Povídání ke třetí sérii

Třetí série je věnována diofantickým rovnicím. To jsou zkrátka rovnice, u kterých hledáme řešení jen mezi celými čísly.[1] Diofantickou rovnicí n-tého stupně rozumíme rovnici $P(x_1, x_2, \ldots, x_k) = 0$, kde P je polynom k proměnných stupně n s celočíselnými koeficienty (neboli součet výrazů typu $ax_1^{c_1}x_2^{c_2}\ldots x_k^{c_k}$, kde c_1, c_2, … , c_k jsou nezáporná celá čísla, jejichž součet je nejvýše n). I zde nás zajímají jenom celočíselná řešení této rovnice.

Na řešení diofantických rovnic neexistuje nějaká obecná metoda, avšak při louskání těchto problémů můžeš s úspěchem aplikovat různé zajímavé vlastnosti celých čísel. Je dobré si uvědomit, že platí:

- Druhá mocnina přirozeného čísla dává při dělení číslem 8 jeden z těchto tří zbytků: 0, 1, 4.

Pomocí této vlastnosti můžeme například ukázat, že neexistují celá čísla x, y, pro která platí $x^2 + y^2 = 8^{1000} + 3$. Jak si totiž sám snadno rozmyslíš, dává pravá strana při dělení číslem 8 zbytek 3 a levá takový zbytek nemůže při dělení číslem 8 nikdy dosáhnout. Podobně můžeš uvažovat i u některých úloh třetí série.

- Jsou-li a a b nesoudělná čísla taková, že jejich součin je roven druhé mocnině přirozeného čísla, tj. $a \cdot b = j^2$ pro nějaké celé číslo j, pak i čísla a, b jsou druhé mocniny.

Podobné tvrzení si snadno zformuluješ i pro třetí mocniny atd. Důkaz uvedených dvou vlastností celých čísel není těžký a úvahy podobného charakteru můžeš (ale samozřejmě nemusíš) využít při řešení našich úloh.

Dále se Ti může hodit Fermatova věta (viz řešení příkladu 8 z druhé série) a další myšlenky uvedené v autorském řešení prvních dvou sérií.

Ještě připomeňme dva pojmy, které vystupují v šesté úloze. Aritmetickým průměrem dvou čísel a, b rozumíme $\frac{a+b}{2}$, jejich geometrický průměr je číslo $\sqrt{ab}$.

[1] Pod označením diofantická rovnice se může skrýt i rovnice, u které nás zajímají i racionální řešení, ale to není případ příkladů třetí série.

3. série

Téma: Diofantické rovnice

Termín odeslání: 14. PROSINCE 1998

1. ÚLOHA (3 BODY)

(a) Chceme vydlaždičkovat obdélníkovou místnost o rozměrech 120×215 a máme k dispozici dva druhy dlaždiček: o rozměrech 20×20 a 15×30. Kolik čtvercových a kolik obdélníkových dlaždiček potřebujeme, nechceme-li je lámat? Najděte všechny možnosti.

(b) Řešte úlohu uvedenou v části (a) v případě, že chceme vydlaždičkovat jen výklenek o rozměrech 70×95.

2. ÚLOHA (3 BODY)

Pro která k přirozená má rovnice $2^k = x^2 + y^2 + z^2$ řešení v kladných celých číslech?

3. ÚLOHA (3 BODY)

Nalezněte všechna celá čísla x, y, která splňují

$$3x^2 + 2x + 1 = 5y^2.$$

4. ÚLOHA (5 BODŮ)

Nalezněte všechna celá čísla x, y, která splňují

$$x^3 + 1 = y^4.$$

5. ÚLOHA (5 BODŮ)

(a) Nalezněte všechna celá čísla x, y, z, která splňují

$$x^4 + y^4 = 1998z^2.$$

(b) Jak byste tuto úlohu řešili loni?
Přesněji: ptáme se na všechna celá čísla x, y, z, která splňují

$$x^4 + y^4 = 1997z^2.$$

6. ÚLOHA (5 BODŮ)

Aritmetický průměr dvou kladných celých čísel je o dvě menší než dvojnásobek geometrického průměru těchto čísel. Jaká jsou to čísla? Najděte všechna řešení.

7. ÚLOHA (5 BODŮ)

Může být pro nějaká přirozená čísla m, n ($n \geq 2$) výraz

$$\sqrt[n]{\left(\frac{m+\sqrt{m^2-4}}{2}\right)^8 + \frac{1}{\left(\frac{m+\sqrt{m^2-4}}{2}\right)^8}}$$

roven sudému přirozenému číslu?

8. ÚLOHA (5 BODŮ)

Žil byl v jedné jeskyni čaroděj Tomáš, který neuměl nic jiného než řešit diofantické rovnice stupně maximálně 4. Přišel za ním ježidědek Radek a pokusil se ho vyděsit ošklivou rovnicí devatenáctistého devadesátého osmého stupně. Pomozte našemu milému čaroději.
Pro suchary: Dokažte, že každou diofantickou rovnici lze převést na diofantickou rovnici nejvýše čtvrtého stupně.

Řešení 3. série

1. úloha

(a) Chceme vydlaždičkovat obdélníkovou místnost o rozměrech 120×215 a máme k dispozici dva druhy dlaždiček: o rozměrech 20×20 a 15×30. Kolik čtvercových a kolik obdélníkových dlaždiček potřebujeme, nechceme-li je lámat? Najděte všechny možnosti.

(b) Řešte úlohu uvedenou v části (a) v případě, že chceme vydlaždičkovat jen výklenek o rozměrech 70×95.

(a) Místnost má obsah 25800, čtvercová dlaždička 400 a obdélníková dlaždička 450. Sestavíme rovnici (můžeme zkrátit padesáti):

$$516 = 8k + 9l\,,$$

kde k je počet čtvercových a l počet obdélníkových dlaždiček, které použijeme. Najdeme jedno řešení: 516 není dělitelné osmi, ale $516 - 4 \cdot 9 = 480$ už osmi dělitelné je, tedy jedno řešení je $l = 4, k = 60$. Rovnici převedeme do tvaru:

$$0 = 8(k-60) + 9(l-4)\,.$$

Protože čísla 8 a 9 jsou nesoudělná, musí být nutně $k - 60$ dělitelné devíti a $l - 4$ dělitelné osmi. Odtud plyne, že všechna další řešení diofantické rovnice dostaneme tak, že k budeme zmenšovat o 9 a l zvětšovat o 8, tj. všechna řešení jsou: $[60,4]$, $[51,12]$, $[42,20]$, $[33,28]$, $[24,36]$, $[15,44]$ a $[6,52]$. Ještě musíme ověřit, že skutečně můžeme rozmístit dlaždičky tak, aby pokrývaly celou podlahu místnosti. Stačí vydlaždičkovat čtyřmi obdélníkovými dlaždicemi okrajový pás 120×15, šesti čtvercovými pás na druhém okraji 120×20 a zbytek rozdělit na čtverce 60×60 a každý z nich vydlaždičkovat dlaždicemi jednoho typu.

(b) V tomto případě dostaneme dvě řešení diofantické rovnice $133 = 8k + 9l$, a to $[11,5]$ a $[2,13]$, avšak dlaždičky se nám do výklenku nepovede naskládat. Řešíme-li totiž rovnici pro kratší stranu:

$$70 = 20a + 15b\,,$$

dostaneme jediné řešení $a = 2$, $b = 2$, tedy každá úsečka rovnoběžná s kratší stranou musí protínat čtvercové dlaždice ve čtyřiceti jednotkách délky a obdélníkové ve třiceti, což znamená, že čtvercové dlaždice by musely zabírat celkovou plochu $40 \times 95 = 3800$, což ale není dělitelné jejich obsahem. Úloha (b) tedy nemá řešení.

Poznámky opravovatele: Většina řešitelů sestavila v (a) i v (b) diofantickou rovnici, kterou s většími či menšími potížemi vyřešila. Mnozí se s tím však spokojili a ani je nenapadlo ověřit, zda jejich výsledky jsou řešeními původní úlohy. Hodně řešitelů navrhlo správně způsob, jak v (a) rozmístit dlaždice pro všech sedm řešení diofantické rovnice, někteří našli jen některá řešení. V části (b) bohužel mnoho řešitelů uvedlo svou domněnku, že řešení neexistuje bez důkazu, nebo se ji pokoušeli dokázat, ovšem neúspěšně.

2. úloha

Pro která k přirozená má rovnice $2^k = x^2 + y^2 + z^2$ řešení v kladných celých číslech?

Zřejmě pro $k = 1$ rovnice řešení nemá, neboť levá strana rovnice je pak rovna dvěma, kdežto pravá strana bude aspoň 3. Ani pro $k = 2$ řešení neexistuje (pak by musela být jedna z druhých mocnin rovna 2). Tedy $k \geq 3$ a levá strana je dělitelná čtyřmi. Budeme postupovat indukcí podle k: předpokládejme, že pro $k = n$ $(n \geq 1)$ řešení neexistuje a dokážeme, že pak neexistuje řešení ani pro $k = n + 2$. Sporem: nechť řešení pro $k = n + 2$ existuje, tj. $2^{n+2} = x^2 + y^2 + z^2$. Druhá mocnina přirozeného čísla dává po dělení čtyřmi vždy zbytek 1 nebo 0. Tedy má-li být součet tří druhých mocnin dělitelný čtyřmi, musí být všechny dělitelné čtyřmi, tj. všechna čísla x, y, z dělitelná dvěma. Pak ale čísla $a = x/2$, $b = y/2$ a $c = z/2$ jsou celá kladná a řeší rovnici $2^n = a^2 + b^2 + c^2$, což je spor s indukčním předpokladem.

Poznámky opravovatele: Úloha bola jednoduchá a väčšina riešitelov ju vyriešila správne. Ostatní urobili aspoň jednu z následujúcich chýb:

(1) považovali číslo 0 za celé kladné
(2) našli iba nutnú podmienku pre čísla x, y, z, ale nie postačujúcu, a z toho vyvodili nesprávný uzáver, že rovnica má riešenie pre každé k.

Elegantné riešenia (a bolo ich pomerně dost) som odmenil $+i$.

3. úloha

Nalezněte všechna celá čísla x, y, která splňují

$$3x^2 + 2x + 1 = 5y^2.$$

Přepišme si poněkud levou stranu naší diofantické rovnice, dostaneme $2x^2+(x+1)^2 = 5y^2$. Nyní se stačí zamyslet, jaké zbytky mohou dávat obě strany naší rovnosti při dělení číslem 8. Přitom využíjeme toho, že (jak si sám snadno ověříš) liché číslo dává při dělení číslem 8 zbytek 1, sudé buď 0, nebo 4. Nejprve zkoumejme levou stranu. Pokud je x sudé, dává levá strana zbytek jedna, pokud je x liché může při dělení osmi dát jeden ze zbytků 2, nebo 6. Pravá strana však při dělení osmi může dát jen tyto zbytky: 0, 4 nebo 5. Žádné z těchto čísel však není rovno některému z možných zbytků při dělení levé strany číslem 8. Z tohoto důvodu neexistují žádná celá čísla x, y, která by řešila naši rovnici (jinak by musela levá i pravá strana dávat stejný zbytek při dělení osmi, což z předcházejících úvah není možné).

Poznámky opravovatele: Téměř všichni řešitelé vyřešili úlohu správně. Někteří volili zbytečně složitý postup (např. přes koncové cifry nebo přes diskriminanty), ale řešení vždy spočívalo v porovnávání levé a pravé strany modulo 5 (nabízí se už ze zadání rovnice), modulo 8 (podle rady v úvodní poznámce) či modulo jiné číslo (takové řešení však bylo podstatně složitější).

4. úloha

Nalezněte všechna celá čísla x, y, která splňují

$$x^3 + 1 = y^4.$$

Ukážeme, že rovnice $x^3 + 1 = y^4$ má právě tři celočíselná řešení a to $x = 0$, $y = 1$, $x = 0$, $y = -1$ a $x = -1$, $y = 0$. Důkaz provedeme sporem. Budeme předpokládat, že máme taková x, y, $x \neq 0, y \neq 0$, pro která platí $x^3 + 1 = y^4$, a tuto skutečnost dovedeme ke sporu.

Po drobných úpravách naší rovnice dostáváme

$$x^3 = y^4 - 1 = (y^2 - 1)(y^2 + 1) = (y - 1)(y + 1)(y^2 + 1).$$

Označme největší společný dělitel čísel $y^2 - 1$ a $y^2 + 1$ jako číslo d. Z definice největšího společného dělitele vidíme, že platí $d \mid y^2 + 1$ a $d \mid y^2 - 1$, tedy d dělí i rozdíl těchto čísel $d \mid (y^2 + 1) - (y^2 - 1) = 2$. Vidíme proto, že přirozené číslo d dělí číslo 2, tedy buď $d = 1$, nebo $d = 2$.

Předpokládejme nejprve, že $d = 1$. Čísla $y^2 - 1$, $y^2 + 1$ jsou tedy nesoudělná a jejich součin se dle naší rovnice rovná x^3, tj. třetí mocnině celého čísla. Jelikož jsou nesoudělná a $x \neq 0$, musí být i čísla $y^2 - 1$, $y^2 + 1$ rovné třetím mocninám celého čísla. To však není možné, neboť jejich rozdíl je dvě a y je dle předpokladu nenulové. Tím jsme v tomto případě dospěli ke sporu.

Nyní se budeme zabývat druhou možností. Předpokládejme proto, že $d = 2$. To znamená, že čísla $y^2 - 1$, $y^2 + 1$ jsou obě sudá, tj. y je liché. Můžeme ho proto psát ve tvaru $y = 2k + 1$, kde k je nějaké celé číslo (různé od 0, -1). V tomto případě musí x být sudé a dá se tudíž psát ve tvaru $x = 2j$ pro j celé. Dosadíme-li do naší rovnice za x a y, dostaneme

$$(2j)^3 = (y-1)(y+1)(y^2+1) = (2k) \cdot (2(k+1)) \cdot ((2k+1)^2 + 1) =$$

$$= 8k \cdot (k+1) \cdot (2k(k+1) + 1),$$

což po zkrácení osmi dává vztah $j^3 = k(k+1)(2k(k+1)+1)$. Dle předpokladu je $x \neq 0$, proto také $j \neq 0$. Snadno nyní nahlédneme, že v poslední rovnici máme napravo součin tří nesoudělných čísel. Tj. dle již využitých úvah je každé z nich rovno třetí mocnině celého čísla. Tedy obě čísla k i $k+1$ musí být třetími mocninami nenulového celého čísla, což je evidentně nesmysl. Tím jsme i v tomto případě dostali spor.

Tím jsme sporem ukázali, že pro nenulová x, y nemá naše rovnice řešení. Pokud $x = 0$, pak naše rovnice přechází na vztah $y^4 = 1$, který splňují dvě hodnoty y a to $y = 1$ a $y = -1$. Případ $y = 0$ nám dává řešení $x = -1$, $y = 0$. Všechna řešení naší rovnice proto jsou $x = 0$, $y = 1$; $x = 0$, $y = -1$; $x = -1$, $y = 0$ a žádné další není.

Poznámky opravovatele: Většina správných řešení využívala stejných myšlenek jako autorské řešení. Nejvíce jsem byl spokojen s řešením *Alice Maškové.*

Nejčastější chyba zpočívala v mylné úvaze, že z naší rovnice po přepsání do tvaru $x^3 + 1 = (x+1)(x^2 - x + 1) = y^4$ plyne, že závorky $(x+1)$ a $(x^2 - x + 1)$ můžou nabývat jen hodnot $1, y, y^2, y^3$, nebo y^4. To je však pravda jen tehdy, když je číslo y prvočíslem. Pro složené y může nastat spousta dalších případů. Například pro $y = 6 = 2 \cdot 3$ není v předchozím rozebrán například případ, že jedna závorka je rovna 2^4 a druhá 3^4. Spoustu dalších zapomenutých možností si již čtenář vymyslí sám.

5. úloha

(a) Nalezněte všechna celá čísla x, y, z, která splňují

$$x^4 + y^4 = 1998z^2.$$

(b) Jak byste tuto úlohu řešili loni?
Přesněji: ptáme se na všechna celá čísla x, y, z, která splňují

$$x^4 + y^4 = 1997z^2.$$

Snadno nahlédneme, že v obou částech máme triviální řešení $x = 0$, $y = 0$ a $z = 0$. V obou případech ukážeme, že jiná x, y, z neexistují. Tuto skutečnost nahlédneme sporem.

(a) Předpokládejme pro spor, že taková nenulová x, y, z existují. Označme největší společný dělitel těchto čísel jako d. Pak je levá strana naší rovnice dělitelná číslem d^4, proto i pravá je dělitelná tímto číslem. Pokud je $d^2 \mid z$, dostaneme po zkrácení naší rovnice číslem d^4, rovnici stejného tvaru, která má již nesoudělná řešení, tj. $a^4 + b^4 = 1998c^2$. Pokud není[2] $d^2 \mid z$, pak zkrácením d^4 dostaneme z naší rovnice rovnici $a^4 + b^4 = 2 \cdot 3 \cdot 37c^2$. V každém případě tedy dostaneme rovnici, jejíž pravá strana je dělitelná číslem 3 a levá obsahuje součet čtvrtých mocnin dvou nenulových celých čísel. Máme tedy $3 \mid a^4 + b^4$, kde a, b jsou nesoudělná čísla. Tedy ani jedno z nich nemůže být dělitelné[3] číslem 3. Odtud vidíme, že platí $3 \mid (a^2-1)(a^2+1)$ a $3 \mid (b^2-1)(b^2+1)$. Když poslední dva vztahy odečteme od a^4+b^4 a využijeme-li $3 \mid a^4+b^4$, máme po jednoduché úpravě $3 \mid 2$, což je hledaný spor.

(b) Nejprve si uvědomíme, že pokud existují nějaká řešení této rovnice, pak existují i po dvou nesoudělná řešení této rovnice. Ve stručnosti řečeno ji zkrátíme největším společným dělitelem těchto čísel. *(Podrobně si tento krok rozmysli!)* Jelikož číslo 1997 dělí pravou stranu naší rovnice, musí dělit i levou. Vidíme proto, že $1997 \mid x^4 + y^4$, kde x, y jsou nesoudělná čísla. I v tomto případě nahlédneme, že tato skutečnost není možná. Vyjdeme z identity, kterou si snadno ověříš roznásobením uvedených závorek:

$$x^{1996} + y^{1996} = (x^4)^{499} + (y^4)^{499} = (x^4 + y^4) \cdot \Big((x^4)^{498} - (x^4)^{497} \cdot (y^4) +$$
$$+ (x^4)^{496} \cdot (y^4)^2 - (x^4)^{495} \cdot (y^4)^3 + \cdots + (x^4)^2 \cdot (y^4)^{496} - (x^4) \cdot (y^4)^{497} + (y^4)^{498}\Big).$$

Z této rovnosti vidíme, že také platí $1997 \mid x^{1996} + y^{1996}$. Na druhé straně z *Fermatovy věty* (uvedli jsme ji jako *lemma 2* v minulých komentářích) dostáváme vztahy $1997 \mid x^{1996} - 1$ a $1997 \mid y^{1996} - 1$. Zkombinujeme-li poslední dvě skutečnosti s faktem $1997 \mid x^{1996} + y^{1996}$, vidíme, že $1997 \mid 2$, což je opět hledaný spor.

Poznámky opravovatele: V příkladu šlo mimo postupu ve vzorovém řešení využít zbytků modulo 8, 16 apod. Případ (a) se dal řešit také modulo 37 analogicky, jako (b) ve vzorovém řešení. Pokud jsi oba případy zvládnul, patříš mezi ty, kteří dostali 5 bodů, za některé těžkopádnější postupy jsem strhával imaginární body. Ti, kteří správně vyřešili jen jednu část (zpravidla (a)) dostali 3 body. Častou chybou v jinak korektních postupech bylo přehlédnutí nulového řešení, což znamenalo bod dolů.

6. úloha

Aritmetický průměr dvou kladných celých čísel je o dvě menší než dvojnásobek geometrického průměru těchto čísel. Jaká jsou to čísla? Najděte všechna řešení.

Máme řešit rovnici

$$\frac{a+b}{2} + 2 = 2\sqrt{ab} \tag{1}$$

[2]Vzhledem k prvočíselnému rozkladu čísla $1998 = 2 \cdot 3^3 \cdot 37$ a vzhledem ke skutečnosti, že $d^4 \mid 1998z^2$ a $d^2 \mid z^2$, vidíme, že tento druhý případ nastane jen tehdy, když z je dělitelné lichou mocninou čísla tři.

[3]Kdyby třeba a bylo dělitelné číslem 3, pak by dle vztahu $3 \mid a^4 + b^4$ i číslo b muselo být dělitelné třemi a čísla a, b by byla soudělná.

v kladných celých číslech. Nejprve se podíváme na její řešení v číslech reálných: po umocnění na druhou a úpravách dostaneme kvadratickou rovnici pro a s parametrem b:

$$a^2 - 2a(7b-4) + (b+4)^2 = 0\,.$$

Tato rovnice má v reálných číslech nejvýše 2 řešení:

$$a_{1,2} = 7b - 4 \pm \sqrt{(7b-4)^2 - (b+4)^2} = 7b - 4 \pm 4\sqrt{b(3b-4)}\,. \tag{1}$$

Pokud je tedy dvojice (a, b) řešením rovnice (1), musí splňovat (2). Ze symetrie rovnice (1) plyne, že pak i dvojice (b, a) je jejím řešením, tedy vztah (2) musí být splněn i v případě, že zaměníne a a b (ne nutně se stejným znaménkem před odmocninou).

Vidíme (ze vztahu (2)), že pro $b = 1$ nemá rovnice řešení, pro $b = 2$ získáme $a_1 = 2$, $a_2 = 18$. Nyní předpokládejme, že máme řešení (x, y), $2 \le x < y$. Dosadíme-li do (2) za b číslo y, dostaneme dva kořeny (označme je x_1, x_2). Protože žádné další číslo (kromě těchto dvou kořenů) nevyhovuje spolu s y rovnici (1), musí být x_1 nebo x_2 rovno x (nechť je to $x_1 = x < y$). Je vidět, že pro $b \ge 2$ je $7b - 4 + 4\sqrt{b(3b-4)} > b$, tedy $x_2 = 7y - 4 + 4\sqrt{y(3y-4)} > y$. Pokud x a y jsou celá, pak jistě také x_2 je celé, neboť ze vztahu (2) musí platit $x + x_2 = x_1 + x_2 = 14y - 8$ (odmocnina se jednou přičte a jednou odečte).

Definujme nyní rekurentně posloupnost: $a_0 = a_1 = 2$ a $a_{k+1} = 7a_k - 4 + 4\sqrt{a_k(3a_k - 4)}$ pro $k = 1, 2, 3, \ldots$ Z předchozího plyne, že posloupnost je tvořena celými čísly, kromě prvních dvou členů je rostoucí a každé dva po sobě jdoucí členy posloupnosti jsou řešením rovnice (1).

Nyní bychom chtěli dokázat, že žádná další kladná celočíselná řešení rovnice (1) neexistují. Budeme dokazovat sporem: Nechť existuje nějaké další řešení (x, y). Pokud by bylo $x = y$, dostaneme snadno, že jediné řešení s touto vlastností je $x = y = 2$, které už v posloupnosti je. Nechť tedy bez újmy na obecnosti je $x < y$. Nyní mezi všemi kladnými celočíselnými řešeními, která nejsou v posloupnosti vybereme ta řešení (x, y), která mají nejmenší x (první složku uspořádané dvojice). Ze vztahu (2) najdeme k tomuto x čísla y_1 (se znaménkem mínus před odmocninou) a y_2 (se znaménkem plus před odmocninou). Pokud by bylo $x = 2$, bylo by $y_1 = 2$ a $y_2 = 18$, ale tato řešení jsou v posloupnosti, tedy $x > 2$. Stačí dokázat, že $y_1 < x$, pak totiž řešení (y_1, x) je celočíselné a má první složku menší než řešení (x, y) a tedy je v posloupnosti $\{a_k\}$. Protože však y_2 dostaneme dosazením x do vztahu (2), je také y_2 v této posloupnosti, což je spor s tím, že řešení (x, y_1) nebo (x, y_2) nejsou v této posloupnosti. Důkaz, že $y_1 < x$: je-li $x > 2$, pak $(x-2)^2 + 2x^2 - 8 > 0$, tj. $3x^2 - 4x - 4 > 0$, tj. $12x^2 - 16x > 9x^2 - 12x + 4 = (3x-2)^2$, po odmocnění a přenásobení dvěma máme $4\sqrt{x(3x-4)} > 6x - 4$, tj. $x > 7x - 4 - 4\sqrt{x(3x-4)} = y_1$.

Tím jsme dokázali, že jsme skutečně našli všechna řešení rovnice (1), už zbývá jen vyjádřit tato řešení explicitně. Víme, že posloupnost $\{a_k\}$ vyhovuje rovnici:

$$a_{k-1} + a_{k+1} = 14a_k - 8\,. \tag{3}$$

Nejprve vyřešíme tzv. homogenní rovnici

$$b_{k+1} - 14b_k + b_{k-1} = 0\,, \tag{4}$$

očekáváme řešení ve tvaru $b_k = \lambda^k$. Dosadíme-li do rovnice (4), můžeme zkrátit λ^{k-1} a dostaneme $\lambda^2 - 14\lambda + 1 = 0$. Tuto rovnici vyřešíme a dostaneme

$$\lambda_{1,2} = 7 \pm 4\sqrt{3} = (2 \pm \sqrt{3})^2 .$$

Je vidět, že pokud $b_k = \lambda_1^k$ i $b_k = \lambda_2^k$ splňují rovnici (4), pak také $b_k = c\lambda_1^k + d\lambda_2^k$ vyhovuje této rovnici. Dá se ukázat, že to jsou všechna řešení, neboť každá posloupnost, která vyhovuje rovnici (3), je jednoznačně určena svými prvními dvěma členy a pro každé dvě čísla x, y najdeme konstanty c a d tak, aby $b_0 = x$ a $b_1 = y$.

Nyní nám stačí najít jedno řešení rovnice (3) a všechna řešení rovnice (3) pak dostaneme tak, že k tomuto řešení přičteme všechna řešení rovnice (4). Budeme-li hledat konstantní řešení rovnice (3), tj. $a_k = z$, zjistíme, že vyhovuje $z = 2/3$. Dále budeme hledat konstanty c a d tak, aby $a_0 = a_1 = 2$: jednoduše do vyjádření $a_k = c(2+\sqrt{3})^{2k} + d(2-\sqrt{3})^{2k} + 2/3$ dosadíme za k nejdříve nulu, pak jedničku a získáme tak dvě rovnice pro neznámé c, d, které vyřešíme a dostaneme řešení

$$a_k = \frac{1}{3}((2+\sqrt{3})^{2k-1} + (2-\sqrt{3})^{2k-1} + 2) .$$

Všechna řešení rovnice (1) jsou pak uspořádané dvojice (a_k, a_{k+1}) a (a_{k+1}, a_k), $k = 0, 1, 2, \ldots$

Poznámky opravovatele: Po jednom bodu jsem strhával za to, že řešitel nedokázal, že našel všechna řešení nebo že řešení, která našel, jsou celá čísla nebo že napsal pouze rekurentní předpis pro všechna řešení a nevyjádřil je explicitně.

7. úloha

Může být pro nějaká přirozená čísla m, n $(n \geq 2)$ výraz

$$\sqrt[n]{\left(\frac{m+\sqrt{m^2-4}}{2}\right)^8 + \frac{1}{\left(\frac{m+\sqrt{m^2-4}}{2}\right)^8}}$$

roven sudému přirozenému číslu?

Klíčem k řešení našeho příkladu bude identita, jejíž platnost si laskavý čtenář sám snadno ověří (buď přímým roznásobením, nebo se využije toho, že číslo $\frac{m+\sqrt{m^2-4}}{2}$ je řešením jisté kvadratické rovnice). Platí

$$\left(\frac{m+\sqrt{m^2-4}}{2}\right)^8 + \frac{1}{\left(\frac{m+\sqrt{m^2-4}}{2}\right)^8} = \left((m^2-2)^2-2\right)^2 - 2.$$

S pomocí tohoto vztahu si naši úlohu můžeme přeformulovat na následující úlohu:
Ptáme se, zda existují celá čísla n, m, k, $n \geq 2$, pro která platí

$$((m^2-2)^2-2)^2 - 2 = 2^n \cdot k^n .$$

Jelikož máme $n \geq 2$, je pravá strana určitě dělitelná čtyřmi, kdežto levá strana čtyřmi dělitelná být nemůže. *Podrobně si rozmysli!*

Tedy žádná n, m, která by vyhovovala požadavkům naší úlohy, neexistují.

Poznámky opravovatele: Úspěšnost řešitelů v této úloze nebyla moc vysoká. Většinou řešitelé mylně předpokládali, že určitý výraz (nejčastěji $m + \sqrt{m^2 - 4}$) je přirozené, resp. celé číslo, případně s ním mlčky jako s celým pracovali — argumentovali paritou či dělitelností. Ti, kdo úlohu vyřešili, použili v podstatě stejný princip jako autorské řešení, imaginární body jsem tedy pouze strhával v případě zbytečné zdlouhavosti.

8. úloha

Žil byl v jedné jeskyni čaroděj Tomáš, který neuměl nic jiného než řešit diofantické rovnice stupně maximálně 4. Přišel za ním ježidědek Radek a pokusil se ho vyděsit ošklivou rovnicí devatenáctistého devadesátého osmého stupně. Pomozte našemu milému čaroději.

Pro suchary: Dokažte, že každou diofantickou rovnici lze převést na diofantickou rovnici nejvýše čtvrtého stupně.

Poznámka: Slovo „diofantickou“ můžeme ze zadání úlohy klidně vypustit.

Lemma. *Každou soustavu diofantických rovnic stupně nejvýše n, kde $n > 2$, mohu nahradit přidáním nových proměnných soustavou rovnic stupně nejvýše $n - 1$.*

Důkaz: Každý člen původní soustavy rovnic stupně n ve tvaru $ax_1x_2 \dots x_n$ ($a \in \mathbb{R}$, $x_1, \dots,$ x_n jsou proměnné, které nemusí být nutně různé) nahradím členem $ayx_3 \dots x_n$, kde y je nová proměnná, a k soustavě přidám rovnici $x_1x_2 - y = 0$.

Tímto postupem dostanu soustavu rovnic stupně nejvýše $n - 1$. Hodnoty nově zavedených proměnných lze jednoznačně vyjádřit pomocí původních proměnných $\Rightarrow$ každé řešení $x_1, \dots, x_n$ lze jednoznačně rozšířit na řešení nové soustavy $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m$ a naopak.

S využitím lemmatu tedy postupně převedeme danou rovnici na soustavu rovnic stupně nejvýše 2. Zapišme tuto soustavu ve tvaru $p_1 = 0$, $p_2 = 0$, $\dots$, $p_k = 0$ (p_i jsou nejvýše kvadratické polynomy). Potom tuto soustavu rovnic můžeme nahradit jedinou rovnicí, a to $p_1^2 + p_2^2 \cdots + p_k^2 = 0$, neboť druhé mocniny reálného čísla jsou zjevně nezáporné a tedy výraz $p_1^2 + p_2^2 + \cdots + p_n^2$ je roven nule právě tehdy, když jsou všechna $p_1, \dots, p_n$ rovna nule. Z toho, že $p_1, \dots, p_n$ jsou stupně nejvýše 2, vyplývá, že tato rovnice bude stupně nejvýše 4.

Poznámky opravovatele: Milého čaroděje jste všichni až na Alici Maškovou nechali ve štychu. Měli byste se stydět. Taková jednoduchá úloha.