Povídání k šesté sérii

Úlohy 6. série se týkají řešení funkcionálních rovnic, což jsou rovnice, ve kterých hledaná neznámá je nějaká funkce. V tomto textu popíšeme základní metody řešení funkcionálních rovnic. Kromě toho se budeme zabývat vlastnostni spojitých funkcí. Většinu jejich vlastností nebudeme dokazovat, ale při řešení příkladů se na ně můžeš bez důkazu odvolávát. Podrobněji se problematice funkcionálních rovnic věnuje např. knížečka *Ljubomir Davidov: Funkcionální rovnice, Mladá Fronta, Praha 1984, Škola mladých matematiků 55.*

Základní metoda řešení funkcionálních rovnic je tzv. substituční. Spočívá, řečeno co nejobecněji, v následujícím postupu: Předpokládáme, že už máme nějaké řešení funkcionální rovnice, a vhodnou volbou proměnných se snažíme najít explicitní tvar tohoto řešení. Poté ověříme, zda takto získaná funkce dané funkcionální rovnici skutečně vyhovuje. Objasníme to na jednoduchém příkladu.
Příklad: Najděte všechny funkce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, splňující $f(x+y) = f(x)+y$ pro každé $x, y \in \mathbb{R}$.
Řešení: Předpokládejme, že již máme nějakou funkci f řešící rovnici. Pak musí platit (označíme si $c = f(0)$ a dosadíme $x = 0$ do zadání) $f(y) = c + y$. Naopak dosadíme-li funkci f v takto zjištěném tvaru do zadání, zjistíme, že $f(y) = c+y$ řeší rovnici pro každé $c \in \mathbb{R}$. Tím je úloha vyřešena.

Teď se budeme zabývat spojitými funkcemi. Přesnou definici uvádět nebudeme, postačí nám intuitivní představa. Spojité funkce si můžeme přibližně představit jako ty, jejichž graf lze nakreslit jedním tahem — je souvislý. V podstatě většina běžných funkcí je spojitých. Funkce $f(x) = x$ je spojitá. Platí, že součet a součin dvou spojitých funkcí je spojitý. Odtud lze indukcí odvodit, že libovolná polynomická funkce[1] je spojitá. Dále pro $f(x), g(x)$ spojité je funkce $\frac{f(x)}{g(x)}$ spojitá v těch bodech, kde $g(x) \neq 0$. Další spojité funkce jsou např. $\sin x, \cos x, a^x, \log_a x$ pro $a > 0$. Je-li obor hodnot funkce $f(x)$ částí definičního oboru funkce $g(x)$, pak $g(f(x))$ je také spojitá. Dále je-li funkce $f(x)$ spojitá a ryze monotónní (rostoucí nebo klesající), pak i funkce inverzní k funkci $f(x)$ je spojitá. Pomocí těchto vlastností lze budovat z uvedených spojitých funkcí funkce nové.

Důležitá vlastnost spojitých funkcí je tzv. Darbouxova vlastnost nabývání mezihodnot. Je-li $f(x)$ spojitá, pak pro $x_1 < x_2, f(x_1) \neq f(x_2)$ funkce $f(x)$ nabývá na intervalu (x_1, x_2) všech hodnot mezi $f(x_1), f(x_2)$. Důsledkem tohoto je tvrzení, že je-li $f(x_1) < 0$ a $f(x_2) > 0$ (nebo naopak), pak existuje číslo $x_0 \in (x_1, x_2)$, pro něž $f(x_0) = 0$.

Dále vyložíme tzv. Cauchyovu metodu řešení funkcionálních rovnic, ve kterých hledáme pouze spojitá řešení. Nejdřív ale budeme potřebovat několik pojmů a tvrzení.

Řekneme, že množina $M \subseteq \mathbb{R}$ je *hustá* v $\mathbb{R}$, jestliže pro každé $a, b \in \mathbb{R}, a < b$ existuje číslo $m \in M$, pro které $m \in (a, b)$.

Tedy každý otevřený interval musí obsahovat nějaké číslo z husté množiny. Lze ukázat, že každý otevřený interval už nutně obsahuje nekonečně mnoho čísel libovolné husté množiny.

---

[1] Tedy funkce, kterou lze vyjádřit ve tvaru $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$, kde $n \in \mathbb{N}, a_n \neq 0$.

Lemma 1. *Množina $\mathbb{Q}$ všech racionálních čísel je hustá v $\mathbb{R}$.*

Důkaz: Nechť $a < b$ jsou libovolná reálná čísla. Jelikož $b - a > 0$, tak jistě existuje $n \in \mathbb{N}$, pro které $n(b-a) > 1$. Pak ale interval (na, nb) nutně obsahuje číslo $z \in \mathbb{Z}$, konkrétně např. $z = \lfloor na + 1 \rfloor$. Pak ale interval (a, b) obsahuje racionální číslo $\frac{z}{n}$. Tím je lemma 1 dokázáno.

Podobně lze ukázat, že množina všech dyadických racionálních čísel, tedy těch, jež je možno vyjádřit ve tvaru $\frac{z}{2^n}$, kde $z \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}_0$, je hustá v $\mathbb{R}$.

Lemma 2. *Nechť $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jsou spojité funkce a množina $M \subseteq \mathbb{R}$ je hustá v $\mathbb{R}$. Navíc platí $f(m) = g(m)$ pro každé $m \in M$. Pak platí $f(x) = g(x)$ pro každé $x \in \mathbb{R}$.*

Toto lemma je intuitivně jasné a nebudeme ho zde dokazovat. Pokud někoho zajímá precizní důkaz, najde ho např. v již zmíněné knížečce Funkcionální rovnice od L. Davidova.

Teď už můžeme formulovat samotnou Cauchyho metodu. Řekněme, že máme funkcionální rovnici, u které nás zajímají pouze spojitá řešení. Pak můžeme nejdříve určit všechna řešení dané funkcionální rovnice, která jsou definovaná pouze na nějaké husté množině (nejčastěji $\mathbb{Q}$) a pak využít spojitosti tohoto řešení k rozšíření na celou množinu $\mathbb{R}$ (lemma 2 nám říká, že to lze provést nanejvýš jedním způsobem). Objasníme to na následujícím příkladu.

Příklad: Najděte všechny spojité funkce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ splňující $f(x+y) = f(x)f(y)$ pro každé $x, y \in \mathbb{R}$.

Řešení: Předpokládejme, že máme nějaké řešení f této rovnice. Je-li pro nějaké t reálné $f(t) = 0$, pak volbou $x = z - t, y = t$ dostáváme $f(z) = f(z - t + t) = f(z-t)f(t) = 0$ pro každé $z \in \mathbb{R}$. Dále se tedy budeme zajímat jen o nenulová řešení. Předně pro každé $x \in \mathbb{R}$ platí $f(x) = f(\frac{x}{2} + \frac{x}{2}) = f(\frac{x}{2})f(\frac{x}{2}) = \Big(f(\frac{x}{2})\Big)^2 > 0$. Tedy funkce $f(x)$ nabývá všude kladných hodnot. Označme si $f(1) = c > 0$. Předpokládejme, že pro nějaké $n \in \mathbb{N}$ platí $f(n) = c^n$. Pak $f(n+1) = f(n)f(1) = c^n c = c^{n+1}$. Odtud matematickou indukcí plyne $f(n) = c^n$ pro každé přirozené číslo n. Analogicky dokážeme $f(nx) = \Big(f(x)\Big)^n$ pro každé $n \in \mathbb{N}, x \in \mathbb{R}$. Tedy jsou-li $m, n \in \mathbb{N}$, pak $f(\frac{m}{n}) = \sqrt[n]{\Big(f(\frac{m}{n})\Big)^n} = \sqrt[n]{f(n\frac{m}{n})} = \sqrt[n]{f(m)} = \sqrt[n]{c^m} = c^{\frac{m}{n}}$. Tedy vztah $f(x) = c^x$ platí pro každé kladné racionální číslo x. Dále $f(0) = f(0+0) = \Big(f(0)\Big)^2 > 0$, tedy $f(0) = 1 = c^0$. Tudíž pro každé kladné racionální x platí $1 = f(0) = f(x - x) = f(x)f(-x) \Rightarrow f(-x) = \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{c^x} = c^{-x}$. Tedy jsme dostali platnost výrazu $f(x) = c^x$ pro všechna racionální čísla x. Definujeme-li funkci $g(x) = c^x$ pro všechna $x \in \mathbb{R}$, pak $f(x)$ i $g(x)$ jsou spojité funkce (o $f(x)$ to víme ze zadání), které se shodují v každém racionálním čísle. Jelikož množina $\mathbb{Q}$ všech racionálních čísel je podle lemmatu 1 hustá v $\mathbb{R}$, tak podle lemmatu 2 platí $f(x) = g(x)$ pro každé $x \in \mathbb{R}$. Tedy pro každé reálné číslo x platí $f(x) = c^x$, kde $c > 0$. Dosadíme-li funkci $f(x) = c^x$ do zadání, zjistíme, že $f(x) = c^x$ je skutečně řešením dané rovnice pro každé $c > 0$. Úloha má tedy spojitá řešení[2] $f(x) = 0$ a $f(x) = c^x$ pro každé $c > 0$. Tím je úloha vyřešena.

[2]Lze ukázat, že tato funkcionální rovnice má mnoho nespojitých řešení.

Poznámka: V příkladu číslo 7 šesté série se vyskytuje pojem omezené funkce. Pro připomenutí řekneme, že funkce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je omezená, jestliže existuje reálná konstanta K taková, že nerovnost $|f(x)| < K$ je splněna pro každé $x \in \mathbb{R}$.

6. série

Téma:	Funkcionální rovnice
Termín odeslání:	15. BŘEZNA 1999

1. ÚLOHA (3 BODY)

Nalezněte všechny funkce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ splňující

$$yf(x) + xf(y) = f(x+y)$$

pro všechna reálná x, y.

2. ÚLOHA (3 BODY)

Nalezněte všechny funkce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, pro které platí

$$f(2a+b) = f(2b+a)f(a+b)$$

pro všechna reálná a, b.

3. ÚLOHA (3 BODY)

Najděte všechny funkce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takové, že $f(5x) = f(\pi^x) + x$ pro všechna x reálná.

4. ÚLOHA (5 BODŮ)

Najděte všechny spojité funkce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ splňující pro každé reálné a, b, c, d

$$\begin{aligned} f(a+b+c) + f(a+b+d) + f(a+c+d) + f(b+c+d) = \\ = f(a+b) + f(a+c) + f(a+d) + f(b+c) + f(b+d) + f(c+d). \end{aligned}$$

5. ÚLOHA (5 BODŮ)

Nalezněte všechny $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, pro které platí

$$e^{f(x)+f(y)} - e^{-f(x)-f(y)} = 2\left(x\sqrt{1+y^2} + y\sqrt{1+x^2}\right),$$

pro všechna reálná x, y.

6. ÚLOHA (5 BODŮ)

Najděte všechny dvojice funkcí $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ (nulu nebereme jako přirozené číslo) takové, že pro všechna $x, y \in \mathbb{N}$ je

$$f(x+y) = g(xy) + (-1)^{xy}.$$

7. ÚLOHA (5 BODŮ)

Nalezněte všechny omezené funkce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ splňující vztah

$$2f(x + \frac{\pi}{6}) = \sqrt{3}f(x) + \cos x - \sin x,$$

pro všechna reálná x, y.

8. ÚLOHA (5 BODŮ)

Najděte všechny $f : (0, \infty) \to (0, \infty)$ takové, že pro všechna $x \in (0, \infty)$, $y \in (0, 2)$ platí:

$$\frac{\sqrt{y}}{2-y}\, f\left(\frac{x\sqrt{y}}{\sqrt{2-y}}\right) \le \frac{f(xy)}{(2-y)^{3/2}} \le \frac{y}{\sqrt{2-y}}\, f\left(\frac{x}{2-y}\right).$$

Řešení 6. série

1. úloha

Nalezněte všechny funkce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ splňující

$$yf(x) + xf(y) = f(x+y)$$

pro všechna reálná x, y.

Uvažujme funkci $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ splňující $yf(x) + xf(y) = f(x+y)$. Položíme-li v této rovnici $x = 0$ a $y = 0$, dostaneme $f(0) = 0$. Položíme-li nyní v naší funkcionální rovnici $yf(x) + xf(y) = f(x+y)$ jen $y = 0$, dostaneme, že pro každé $x \in \mathbb{R}$ platí $f(x) = xf(0) = 0$ (v poslední úpravě jsme využili faktu, že $f(0) = 0$). Zatím jsme ukázali: pokud nějaká funkce vyhovuje naší funkcionální rovnici, pak musí být $f(x) = 0$. Na druhou stranu snadno nahlédneme, že nulová funkce naši funkcionální rovnici skutečně splňuje. Závěrem proto můžeme říci, že existuje právě jedna funkce vyhovující naší rovnici, a to funkce $f \equiv 0$.

2. úloha
Nalezněte všechny funkce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, pro které platí

$$f(2a + b) = f(2b + a)f(a + b)$$

pro všechna reálná a, b.

Pokud existuje $x \in \mathbb{R}$ takové, že $f(x) = 0$, potom $\forall y \in \mathbb{R}$: $f(y) = f(2.(y - x) + (2x - y))$, použijeme substituci $a = y - x, b = 2x - y$: $f(y) = f((y - x) + 2.(2x - y)).f((y - x) + (2x - y)) = f((y - x) + 2.(2x - y)).f(x) = f((y - x) + 2.(2x - y)).0 = 0$.

Zbývá tedy uvážit všechny funkce, pro něž platí $\forall x \in \mathbb{R}$: $f(x) \neq 0$. Pro libovolné $x \in \mathbb{R}$ položme $a = b = \frac{x}{2}$, dostáváme $f(3a) = f(3a).f(2a)$, a protože $f(3a) \neq 0$, můžeme tímto výrazem vydělit obě strany rovnice: $f(2a) = f(x) = 1$. Druhé myslitelné řešení je tedy opět konstantní funkce $\forall x \in \mathbb{R}$: $f(x) = 1$, žádná další řešení již neexistují.

Naopak tyto dvě funkce splňují zadání a řešením jsou tedy právě tyto dvě funkce.

3. úloha
Najděte všechny funkce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takové, že $f(5x) = f(\pi^x) + x$ pro všechna x reálná.

Podívejme se na hodnoty funkcí $h(x) = 5x$ a $g(x) = \pi^x$. Jistě pro $x = 1$ je $h(x) > g(x)$ a pro $x = 3$ je $h(x) < g(x)$. Tedy nutně existuje $z \in (1, 3)$ takové, že $h(z) = g(z) = y$. Existuje-li tedy funkce f splňující rovnici ze zadání pro všechna x reálná, musí rovnici splňovat i pro $x = z$, tj. $f(5z) = f(\pi^z) + z$, neboli $f(y) = f(y) + z$, což pro z z intervalu $(1, 3)$ není možné. Dostáváme tedy spor, taková funkce neexistuje.

Poznámky opravovatele: Všechna správná řešení využívala stejné myšlenky jako vzorové řešení. Někteří řešitelé nedostatečně odůvodnili existenci nulových bodů funkce $5x - \pi^x$.

4. úloha
Najděte všechny spojité funkce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ splňující pro každé reálné a, b, c, d

$$\begin{aligned} f(a+b+c) + f(a+b+d) + f(a+c+d) + f(b+c+d) = \\ = f(a+b) + f(a+c) + f(a+d) + f(b+c) + f(b+d) + f(c+d). \end{aligned}$$

Označme si ($\square$) vztah v zadání a předpokládejme, že již máme nějaké řešení f splňující ($\square$). Dosadíme-li $a = b = c = d = 0$ do ($\square$), dostáváme, že nutně $f(0) = 0$. Dosadíme-li $c = d = 0$ do ($\square$), po úpravě dostaneme vztah

$$f(a + b) = f(a) + f(b) \qquad (\star)$$

který f nutně splňuje pro každé $a, b \in \mathbb{R}$. Odtud snadno matematickou indukcí plyne pro f platnost vztahu $f(x_1 + x_2 + \cdots + x_n) = f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n)$ pro každou n-tici reálných čísel $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *(rozmysli si jak)*. Speciálně volbou $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = x$ dostáváme

$f(nx) = nf(x)$ pro každé $n \in \mathbb{N}$ a $x \in \mathbb{R}$. Označme si $c = f(1)$. Z předchozího vztahu volbou $x = 1$ dostáváme $f(n) = cn$ pro každé n přirozené. Jsou-li $m, n \in \mathbb{N}$, pak z předchozího vztahu dostaneme $cm = f(m) = nf(\frac{m}{n})$, tedy $f(\frac{m}{n}) = c\frac{m}{n}$. Vztah $f(n) = cn$ je tedy splněn pro každé n kladné racionální. Platnost pro $n = 0$ jsme již ověřili. Dále je-li $n \in \mathbb{Q}^+$, pak z $(\star)$ plyne $0 = f(0) = f(n + (-n)) = f(n) + f(-n)$, tedy $f(-n) = -f(n) = -cn = c(-n)$. Vztah $f(n) = cn$ je tedy splněn pro každé n racionální. Uvážíme-li funkci g definovanou pro každé $x \in \mathbb{R}$ vztahem $g(x) = cx$, vidíme, že f i g jsou spojité a shodují se na množině $\mathbb{Q}$. Z lemmatu 1 a 2 z minulých komentářů tedy nutně plyne $f(x) = g(x) = cx$ pro každé $x \in \mathbb{R}$. Naopak dosadíme-li funkci f v takto zjištěném tvaru do $(\square)$, zjistíme, že $f(x) = cx$ je řešením $(\square)$ pro každé $c \in \mathbb{R}$. Úloha má tedy spojitá řešení $f(x) = cx$ pro každé $c \in \mathbb{R}$.

Poznámky opravovatele: Nejčastěji se vyskytovala tato chyba. Řešitel došel ke vztahu $f(x+y) = f(x) + f(y)$ a prohlásil za zřejmé, že odtud plyne linearita funkce f. Toto tvrzení však (bez využití spojitosti funkce f) **neplatí**. Existují nespojité funkce, které tento vztah splňují.[3] Co se týče správných řešení, jen *Jan Houštěk* si všiml, že úlohu lze ekvivalentně převést na problém, který jsme vyřešili v komentářích se zadáním 6. série a tak si ušetřil spoustu práce.

5. úloha

Nalezněte všechny $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, pro které platí

$$e^{f(x)+f(y)} - e^{-f(x)-f(y)} = 2\left(x\sqrt{1+y^2} + y\sqrt{1+x^2}\right),$$

pro všechna reálná x, y.

Předpokládejme, že funkce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vyhovuje naší funkcionální rovnici

$$e^{f(x)+f(y)} - e^{-f(x)-f(y)} = 2(x\sqrt{1+y^2} + y\sqrt{1+x^2}) \qquad (*)$$

pro všechna reálná x, y a odvodíme nutné podmínky, které pak naše funkce musí splňovat.

Nejprve v rovnici $(*)$ položme $x = 0$ a $y = 0$, pak dostaneme rovnost $e^{2f(0)} - e^{-2f(0)} = 0$. Po drobné úpravě máme $e^{4f(0)} = 1$ a zlogaritmováním této rovnosti dostáváme, že nutně musí platit $f(0) = 0$.

Nyní budeme uvažovat opět rovnici $(*)$ a položíme v ní $y = 0$. Pak dostaneme, že pro libovolné reálné x platí vztah (využíváme již dříve odvozené skutečnosti, že $f(0) = 0$):

$$e^{f(x)} - e^{-f(x)} = 2x \qquad (**)$$

Rovnost $(**)$ budeme řešit substitucí. Použijeme-li totiž ve vztahu $(**)$ substituci $z = e^{f(x)}$, dostaneme po úpravě kvadratickou rovnici pro neznámou z s parametrem x: $z^2 - 2xz - 1 = 0$ Tato rovnice má vždy dva kořeny, jeden kladný a druhý záporný. Jelikož však číslo $z = e^{f(x)}$

[3] Nemám však zde prostor, abych takovou funkci zkonstruoval. Není to totiž až tak snadné, jde o výsledek vyžadující netriviální použití vysokoškolské matematiky.

musí být kladné, přichází v úvahu jen kladný kořen naší rovnice, kterým je $z = x + \sqrt{x^2+1}$. To vzhledem k definici čísla z znamená, že $e^{f(x)} = x + \sqrt{x^2+1}$.

V předcházejícím odstavečku jsme ukázali, že naše funkce f nutně musí splňovat vztah $e^{f(x)} = x + \sqrt{x^2+1}$. Zlogaritmováním této rovnosti vidíme, že nutně platí

$$f(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right). \tag{$***$}$$

Na druhou stranu snadno přímým dosazením do naší rovnice $(*)$ vidíme, že funkce tvaru $(***)$ rovnici $(*)$ skutečně vyhovuje. Závěrem proto můžeme říci, že všechna řešení rovnice $(*)$ mají tvar $(***)$.

Poznámky opravovatele: Naprostá většina řešení byla správných. Sečtělejší řešitelé si všimli, že levá strana rovnice je $2\sinh(f(x) + f(y))$, takže po dosazení $y = 0 = f(0)$ obdrželi ihned výsledek[4] $f(x) = \operatorname{arg\,sinh} x = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$.

6. úloha

Najděte všechny dvojice funkcí $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ (nulu nebereme jako přirozené číslo) takové, že pro všechna $x, y \in \mathbb{N}$ je

$$f(x+y) = g(xy) + (-1)^{xy}.$$

Dosazením $y = 1$ dostaneme (α) $f(x+1) = g(x) + (-1)^x$, a tedy (β) $g(xy) = f(xy+1) - (-1)^{xy}$ pro každé $x, y \in \mathbb{N}$. Dosazením (β) do původního vztahu dostaneme (γ) $f(x+y) = f(xy+1) - (-1)^{xy} + (-1)^{xy} = f(xy+1)$.

Z posledního vztahu nahlédneme, že hodně hodnot funkce f je stejných. Dokážeme, že dokonce $f(a) = b$ pro $a \in \mathbb{N}$, $a \geq 5$, $b = f(4)$. Důkaz indukcí, budeme využívat (γ):

I. $f(5) = f(2 \cdot 2 + 1) = f(2+2) = f(4) = b$ a $f(6) = f(2+4) = f(2 \cdot 4 + 1) = f(3+6) = f(3{\cdot}6+1) = f(2{\cdot}9+1) = f(2+9) = f(2{\cdot}5+1) = f(2+5) = f(2{\cdot}3+1) = f(2+3) = f(5) = b$.

II. Předpokládejme, že tvrzení platí pro každé $a \in \mathbb{N}$, $5 \leq a \leq k-1$, $k \geq 7$ a dokážeme jej pro $a = k$.
   - (i) k je liché, tj. $k = 2l+1$ pro nějaké $l \in \mathbb{N}$, $l \geq 3$. Potom $f(k) = f(2l+1) = f(2+l) = b$ dle indukčního předpokladu, neboť $5 \leq 2+l \leq 2l+1$ pro $l \geq 3$.
   - (ii) k je sudé, tj. $k = 2l$ pro nějaké $l \in \mathbb{N}$, $l \geq 4$. Potom $f(k) = f(2l) = f((2l-2)+2) = f(2 \cdot (2l-2)+1) = f(4 \cdot (l-1)+1) = f(4 + (l-1)) = f(l+3) = b$ dle indukčního předpokladu, neboť $5 \leq l+3 \leq 2l$ pro $l \geq 4$.

Z (α) dostaneme, že $g(4) = f(5) - 1 = b - 1$, takže $b \geq 2$, protože $g(4) \in \mathbb{N}$. Označme $f(1) = p$, $f(2) = q$, $f(3) = r$. Z (α) dostaneme stejným způsobem, že $r \geq 2$. Snadno si ověříme, že na čísla p, q, r, b už nejsou ze zadání kladeny žádné další podmínky.

Shrnutí: Řešením jsou všechny dvojice funkcí vyhovující podmínkám $f(1) = p$, $f(2) = q$, $f(3) = r$, $f(n) = b$ pro každé $n \geq 4$ a $g(n) = f(n+1) - (-1)^n$ pro každé $n \in \mathbb{N}$, kde

[4] Funkce sinh se zve hyperbolický sinus a je definována předpisem $\sinh x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$; obdobně $\cosh x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$. Funkce arg sinh, arg cosh jsou k nim inverzní funkce.

$p, q, r, b \in \mathbb{N}$, $r \geq 2$, $b \geq 2$. Snadno se přesvědčíme, že všechny tyto funkce vyhovují zadání úlohy.

Poznámky opravovatele: Většina řešitelů odbyla důkaz konstantnosti funkce f tím, že řekli, že rozklad čísla na součin (součet) přirozených čísel je nejednoznačný (nebo něco podobného) — to je sice dobrá motivace, ale není to důkaz (navíc to ani úplně neplatí) $\Longrightarrow$ 0 bodů. Někde bylo jen drobné opomenutí: 4 body. Správná řešení byla indukcí — buď „ob tři“ nebo rozlišením prvočíselnosti a neprvočíselnosti. Všechna byla stejně hezká jako autorské řešení, proto jsem i-čky šetřil.

7. úloha

Nalezněte všechny omezené funkce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ splňující vztah

$$2f(x + \frac{\pi}{6}) = \sqrt{3}f(x) + \cos x - \sin x,$$

pro všechna reálná x, y.

Po chvilce hádání můžeš dojít k závěru, že jedním řešením naší funkcionální rovnice je funkce $h(x) = \sin(x) + \cos(x)$. Nyní tedy budeme hledat všechna řešení ve tvaru $f(x) = \sin(x) + \cos(x) + g(x)$, kde g je neznámá (omezená) funkce. Jak čtenář snadno nahlédne, lze v tomto tvaru zapsat libovolné řešení naší rovnice. Dosadíme-li tvar

$$f(x) = \sin(x) + \cos(x) + g(x)$$

do rovnice

$$2f(x + \frac{\pi}{6}) = \sqrt{3}f(x) + \cos(x) - \sin(x)$$

dostaneme rovnici pro funkci g v mnohem jednodušším tvaru

$$2g(x + \frac{\pi}{6}) = \sqrt{3}g(x).$$

My však hledáme jen *omezené* funkce f vyhovující $2f(x+\frac{\pi}{6}) = \sqrt{3}f(x)+\cos(x)-\sin(x)$. Nyní sporem ukážeme, že za tohoto předpokladu musí nutně funkce g být nulová. Předpokládejme, že tomu tak není, tedy existuje $x_0 \in \mathbb{R}$, že $g(x_0) = c \neq 0$. Pak ovšem ze vztahu $2g(x + \frac{\pi}{6}) = \sqrt{3}g(x)$ máme, že

$$g(x_0 - \frac{\pi}{6}) = \frac{2}{\sqrt{3}}g(x_0) = \frac{2}{\sqrt{3}}c.$$

Dále indukcí snadno máme, že pro libovolné přirozené k platí

$$g(x_0 - k \cdot \frac{\pi}{6}) = \frac{2}{\sqrt{3}}g(x_0 - (k-1) \cdot \frac{\pi}{6}) = \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^k c.$$

Pro rostoucí k roste pravá strana v posledním výrazu nade všechny meze, tudíž funkce g a potažmo i funkce f nejsou omezené. A to je hledaný spor. Proto $g(x) = 0$ a tím jsme ukázali, že existuje právě jedna omezená funkce vyhovující funkcionální rovnici $2f(x+\frac{\pi}{6}) = \sqrt{3}f(x)+\cos(x)-\sin(x)$ a že je to funkce $f(x)=\sin(x)+\cos(x)$.

8. úloha

Najděte všechny $f:(0,\infty)\to(0,\infty)$ takové, že pro všechna $x\in(0,\infty)$, $y\in(0,2)$ platí:

$$\frac{\sqrt{y}}{2-y}\, f\left(\frac{x\sqrt{y}}{\sqrt{2-y}}\right) \le \frac{f(xy)}{(2-y)^{3/2}} \le \frac{y}{\sqrt{2-y}}\, f\left(\frac{x}{2-y}\right).$$

1. Nechť $c\in(0,1)$. Uvažujme kvadratickou rovnici (α) $y^2-2y+c=0 \iff y(2-y)=c$. Pro $y\in(-\infty,0\rangle\cup\langle 2,\infty)$ platí $y(2-y)\le 0$. Má-li tedy (α) řešení, pak je z intervalu $(0,2)$. Diskriminant (α) je roven $4-4c>0$. To znamená, že (α) má řešení. Z předchozího plyne, že (α) má (alespoň jedno) řešení v intervalu $(0,2)$.
2. Nechť $0<a<b$. Řešme soustavu rovnic

$$xy=a, \quad \frac{x\sqrt{y}}{\sqrt{2-y}}=b$$

   Dosazením $x=\frac{a}{y}$ do druhé rovnice máme po snadných úpravách $y(2-y)=\frac{a^2}{b^2}$. Podle 1. bodu má tato rovnice řešení v intervalu $(0,2)$. Je $x=\frac{a}{y}$, takže $x\in(0,\infty)$. Dosazením lze snadno ověřit, že takto nalezená x, y vyhovují původní soustavě rovnic. Takže soustava má řešení splňující $x\in(0,\infty)$, $y\in(0,2)$.
3. Nechť $0<a<b$. Řešme soustavu rovnic

$$xy=a, \quad \frac{x}{2-y}=b$$

   Obdobně jako u 2. bodu zjistíme, že soustava má řešení splňující $x\in(0,\infty)$, $y\in(0,2)$.
4. Dosazením nahlédneme, že funkce $f(x)=kx$, $x\in(0,\infty)$, $k\in(0,\infty)$ vyhovuje zadání úlohy. Je tedy přirozené hledat řešení ve tvaru $f(x)=xg(x)$, $x\in(0,\infty)$. Žádné řešení tím neztratíme, protože pro každou funkci $f(x):(0,\infty)\longrightarrow(0,\infty)$ existuje $g(x):(0,\infty)\longrightarrow(0,\infty)$ taková, že $f(x)=xg(x)$ (konkrétně $g(x)=\frac{f(x)}{x}$). Dosazením $f(x)=xg(x)$ do nerovností ze zadání a snadnými úpravami zjistíme, že

$$g\left(\frac{x\sqrt{y}}{\sqrt{2-y}}\right)\le g(xy)\le g\left(\frac{x}{2-y}\right)$$

   Vezmeme libovolné $0<a<b$. Dle 2. bodu existují $x\in(0,\infty)$, $y\in(0,2)$ taková, že $a=xy$, $b=\frac{x\sqrt{y}}{\sqrt{2-y}}$, takže

$$g(a)=g(xy)\ge g\left(\frac{x\sqrt{y}}{\sqrt{2-y}}\right)=g(b)$$

Tedy platí (β) $g(a) \geq g(b)$. Dle 3. bodu existují $x \in (0, \infty)$, $y \in (0, 2)$ taková, že $a = xy$, $b = \frac{x}{2-y}$, takže

$$g(a) = g(xy) \leq g\Big(\frac{x}{2-y}\Big) = g(b)$$

a tedy platí (γ) $g(a) \leq g(b)$. Z (β) a (γ) máme, že

$$(\forall a, b) \quad 0 < a < b \Longrightarrow g(a) = g(b)$$

Z toho snadno plyne, že $g(x) = k$, $k \in (0, \infty)$. Všechna řešení úlohy jsou tedy tvaru $f(x) = kx$, $x \in (0, \infty)$, $k \in (0, \infty)$.