Povídání ke čtvrté sérii

Ve čtvrté sérii se Ti můžou hodit některé známé nerovnosti, například:

AG-nerovnost. *Nechť* $x_1, \ldots, x_n$ *je* n*-tice nezáporných reálných čísel, kde* n *je libovolné přirozené číslo. Pak platí nerovnost*

$$\sqrt[n]{x_1 \cdot \ldots \cdot x_n} \leq \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}.$$

To je tzv. nerovnost mezi aritmetickým a geometrickým průměrem n-tice čísel (zkráceně AG-nerovnost). Tuto nerovnost můžeš různě modifikovat, například, když položíš $x_i = t_i^n$ $(i = 1, \ldots, n)$, pak se Ti tato nerovnost přepíše na tvar $t_1^n + \cdots + t_n^n \geq n \cdot t_1 \cdot \ldots \cdot t_n$.

Cauchy–Schwarzova nerovnost. *Nechť* $a_1, \ldots, a_n, b_1 \ldots, b_n$ *jsou reálná čísla. Pak platí*

$$|a_1 \cdot b_1 + \cdots + a_n \cdot b_n| \leq \sqrt{(a_1^2 + \cdots + a_n^2) \cdot (b_1^2 + \cdots + b_n^2)}.$$

Obě uvedené nerovnosti můžeš ve svých řešeních používat bez důkazu.

Mnoho dalšího o nerovnostech můžeš čerpat z knížečky *Alois Kufner: Nerovnosti a odhady, Mladá Fronta, Praha 1975, edice Škola mladých matematiků, svazek číslo 39.*

4. série

Téma: Nerovnosti

Termín odeslání: 11. ledna 1999

1. úloha (3 body)

Pro která přirozená čísla n je číslo $\left(1 + \frac{1}{2n}\right)^n$ větší než číslo $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{\frac{n}{2}}$?

2. úloha (3 body)

Pro která reálná čísla x, y je číslo $\sqrt{x^2 + y^2}$ větší než číslo $2\sqrt{xy}$?

3. úloha (3 body)

Ukažte, že pro libovolnou n-tici kladných reálných čísel $x_1, x_2, \ldots, x_n$ platí nerovnost

$$x_1x_2x_3 + x_2x_3x_4 + x_3x_4x_5 + \cdots + x_{n-1}x_nx_1 + x_nx_1x_2 \leq x_1^3 + x_2^3 + \cdots + x_n^3.$$

4. ÚLOHA (5 BODŮ)

Mějme trojici reálných čísel a, b, c, která splňují vztahy $0 \le a \le b \le c \le \frac{\pi}{2}$. Ukažte, že pak

$$\sin(a+b) + \sin(a+c) + \sin(b+c) \le 2(1+\sqrt{2}) + \sin(a-b) + \sin(a-c) + \sin(b-c).$$

5. ÚLOHA (5 BODŮ)

Pro která přirozená čísla n, k platí nerovnost $\binom{n}{k} \ge (\frac{n}{k} - 1)^k$?

6. ÚLOHA (5 BODŮ)

Uvažujme polynom $P(x) = x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots + a_n$, kde $a_1, a_2, \ldots, a_n$ jsou nezáporná reálná čísla. Předpokládejme, že tento polynom má n reálných kořenů. Ukažte, že pak pro každé nezáporné x platí

$$P(x) \le \left(x + \frac{a_1}{n}\right)^n.$$

7. ÚLOHA (5 BODŮ)

Nechť $P(x)$ je polynom s nezápornými reálnými koeficienty, jejichž součet je roven jedné. Ukažte, že pak platí

$$P(x)^2 \le P(x^2).$$

8. ÚLOHA (5 BODŮ)

Nechť p, q, r jsou reálná řešení rovnice $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$. Pro která reálná čísla a, b, c je číslo $p^3 + q^3 + r^3 - 3pqr$ kladné?

Řešení 4. série

1. úloha

Pro která přirozená čísla n je číslo $\left(1 + \frac{1}{2n}\right)^n$ větší než číslo $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{\frac{n}{2}}$?

Jelikož n je přirozené, je $n > 0$. Přičteme-li k oběma stranám nerovnosti $n > 0$ výraz $4n^3 + 4n^2$, dostaneme po drobné úpravě $n(2n+1)^2 > (2n)^2(n+1)$, což po vydělení kladným výrazem $4n^3$ a další úpravě dává

$$\left(\frac{2n+1}{2n}\right)^2 > \frac{n+1}{n}, \text{ což lze přepsat na } \left(1 + \frac{1}{2n}\right)^2 > 1 + \frac{1}{n}.$$

Umocníme-li poslední nerovnost na $\frac{n}{2}$, zjistíme okamžitě, že pro libovolné přirozené číslo n je číslo $\left(1+\frac{1}{2n}\right)^n$ větší než číslo $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\frac{n}{2}}$.

Poznámky opravovatele: Naprostá většina řešení vykazovala správný postup, ne všechny však byly správně. Velmi častou chybou byla absence jakékoliv zmínky o ekvivalenci úprav či korektnosti odmocňování. Nemyslete si, že to je jen středoškolská „buzerace“. Nejen, že to je špatně z hlediska logického, ale opomenutí těchto úvah stálo mnohé z vás body v úloze č.6, kde odmocňování za všech situací možné nebylo, a přesto mnozí z vás s klidem odmocnili, čímž dokázali nepravdivé tvrzení.

Důvod, proč se má konstatovat, že úpravy jsou ekvivalentní, je zhruba tento: Když dokazujete nějaké tvrzení (např. že nerovnice má to a to řešení), vycházíte ze známých tvrzení a chcete se dobrat k dokazovanému. Neboli řešíte nerovnici v přesně opačném pořadí, než normálně. Proto musí být úpravy korektně proveditelné i v druhém směru, tj. ne jen shora dolů. Na důkaz toho, že jste si toho vědomi, se kupř. maluje vlevo ta dvojitá šipka. Jiným způsobem lze toto obejít tak, jako ve vzorovém řešení.

2. úloha

Pro která reálná čísla x, y je číslo $\sqrt{x^2+y^2}$ větší než číslo $2\sqrt{xy}$?

Předně si musíme uvědomit, že výraz $2\sqrt{xy}$ má smysl jenom tehdy, když x a y mají stejná znaménka. Omezme se zde jen na případ $x \geq 0$ a $y \geq 0$. (V případě $x \leq 0$ a $y \leq 0$ jsou úvahy zcela analogické, resp. ho čtenář sám snadno převede na námi vyšetřovaný případ. *Podrobně si promysli!*) Pokud je $x = 0$ a $y \neq 0$, nebo $x \neq 0$ a $y = 0$, pak snadno nahlédneme přímým dosazením, že pak číslo $\sqrt{x^2+y^2}$ je větší než $2\sqrt{xy} = 0$. Případ $x = 0 = y$ je také triviální.

Stačí se proto omezit jen na x, y, která jsou obě kladná, zajímají nás řešení nerovnice $\sqrt{x^2+y^2} > 2\sqrt{xy}$. Umocníme-li tuto nerovnost na druhou, získáme $x^2 + y^2 > 4xy$. Nyní vydělíme naši nerovnost číslem x^2 a dostaneme

$$1+\left(\frac{y}{x}\right)^2 > 4\frac{y}{x}.$$

Provedeme-li substituci $t = \frac{y}{x}$, dostává naše nerovnost tvar $t^2 - 4t + 1 > 0$. Řešením této kvadratické nerovnice jsou intervaly $t \in (-\infty, 2-\sqrt{3})$ a $t \in (2+\sqrt{3}, \infty)$, proto jsou hledaná kladná x, y ta, pro která poměr $\frac{y}{x}$ je v uvedených intervalech.

Poznámky opravovatele: Přiznám se, že jsem opravdu žasl, kolik originálních cest k správnému řešení se vám podařilo vymyslet. Dlužno dodat, že těch cest k špatným řešením bylo ještě o něco více. Podivuhodné mi připadá, že řadě řešitelů vůbec nepřišlo divné, když jim řešení — této zjevně symetrické nerovnice — vyšlo nesymetricky.

Dále si mnozí z vás nevšimli, že aby úloha měla vůbec smysl, musí být výraz $xy \geq 0$, což vás zcela zbytečně stálo bod či i (pokud z pozdějších úvah jasně vyplývalo, že jste si tento fakt uvědomili a jen ho zapomněli zapsat).

Další kámen úrazu spočíval v tom, že řadě řešitelů nedošlo, že pro $y < 0$ je $(2+\sqrt{3})y < (2-\sqrt{3})y$. Obvyklý postih byl 1 bod.

Poslední chybou, které se dopustil větší počet řešitelů, bylo zanedbání řešení typu $x = 0$, $y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ (resp. $y = 0$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$) nebo zařazení $x = 0$, $y = 0$ mezi řešení.

3. úloha
Ukažte, že pro libovolnou n-tici kladných reálných čísel $x_1, x_2, \dots, x_n$ platí nerovnost

$$x_1x_2x_3 + x_2x_3x_4 + x_3x_4x_5 + \dots + x_{n-1}x_nx_1 + x_nx_1x_2 \le x_1^3 + x_2^3 + \dots + x_n^3.$$

Z nerovnosti mezi aritmetickým a geometrickým průměrem plyne:

$$x_ix_jx_k = \sqrt[3]{x_i^3x_j^3x_k^3} \le \frac{x_i^3 + x_j^3 + x_k^3}{3}\,.$$

Stačí si tedy napsat pravou stranu nerovnosti ve tvaru

$$\frac{x_1^3 + x_2^3 + x_3^3}{3} + \frac{x_2^3 + x_3^3 + x_4^3}{3} + \dots + \frac{x_n^3 + x_1^3 + x_2^3}{3}$$

a porovnat každý sčítanec nalevo s příslušným zlomkem napravo.

Poznámky opravovatele: Řešení byla víceméně v pořádku, jen ojediněle jsem strhával nějaké body. Úplně nejvíc se mi líbilo řešení *Jana Houšťka*, neboť dokázal i něco navíc a dostal tedy za to plus i.

4. úloha
Mějme trojici reálných čísel a, b, c, která splňují vztahy $0 \le a \le b \le c \le \frac{\pi}{2}$. Ukažte, že pak

$$\sin(a+b) + \sin(a+c) + \sin(b+c) \le 2(1+\sqrt{2}) + \sin(a-b) + \sin(a-c) + \sin(b-c).$$

Nejprve si uvědomíme, že sinus je lichá funkce, tedy $\sin(a-b) = -\sin(b-a)$ a dostáváme nerovnost

$$\sin(b+a) + \sin(b-a) + \sin(c+a) + \sin(c-a) + \sin(c+b) + \sin(c-b) \le 2(1+\sqrt{2})\,.$$

Dále využijeme součtových vzorců pro funkci sinus

$$\sin(b+a) = \sin b \cos a + \cos b \sin a$$
$$\sin(b-a) = \sin b \cos a - \cos b \sin a\,.$$

Vidíme, že sečtením těchto dvou rovnic dostaneme $\sin(b+a) + \sin(b-a) = 2\sin b \cos a$. Chceme tedy maximalizovat výraz

$$2(\sin b \cos a + \sin c \cos a + \sin c \cos b)\,. \qquad (1)$$

Protože a se vyskytuje pouze jako argument kosinu, bude výraz největší, když $\cos a$ bude největší, tedy $a = 0$. Podobně c se vyskytuje pouze jako argument sinu, tedy výraz bude největší pro $c = \pi/2$. Touto volbou neklademe žádné další podmínky na b, můžeme tedy za a a c dosadit a stačí maximalizovat výraz $M = \sin b + \cos b$. Protože tento výraz je nezáporný, nabývá svého maxima současně s druhou mocninou, umocněním na druhou dostaneme $M^2 = 1 + 2\sin b \cos b = 1 + \sin(2b)$, což je evidentně největší, pokud $2b = \pi/2$, tj. $b = \pi/4$. Tím jsme našli hodnoty a, b, c, pro které nabývá výraz (1) svého maxima, stačí dosadit a ověřit, že toto maximum je menší nebo rovno $2(1 + \sqrt{2})$.

Poznámky opravovatele: Skoro všichni řešitelé převedli úlohu pomocí součtových vzorců na jednodušší tvar. Poté dosadili za a a c, ale většina z nich zapomněla, že implikace $0 \le x \le 1 \Rightarrow xy \le y$ platí pouze za předpokladu, že $y \ge 0$. Za toto drobné opomenutí jsem se nakonec rozhodl strhávat jeden bod. Extrém funkce $\sin b + \cos b$ hledali někteří pomocí derivací (ne vždy zdůvodnili, že jde skutečně o maximum), jiní pomocí různých součtových vzorců.

5. úloha

Pro která přirozená čísla n, k platí nerovnost $\binom{n}{k} \ge (\frac{n}{k} - 1)^k$?

Pro každé i (pro něž $0 \le i < k$) platí $n - i \ge n - k$, $k - i \le k$. Tudíž $\frac{n-i}{k-i} \ge \frac{n-k}{k}$. Tudíž

$$\binom{n}{k} = \frac{n}{k} \cdot \frac{n-1}{k-1} \cdot \dots \cdot \frac{n-k+1}{1} \ge \left(\frac{n-k}{k}\right)^k = \left(\frac{n}{k} - 1\right)^k.$$

Uvažovaná nerovnost tedy platí kdykoli je $0 < k \le n$.

Poznámka1: Nepatrně obtížnějším postupem lze dokázat, že pro $0 < k \le n$ platí dokonce $\binom{n}{k} \ge (n/k)^k$.

Poznámka2: Do původního zadání se nám vloudila chybička, chtěli jsme po řešitelích najít všechny dvojice n, k, pro něž platí $\binom{n}{k} \ge \left(\frac{n}{k} - 1\right)^n$. Tento drobný rozdíl změnil poměrně snadnou úlohu v úlohu, jíž nikdo z řešitelů (ani z organizátorů) nevyřešil.

Poznámky opravovatele: Jak již bylo řečeno, do zadání se vloudila malá chybička, díky které šla úloha řešit jen velmi těžko. Nikdo z vás na žádné úplné řešení nepřišel, většina řešení se omezila pouze na konstatování faktu, že pro $n \ge k > n/2$ tvrzení platí vždy a pro $k > n$ jen pro n lichá. Myslím, že tyto snadno dokazatelné fakty objevilo daleko více lidí, než kolik nám je poslalo, takže jsem žádné body neuděloval. Výjimkou byl *Martin Hriňák*, který nám poslal odhad, že pro $k \le n/3$ tvrzení platit nemůže (nijak zvlášť složitý důkaz indukcí), což není o moc horší, než odhad v autorském řešení.

6. úloha

Uvažujme polynom $P(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \cdots + a_n$, kde $a_1, a_2, \ldots, a_n$ jsou nezáporná reálná čísla. Předpokládejme, že tento polynom má n reálných kořenů. Ukažte, že pak pro každé nezáporné x platí

$$P(x) \le \left(x + \frac{a_1}{n}\right)^n.$$

Pišme $P(x) = (x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n)$. Protože $P(x)$ má n reálných kořenů, jsou všechna x_i reálná a protože $P(x)$ má nezáporné koeficienty, jsou všechna x_i dokonce nekladná. Pro nezáporné x bude tedy každý z činitelů $x - x_i$ nezáporný. Použijme AG-nerovnost:

$$P(x) \le \left(\frac{(x - x_1) + (x - x_2) + \dots + (x - x_n)}{n} \right)^n = \left(x + \frac{a_1}{n} \right)^n$$

(využili jsme Viètův vztah $\sum_{i=0}^{n} x_i = -a_1$). Tím je důkaz hotov.

Poznámka: Z původního zadání vypadlo, že nerovnost se má dokazovat jen pro nezáporná x, tedy tvrzení neplatilo: protipříkladem je například polynom $(x+1)^2(x+3)$, o němž máme dokazovat, že je menší nebo roven $(x + 5/3)^3$, speciálně pro $x = -2$ máme tedy dokázat $1 \le (-1/3)^3$, což neplatí.

Poznámky opravovatele: Do zadání úlohy se bohužel vloudila chybička a tak jsem byl nucen k několika závažnějším rozhodnutím ohledně bodování. Jelikož si myslím, že zjištění, že zadaná nerovnost neplatí, by mělo řešitele podnítít k tomu, aby zkusil zjistit, kdy nerovnost platí (a drtivá většina řešitelů, kteří dokazované tvrzení vyvrátili, tak skutečně učinila), rozhodl jsem se udělovat za pouhé konstatování protipříkladu pouze 3 body,[1] abych mohl rozlišovat různě úspěšnou snahu řešitelů dokázat nerovnost pro $x \ge 0$. Někteří řešitelé nerovnost dokázali pro $x \ge 0$ a o případu $x < 0$ nekonstatovali nic. To jsem bral jako částečné řešení a uděloval jsem 3 body. Teď ještě něco o nejčastějších chybách. Mnoho řešitelů si neuvědomilo, že nerovnost mezi aritmetickým a geometrickým průměrem n čísel (dále jen AG) může použít jen tehdy, když jsou daná čísla nezáporná (a pak tedy někteří z nich nezjistili, že úloha neplatí), za to jsem strhával bod. Vůbec se mi nelíbilo, když řešitel postupoval tak, že vyšel z dokazované nerovnosti, kterou postupně upravoval, až mu vyšla AG, poté konstatoval, že důkaz je hotov. Někdy sice použité úpravy byly ekvivalentní, ale řešitel je formuloval ve formě implikace, někdy dokonce použité úpravy nebyly ekvivalentní. V každém případě je to logicky chybný postup a strhával jsem za něj bod.

7. úloha

Nechť $P(x)$ je polynom s nezápornými reálnými koeficienty, jejichž součet je roven jedné. Ukažte, že pak platí

$$P(x)^2 \le P(x^2).$$

Buď $P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$, kde $a_k \ge 0$ a $\sum_{k=0}^{n} a_k = 1$. Podle Cauchyho nerovnosti je

$$P(x)^2 = \left(\sum_{k=0}^{n} \sqrt{a_k} (\sqrt{a_k} x^k) \right)^2 \le \left(\sum_{k=0}^{n} a_k \right) \left(\sum_{k=0}^{n} a_k (x^2)^k \right) = P(x^2), \quad \text{c.b.d.}$$

[1] Prosím postižené výjimky, aby mě nekamenovaly, při špatně zadané úloze je někdy vskutku obtížné, ne-li nemožné, všechna řešení spravedlivě obodovat a může se to z různých pohledů jevit různě.

Poznámky opravovatele: Většina řešení byla podobná autorskému, tj. využívala Cauchyho nerovnost. Vyskytla se i řešení používající Jensenovu nerovnost, nerovnost mezi aritmetickým a geometrickým průměrem či tzv. Švrčkovu nerovnost (poslední dvě jmenované ale většinou vedly k chybným řešením, řešitelé úlohu vyřešili jen pro nezáporná x). Švrčkovu nerovnost (užil ji Robert Káldy) jsem předtím neznal[2] a protože mi připadá zajímavá, zde je:

Mějme obdélníkovou tabulku složenou z nezáporných čísel. Označme AG aritmetický průměr geometrických průměrů jednotlivých řádků, GA geometrický průměr aritmetických průměrů jednotlivých sloupců. Pak platí $GA \geq AG$.

V řešeních se často objevovaly následující dvě, skoro bych řekl začátečnické, chyby, a to i u zkušených řešitelů. První z nich je vzorec $\sqrt{x^2} = x$. Tento vztah samozřejmě platí pro nezáporná x, ne však už pro x záporná. Chceme-li obecně platný vztah, musíme psát $\sqrt{\mathbf{x^2}} = |\mathbf{x}|$. Druhou chybou byla úvaha, že pokud $a \leq b$, tak i $a^2 \leq b^2$. Tato úvaha pochopitelně opět platí pro nezáporná a, b, obecně však k platnosti nerovnosti $a^2 \leq b^2$ potřebujeme $-|\mathbf{b}| \leq \mathbf{a} \leq |\mathbf{b}|$, resp. $|a| \leq |b|$.

Za tyto chyby jsem strhával 1–2 body, podle toho, jak obtížné by bylo opravit příslušné řešení do bezchybné podoby.

8. úloha

Nechť p, q, r jsou reálná řešení rovnice $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$. Pro která reálná čísla a, b, c je číslo $p^3 + q^3 + r^3 - 3pqr$ kladné?

Podle Viètových vztahů musí pro kořeny a koeficienty polynomu platit:

$$\begin{aligned} -a &= p + q + r \\ b &= pq + pr + qr \\ -c &= pqr\,. \end{aligned}$$

Odtud dostáváme

$$\begin{aligned} -a^3 &= (p+q+r)^3 = p^3 + q^3 + r^3 + 3(p^2q + pq^2 + p^2r + pr^2 + q^2r + qr^2) + 6pqr \\ 3ab &= -3(p^2q + pq^2 + p^2r + pr^2 + q^2r + qr^2) - 9pqr\,. \end{aligned}$$

Sečtením těchto rovnic pak máme

$$p^3 + q^3 + r^3 - 3pqr = a(3b - a^2)\,.$$

Výraz pak bude kladný, právě když koeficienty budou splňovat nerovnici:

$$3ab > a^3\,.$$

[2] to je ovšem ostuda, neboť se jedná o speciální tvar známé Hölderovy nerovnosti pro více činitelů (pozn. red.)

Poznámky opravovatele: Většina řešení této úlohy by se dala rozdělit do třech skupin. První skupinu tvořila nesprávná řešení, kde řešitelé používali AG nerovnost pro čísla p^3, q^3, r^3, čímž dospěli k dokazované nerovnosti pro libovolná p, q, r. AG nerovnost však platí pouze pro nezáporná čísla, takže v tomto případě ji (obecně) použít nešlo. Druhou skupinu tvořila správná řešení v podstatě stejná jako autorské, založená na Viètových vztazích, která dospěla k nerovnosti $a(3b-a^2)>0$. Taková řešení jsem hodnotil $5+0i$.

Třetí skupina řešení hlouběji využila toho, že rovnice x^3+ax^2+bx+c má tři reálná řešení, a dospěla k podmínce $a<0$ a zároveň $3b\neq a^2$, tedy k jednodušší podmínce než autorské řešení. To lze provést například takto:

Vyjděme z nerovnosti $a(3b-a^2)>0$, která je podle autorského řešení ekvivalentní vyšetřované nerovnosti. Nyní ukažme, že $3b-a^2\leq 0$, pro každá p, q, r reálná. Budeme upravovat zřejmě splněnou nerovnost:

$$\begin{aligned}(p-q)^2+(q-r)^2+(r-p)^2&\geq 0\\ 2p^2+2q^2+2r^2-2(pq+qr+rp)&\geq 0\\ p^2+q^2+r^2+2(pq+qr+rp)-3(pq+qr+rp)&\geq 0\\ (p+q+r)^2-3(pq+qr+rp)&\geq 0\end{aligned}$$

což je podle Viètových vztahů právě dokazovaná nerovnost $3b-a^2\leq 0$. Takže nerovnost $a(3b-a^2)>0$ je ekvivalentní podmínce $a<0$ a zároveň $3b\neq a^2$.

Řešení, která dospěla až k této jednodušší podmínce, jsem hodnotil $5+2i$, (bez ohledu na složitost) a řešení, která se alespoň částečně zabývala dalšími omezujícími podmínkami na a, b, c, jsem hodnotil $5+i$.