobnosti* jen jako zobrazení z osy y do osy y.

[24] Toto číslo je tam víceméně z historických důvodů.

úsečka, kterou mi na k vytnou *přímky* p a q má pořád stejnou *délku*.[25] Je nutno poznamenat, že ta délka není 1. Rozmyslete si, že při změně měřítka tak, aby právě sestrojená úsečka měla délku 1 se v našem modelu změní pouze jeho křivost, a to ještě jen co do velikosti, záporná zůstane i nadále.

V tomto okamžiku už tedy máme vybudovaný poměrně silný aparát ke zkoumání našeho modelu. Stále je ale třeba mít na paměti rozdíl mezi modelem $\mathbb{L}$ a Lobačevského geometrií jako takovou. V $\mathbb{L}$ se mi kromě existence nekonečně mnoha *rovnoběžek* povedla dokázat neexistence podobností, ukázal jsem, že existuje absolutní délka a že obsah každého *trojúhelníka* je shora omezen číslem π, to ještě ale nemusí znamenat, že tomu tak je i v Lobačevského geometrii. V $\mathbb{L}$ jsem používal mocný nástroj — diferenciální geometrii, vše z toho, co jsem zatím udělal, by šlo provést i čistě abstraktně, když bychom vyšli z axiomů a postupovali deduktivním způsobem.

Závěr

Do celého seriálu se mi nepovedlo vměstnat aplikace probírané teorie. Na první pohled se totiž může zdát, že je to pouze matematická hříčka bez praktického uplatnění. Skutečně, v počátcích této teorie na ní bylo takto opovržlivě pohlíženo. Až s rozvojem moderní fyziky se neeukleidovské geometrii dostalo zadostiučinění, stala se základním nástrojem pro popis gravitace. A mezi námi matematiky, obecná teorie relativity není nic jiného než geometrie.

Zájemcům o neeukleidovskou geometrii bych vřele doporučil další studium literatury s touto tématikou. Jedná se např. o tyto knihy:

Jan B. Pavlíček: Základy neeukleidovské geometrie Lobačevského,

B. V. Kutuzov: Lobačevského geometrie, elementy základů geometrie,

Václav Hlavatý: Úvod do neeuklidovské geometrie.

[25] Zjištění, že nežijeme v eukleidovském světě by tedy vedlo k masovému propouštění v ústavech pro míry a váhy a k jejich následné přeměně na muzea.