7. série

Téma: Planimetrie

Termín odeslání: 19. dubna 1999

1. úloha (3 body)

Mějme trojúhelník s celočíselnými délkami stran a obvodem délky 7. Jaký obsah může mít tento trojúhelník?

2. úloha (3 body)

Nazvěme množinu X bodů v rovině *gigantickou*, pokud se nevejde do žádného kruhu, tj. kdykoli K je kruh, tak $X \nsubseteq K$. Rozhodněte, zda (a) průnik, (b) sjednocení, (c) doplněk gigantických množin musí/může, ale nemusí/nemůže být gigantický.

3. úloha (3 body)

Sestrojte pravidelný mnohoúhelník, znáte-li
(a) délku strany a nejdelší úhlopříčky
(b) délku dvou nejdelších úhlopříček
(jedná se o dvě varianty, znáte vždy jen jednu dvojici údajů). Přitom počet stran mnohoúhelníka neznáte!

4. úloha (5 bodů)

V trojúhelníku ABC označme O průsečík osy úhlu $\sphericalangle ACB$ a strany AB. Trojúhelníku ACO, resp. BCO opíšeme kružnici k, resp. l. Bodem C je vedena přímka p tak, že kružnici k, resp. l protne v bodě K, resp. L, různém od A, B, C. Dokažte, že $AK||BL$.

5. úloha (5 bodů)

Sestrojte čtyřúhelník, máte-li dán jeho obvod, velikosti vnitřních úhlů a velikost jedné jeho strany.

6. úloha (5 bodů)

V libovolném trojúhelníku ABC si označme U_A (resp. U_B, U_C) průsečík osy úhlu α (resp. β, γ) s osou strany BC (resp. AC, AB). Zkonstruujte trojúhelník ABC, jsou-li dány body U_A, U_B, U_C.

7. úloha (5 bodů)

(a) Je dán trojúhelník ABC se stranami délek a, b, c. Jaký je maximální obsah čtverce, na jehož obvodu leží vrcholy ABC?

(b) Zjistěte, které trojúhelníky mají následující vlastnost: velikost nejmenšího čtverce, v němž je trojúhelník obsažen, se rovná velikosti nejmenšího čtverce, na jehož obvodu leží všechny vrcholy trojúhelníku.

8. ÚLOHA (5 BODŮ)

Mějme v rovině dány přímky a, b, c, které se protínají ve společném bodě. Dále nechť jsou dány body $A_1, A_2 \in a$, $B_1, B_2 \in b$, $C_1, C_2 \in c$. Označme nakonec E, F, G po řadě průsečíky přímek A_1B_1 s A_2B_2, A_1C_1 s A_2C_2, B_1C_1 s B_2C_2 (předpokládáme, že existují). Dokažte, že body E, F, G leží na jedné (společné) přímce.

Řešení 7. série

1. úloha

Mějme trojúhelník s celočíselnými délkami stran a obvodem délky 7. Jaký obsah může mít tento trojúhelník?

Označme délky stran daného trojúhelníka $a, b, c \in \mathbb{N}$, obvod $o = 7$. Platí $o = a + b + c$ a $7 = 1 + 1 + 5 = 1 + 2 + 4 = 1 + 3 + 3 = 2 + 2 + 3$ jsou jediné celočíselné rozklady sedmičky na tři sčítance. Protože první dva rozklady nevyhovují trojúhelníkové nerovnosti, jsou jen dvě možnosti, jak může trojúhelník vypadat (délky stran 1,3,3 nebo 2,2,3). Podle Heronova vzorce snadno dopočítáme obsah těchto dvou trojúhelníků — $S = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$, kde $s = o/2$. To se rovná $\sqrt{35/16}$, resp. $\sqrt{63/16}$.

2. úloha

Nazvěme množinu X bodů v rovině *gigantickou*, pokud se nevejde do žádného kruhu, tj. kdykoli K je kruh, tak $X \not\subseteq K$. Rozhodněte, zda (a) průnik, (b) sjednocení, (c) doplněk gigantických množin musí/může, ale nemusí/nemůže být gigantický.

Nejtriviálnější gigantickou množinou je celá rovina. Dále dokážeme, že libovolná přímka je gigantická. Nechť se celá přímka vejde do kruhu o poloměru r. Snadno najdu na přímce dva body vzdálené více než $2r$. Pak ovšem aspoň jeden z nich neleží v daném kruhu, tedy spor.

(a) *může, nemusí*

Průnik dvou různých přímek obsahuje nejvýše jeden bod. Ten tvoří negigantickou množinu — je podmnožinou libovolného kruhu se středem v něm. Naopak průnik dvou identických přímek je přímka, tedy gigantická množina.

(b) *musí*

Nechť A, B jsou gigantické a $A \cup B$ není gigantická. Je tedy částí nějakého kruhu K. Pak ale $A \subseteq A \cup B \subseteq K$, což je spor s gigantičností A.

(c) *může, nemusí*

Doplněk roviny je prázdná množina, která gigantická není (je podmnožinou každého kruhu). Doplněk přímky je gigantická množina, neboť obsahuje libovolnou její rovnoběžku (již ta se nevejde do žádného kruhu, tím spíše je gigantická její nadmnožina).

Poznámky opravovatele: Čím jednodušší úloha, tím podrobnější by mělo být řešení. Konstatování „zřejmosti“ (b) jsem body neodměňoval. Častou chybou bylo příliš obecné řešení úlohy. Pokud neuvede řešitel jediný příklad gigantické množiny, těžko mu uvěřit, že může nějaká existovat. U (c) existoval dvojí výklad zadání — buď doplněk k celé rovině (autor), nebo k jiné gigantické množině. Rozmysli si, že i při druhém výkladu je výsledek stejný.

3. úloha

Sestrojte pravidelný mnohoúhelník, znáte-li
(a) délku strany a nejdelší úhlopříčky
(b) délku dvou nejdelších úhlopříček
(jedná se o dvě varianty, znáte vždy jen jednu dvojici údajů). Přitom počet stran mnohoúhelníka neznáte!

Budeme postupovat různě pro mnohoúhelníky s lichým a se sudým počtem stran. Protože však tento počet dopředu neznáme, musíme provést obě konstrukce a tím teprve zjistíme, která z nich skutečně dá mnohoúhelník požadovaných vlastností. Mohlo by se dokonce i stát, že budou fungovat obě (tj. úloha bude mít dvě řešení). Správně bychom asi měli provést diskusi, tj. říci, pro jaké zadání má úloha nula, jedno, resp. dvě řešení. Protože se však tímto žádný řešitel vůbec nezabýval, nebudeme tuto otázku řešit ani zde, můžeš si ji zkusit rozmyslet sám.

Je-li počet stran sudý, tvoří nejdelší úhlopříčka průměr kružnice opsané mnohoúhelníku, tuto kružnici tedy můžeme zkonstruovat. Označme její průměr AB. V části (a) na tuto kružnici postupně (od bodu A) nanášíme délku strany, přičemž musíme po celém počtu kroků dojít do bodu B, nesmíme ho „přeskočit“ (pokud ho přeskočíme, tak hledaný mnohoúhelník nemá sudý počet stran). V části (b) napřed naneseme na kružnici z A délku druhé nejdelší úhlopříčky, vzdálenost mezi B a takto nalezeným průsečíkem je zjevně délka strany. Pak postupujeme stejně jako v části (a).

Pro lichoúhelníky to bude těžší. Označme si s délku strany, $u > v$ délky dvou nejdelších úhlopříček. V části (a) je kružnice mnohoúhelníku opsaná současně opsaná i „prostřednímu“ trojúhelníku o stranách s, u, u (nakreslete si obrázek). Tento trojúhelník a tudíž i tuto kružnici můžeme sestrojit. Dále postupujeme analogicky jako pro sudý počet stran. V části (b) si všimněme (opět radím obrázek!), že uprostřed mnohoúhelníku jsou čtyři body tvořící rovnoramenný lichoběžník, jehož základny mají délky u a v, jeho úhlopříčky u. Pokud tento lichoběžník sestrojíme, tak mu dokážeme i opsat kružnici a jsme tedy opět v obdobné situaci, jako v předchozím odstavci. To ale už není příliš těžké. Posuneme-li lichoběžník podél jeho základny o v, vznikne nám trojúhelník se stranami u, u, $u + v$. Ten snadno zkonstruujeme a z něj pak i celý lichoběžník. Detaily si prosím rozmysli sám.

Poznámky opravovatele: Zcela správně úlohu vyřesilo jen několik řešitelů, nejtěžší byla část (b) pro lichý počet stran. Co se mi na mnohých řešeních nelíbilo: Nemálo řešitelů uvedlo jen postup konstrukce. Důležitější než ten je ale rozbor: zdůvodnění, proč navržená konstrukce funguje. To, jak se zkonstruuje (např.) kružnice opsaná trojúhelníku, není třeba detailně rozebírat, to určitě umíte ze školy. Opačný extrém tvořili řešitelé, kteří řekli: pokud takovýhle vzoreček (obsahoval nějaké siny a arkussiny) dá přirozené číslo, tak udělám ... , jinak ... V takové případě je ale třeba zdůvodnit, že jde jen konstrukčně (tj. pomocí pravítka a kružítka) poznat, zda ten vzoreček dá přirozené číslo nebo ne. Posledním častým prohřeškem bylo to, že mnozí z vás uvedli jinou konstrukci pro lichý a sudý počet stran, ale neřekli už, co tím vlastně míní, jak poznají, kterou z nich mají použít.

Zajímavou myšlenku měl *Jan Vršovský*: chtěl konstruovat postupně všechny pravidelné mnohoúhelníky a rozhodovat, který je ten pravý. To má malou vadu v tom, že taková konstrukce by trvala dost dlouho, hlavní chyba je ale to, že pravítkem a kružítkem nejde zkonstruovat každý mnohoúhelník (konkrétně jdou jenom ty s $2^k p$ stranami, kde p je prvočíslo tvaru $2^{2^l}+1$).

4. úloha (volně podle Tomáše Matouška)

V trojúhelníku ABC označme O průsečík osy úhlu $\sphericalangle ACB$ a strany AB. Trojúhelníku ACO, resp. BCO opíšeme kružnici k, resp. l. Bodem C je vedena přímka p tak, že kružnici k, resp. l protne v bodě K, resp. L, různém od A, B, C. Dokažte, že $AK||BL$.

Nechť nejprve přímka p je rovnoběžná se stranou AB. Potom body B, L, C, O a A, O, C, K tvoří rovnoramenný lichoběžník (je-li $\triangle ABC$ rovnoramenný, může se z něj stát i obdélník nebo čtverec). Proto $|\sphericalangle LBO| = |\sphericalangle COB|$ a $|\sphericalangle COA| = |\sphericalangle KAO|$. Úhly $\sphericalangle COA$ a $\sphericalangle COB$ jsou vedlejší, takže součet jejich velikostí je π, stejně jako součet velikostí úhlů $\sphericalangle KAO$ a $\sphericalangle LBO$. Vzhledem k tomu, že se jedná o úhly přilehlé k příčce AB přímek AK a BL, znamená to, že přímky AK a BL jsou rovnoběžné.

Nechť nyní přímka p není rovnoběžná s AB. Označme M jejich průsečík. Potom mocnost bodu M ke kružnicím k a l lze vyjádřit dvěma různými způsoby a získáme následující rovnosti:

$$|MC| \cdot |MK| = |MA| \cdot |MO|$$
$$|MC| \cdot |ML| = |MB| \cdot |MO|$$

Odtud $\frac{|MK|}{|ML|} = \frac{|MA|}{|MB|} = t$, takže trojúhelníky $\triangle MKA$ a $\triangle MLB$ jsou stejnolehlé ve stejnolehlosti se středem v bodě M s koeficientem t. Přímky AK a BL jsou tedy rovnoběžné.

Poznámka: Tvrzení platí pro libovolný bod O úsečky AB.

Poznámky opravovatele: Až na vzácné výjimky využívali řešitelé při důkazu větu o obvodových úhlech a větu o součtu protilehlých úhlů v tětivovém čtyřúhelníku. Obvykle však uvažovali jenom některé polohy přímky p. Někteří řešitelé si všimli, že poloha bodu O může být libovolná a těm jsem za matematickou všímavost dala $+i$.

5. úloha
Sestrojte čtyřúhelník, máte-li dán jeho obvod, velikosti vnitřních úhlů a velikost jedné jeho strany.

Označme si zadané velikosti úhlů jako α, β, γ, δ, danou stranu čtyřúhelníka jako a a zadaný obvod jako O.

Konstrukci provedeme tak, že nejprve sestrojíme čtyřúhelník $ABcd$ pomocí prvků α, β, γ, δ a a. Pak zkonstruujeme pomocí vhodné podobnosti čtyřúhelník $ABCD$ s těmito parametry a předepsaným obvodem.

Postup se nám rozpadne na několik případů podle různé velikosti součtu úhlů $\alpha + \beta$. Tento fakt většina řešitelů opomínala a dle jednoho obrázku, jednoho případu, diskutovali obecné řešení. Rozmysli si však, že je skutečně nutné tento rozbor provést (obrázky a vzniklé trojúhelníky v něm vypadají vždy jinak, takže často řešitelé psali o objektech, které obecně nemusely existovat).

Vyjděme z toho, že není problém sestrojit čtyřúhelník $ABcd$. Zkrátka sestrojíme úsečku AB o předepsané velikosti a. K přímce AB vedeme dále dvě přímky p, q, první prochází bodem A pod úhlem α, druhá pak bodem B pod úhlem β. K přímce p dále vedeme (tak aby vznikl žádaný čtyřúhelník, detaily si laskavý čtenář rozmyslí sám) další přímku r pod úhlem γ. Průsečík p a r označíme c, průsečík q a r jako d a máme sestrojený jistý čtyřúhelník $ABcd$ se zadanými vlastnostmi.

Nyní provedeme rozbor:

(1) Nechť je nejprve konstruovaný čtyřúhelník konvexní, to z našich údajů poznáme tak, že všechny úhly budou menší než 180^o.

(a) $\alpha + \beta < 180^o$

Označme průsečík přímek p a q jako X. Když si do obrázku (i) načrtneme ještě hledaný čtyřúhelník $ABCD$, pak vidíme, že trojúhelníky cdX a CDX jsou stejnolehlé podle středu X, tj. existuje koeficient k, tak, že platí

$$\frac{|Xd|}{|XD|} = \frac{|Xc|}{|XC|} = \frac{|dc|}{|DC|} = \frac{1}{k}. \qquad (*)$$

Ze zadaného obvodu O však tento koeficient můžeme dopočítat, neboť (viz opět první obrázek)

$$O = |AB| + |BC| + |CD| + |DA| = |AB| + (|BX| - |XC|) + |CD| + (|AX| - |DX|),$$

když nyní dosadíme za $|XC|$, $|CD|$ a $|DX|$ ze vztahů $(*)$, máme

$$O = |AB| + |BX| + |AX| + k \cdot (|cd| - |Xc| - |Xd|),$$

což po úpravě dává

$$k = \frac{O - |AB| - |BX| - |AX|}{|cd| - |Xc| - |Xd|}.$$

Tím jsme však vyjádřili dosud neznámý koeficient k pomocí známých prvků. Tudíž závěrem konstrukce již bude jenom zkonstruovat pomocí stejnolehlosti se středem X body C, D tak, aby byly splněny poměry $(*)$.

(b) $\quad \alpha + \beta = 180^o$
Viz obrázek (ii). V tomto případě stačí posunout úsečku cd ve směru[1] Ad o rozdíl $\frac{O-o}{2}$, kde o je obvod čtyřúhelníku $ABcd$.

(c) $\quad \alpha + \beta > 180^o$
Viz obrázek (iii). Analogicky jako v případě (a) označíme průsečík přímek p a q jako X. Do obrázku (iii) jsme opět načrtli ještě hledaný čtyřúhelník $ABCD$. Stejně jako v (a) vidíme, že trojúhelníky cdX a CDX jsou stejnolehlé podle středu X, tj. existuje koeficient k, tak, že platí $(*)$. Ze zadaného obvodu O tento koeficient dopočítáme, (teď využíváme obrázek (iii), a proto se náš výsledek bude lišit od případu (a))

$$O = |AB| + |BC| + |CD| + |DA| = |AB| + (|XC| - |XB|) + |CD| + (|XD| - |AX|),$$

když nyní dosadíme za $|XC|$, $|CD|$ a $|DX|$ ze vztahů $(*)$, máme

$$O = |AB| - |BX| - |AX| + k \cdot (|cd| + |Xc| + |Xd|),$$

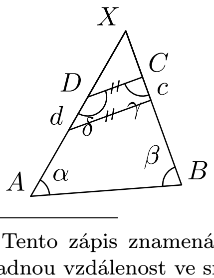
což po úpravě dává

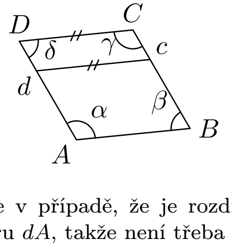
$$k = \frac{O - |AB| + |BX| + |AX|}{|cd| + |Xc| + |Xd|}.$$

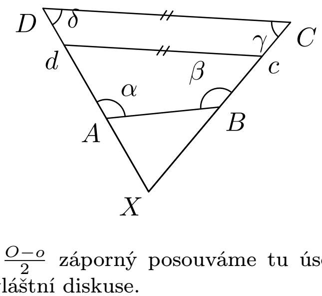
Tím jsme však vyjádřili koeficient k pomocí známých prvků. Závěr konstrukce je pak již stejný jako v (a), pomocí stejnolehlosti se středem X zkonstruujeme body C, D tak, aby byly splněny poměry $(*)$.

(2) Druhou možností je, že konstruovaný čtyřúhelník $ABCD$ je nekonvexní, to z našich údajů poznáme tak, že jeden úhel (víc takových být nemůže) je větší než 180^o.

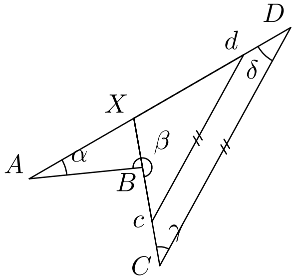
V tomto případě je nutno rozlišit, zda je nekonvexní úhel u strany AB, nebo u strany CD, viz obrázky (iv) a (v). Postup je analogický postupu v případech (a) a (c) v předchozím, jen dopočítaný koeficient stejnolehlosti bude mít vždy jiný tvar. To však již přenecháváme čtenáři.

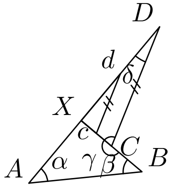






[1]Tento zápis znamená, že v případě, že je rozdíl $\frac{O-o}{2}$ záporný posouváme tu úsečku o kladnou vzdálenost ve směru dA, takže není třeba zvláštní diskuse.





6. úloha

V libovolném trojúhelníku ABC si označme U_A (resp. U_B, U_C) průsečík osy úhlu α (resp. β, γ) s osou strany BC (resp. AC, AB). Zkonstruujte trojúhelník ABC, jsou-li dány body U_A, U_B, U_C.

Nejdříve předpokládejme, že již máme zkonstruovaný $\triangle ABC$. Uvažujme kružnici k jemu opsanou. Zjevně osa úhlu α protíná k v bodě S_A, který leží uprostřed oblouku určeného body B, C (toho oblouku, na kterém neleží bod A), protože tětivy BS_A, CS_A určují stejně velký obvodový úhel $\frac{\alpha}{2}$ a jsou tedy stejně dlouhé. Jak snadno nahlédneme, osa strany BC také prochází bodem S_A. Proto $S_A = U_A$, analogicky $S_B = U_B$, $S_C = U_C$. Zjistili jsme tedy, že body U_A, U_B, U_C leží na kružnici opsané $\triangle ABC$ a to navíc uprostřed oblouků BC, AC, AB naproti bodům A, B, C. Odtud je předně vidět, že leží-li body U_A, U_B, U_C na jedné přímce, pak úloha nemá řešení. Označme si nyní S střed k (kružnice opsané $\triangle ABC$ a $\triangle U_AU_BU_C$), dále $\alpha_U = |\sphericalangle U_BU_AU_C|$, $\beta_U = |\sphericalangle U_CU_BU_A|$, $\gamma_U = |\sphericalangle U_AU_CU_B|$. Z vlastností obvodových a středových úhlů plyne $\alpha_U = \frac{1}{2}\,|\sphericalangle U_BSU_C| = \frac{\pi-\alpha}{2}$. Analogicky $\beta_U = \frac{\pi-\beta}{2}$, $\gamma_U = \frac{\pi-\gamma}{2}$. Proto může být úloha řešitelná jen tehdy, když body U_A, U_B, U_C tvoří ostroúhlý trojúhelník. Ukážeme, že v tom případě má úloha právě jedno řešení — uděláme to tak, že najdeme konstrukci $\triangle ABC$. Zjevně $|\sphericalangle SU_CA| = \frac{\pi}{2} - |\sphericalangle U_CAB| == \frac{\pi}{2} - |\sphericalangle U_CCB| = \frac{\pi-\gamma}{2} = \gamma_U$. Analogicky pro další vrcholy. Postup konstrukce tedy bude následovný. Nejdříve sestrojíme bod S (jako průsečík os stran $\triangle U_AU_BU_C$) a kružnici k opsanou $\triangle U_AU_BU_C$. Poté bodem U_C vedeme přímku a, která s přímkou SU_C svírá známý úhel γ_U tak, aby její průsečík s kružnicí k ležel na tom oblouku určeném body U_B, U_C, na kterém neleží bod U_A. Zmíněný průsečík přímky a a kružnice k (různý od U_C) si označíme A. Analogicky zkonstruujeme body B a C. Snadno ověříme, že takto zkonstruovaný $\triangle ABC$ je jediným řešením úlohy. Úloha má řešení právě tehdy, když body U_A, U_B, U_C tvoří ostroúhlý trojúhelník.

Poznámky opravovatele: Řešení byla velice různorodá. Mé hodnocení: za chybějící diskusi (úloha by neměla řešení, kdyby body $U_AU_BU_C$ tvořily tupoúhlý trojúhelník nebo kdyby ležely na přímce) byl stržen bod, za chybějící či nedostatečné odůvodnění platnosti tvrzení použitých při konstrukci bylo strženo i bodů více.

7. úloha

(a) Je dán trojúhelník ABC se stranami délek a, b, c. Jaký je maximální obsah čtverce, na jehož obvodu leží vrcholy ABC?

(b) Zjistěte, které trojúhelníky mají následující vlastnost: velikost nejmenšího čtverce, v němž je trojúhelník obsažen, se rovná velikosti nejmenšího čtverce, na jehož obvodu leží všechny vrcholy trojúhelníku.

(a) Zřejmě pokud je trojúhelník tupoúhlý nebo pravoúhlý, můžeme dva jeho vrcholy umístit na jednu stranu čtverce a třetí vrchol na sousední stranu čtverce a čtverec tedy může mít libovolně velký obsah. Pro ostroúhlé trojúhelníky předpokládejme, že $a \geq b \geq c$. Pokud leží každý vrchol trojúhelníka na jiné straně čtverce, pak jistě některé dva vrcholy leží na protějších stranách, pokud dva vrcholy leží na téže straně, pak třetí vrchol musí ležet na protější, protože jinak by trojúhelník nebyl ostroúhlý. Označme velikost strany čtverce d. Dva body ležící na protějších stranách čtverce mají jistě vzdálenost alespoň d. Ale dva vrcholy trojúhelníka mají vzdálenost nejvýše a, tj. $d \leq a$. Na druhou stranu jistě existuje čtverec o straně délky a, na jehož obvodu leží všechny vrcholy trojúhelníka (díky tomu, že $v_a \leq b \leq a$, kde v_a je výška spuštěná z vrcholu A).

(b) Předpokládejme, že trojúhelník ABC leží v nějakém čtverci $EFGH$. Pokud právě jeden vrchol trojúhelníka leží na obvodu čtverce, a to BÚNO na hraně EF a ne ve vrcholu F, pak čtverec $E'F'G'H'$ takový, že $E' = E$, $F' \in EF$ a $H' \in EH$ (neboli vrchol E necháme na místě a vrcholy F a H posuneme o kousek po úsečce EF resp. EH) bude jistě menší. Pokud na obvodu čtverce neleží žádný vrchol trojúhelníka, můžeme udělat totéž. Pokud na obvodu čtverce leží právě dva vrcholy trojúhelníka, a to na téže straně nebo na stranách sousedních, pak můžeme čtverec zmenšit stejným způsobem. Pokud tyto dva vrcholy leží na protějších stranách (BÚNO $A \in EH$ a $B \in FG$), ale ne v protilehlých vrcholech čtverce, můžeme trojúhelník posunout tak, aby jeden z jeho vrcholů ležel ve vrcholu čtverce (nechť je to vrchol $A = E$) a pak ho kolem tohoto vrcholu otočit o tak malý úhel, aby se vrchol B odpoutal od strany FG, ale vrchol C ještě nenarazil do strany čtverce. Teď máme na obvodu čtverce nejvýše jeden vrchol trojúhelníka a můžeme čtverec zmenšit výše popsaným způsobem.

Zatím jsme dokázali následující tvrzení: Jestliže je daný čtverec nejmenší ze všech, které obsahují trojúhelník ABC a na jeho obvodu neleží všechny vrcholy trojúhelníka, pak nutně nastane ten případ, že dva vrcholy trojúhelníka leží v protějších vrcholech čtverce (pro ostatní případy jsme dokázali, že najdeme ještě menší čtverec, který bude trojúhelník obsahovat). Pokud je trojúhelník umístěn do čtverce tímto způsobem, pak nemůže existovat žádný menší čtverec obsahující daný trojúhelník (protože žádné dva body menšího čtverce nebudou tak daleko od sebe, jako dva vrcholy trojúhelníka). Nyní si stačí rozmyslet, že nutnou a postačující podmínkou pro to, aby bylo lze trojúhelník umístit do čtverce požadovaným způsobem, je, že dva jeho úhly jsou menší nebo rovny $45°$. Hledané trojúhelníky jsou tudíž takové, které mají nejvýše jeden úhel o velikosti nejvýše $45°$.

Poznámky opravovatele: Rozhodl jsem se dávat za část (a) tři body a za část (b) dva body. Kvůli velké členitosti příkladu mi nestačila stupnice a musel jsem ji zjemnit i-čky. Snad jediné do podrobna korektně zdůvodněné řešení měl Filip Jaroš, pěkné řešení první části pak měli Jan Kynčl a Robert Káldy.

8. úloha

Mějme v rovině dány přímky a, b, c, které se protínají ve společném bodě. Dále nechť jsou dány body $A_1, A_2 \in a$, $B_1, B_2 \in b$, $C_1, C_2 \in c$. Označme nakonec E, F, G po řadě průsečíky přímek A_1B_1 s A_2B_2, A_1C_1 s A_2C_2, B_1C_1 s B_2C_2 (předpokládáme, že existují). Dokažte, že body E, F, G leží na jedné (společné) přímce.

Označme si η rovinu, v níž leží přímky a, b, c a uložme ji do (trojrozměrného) prostoru. Jistě v tomto prostoru existují tři přímky x, y, z protínající se v jednom bodě takové, že jejich kolmé průměty do roviny η jsou po řadě přímky a, b, c a navíc takové, že x, y, z **neleží** v jedné rovině. Na přímkách x, y, z si označme po řadě body X_1, X_2, Y_1, Y_2, Z_1, Z_2 takové, že jejich kolmé průměty do roviny η jsou po řadě body A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2. Označme si ξ_{xy}, ξ_{xz}, ξ_{yz} roviny určené dvojicemi přímek x, y; x, z; y, z a π_1, π_2 roviny určené trojicemi bodů X_1, Y_1, Z_1; X_2, Y_2, Z_2. Označme si dále U, V, W po řadě průsečíky dvojic přímek X_1Y_1, X_2Y_2; X_1Z_1, X_2Z_2; Y_1Z_1, Y_2Z_2. Body X_1, X_2, Y_1, Y_2 leží v rovině ξ_{xy}, tudíž přímky X_1Y_1 a X_2Y_2 jsou různoběžné a bod U skutečně existuje. Existenci bodů V, W zdůvodníš analogicky. Kolmé průměty bodů U, V, W do roviny η jsou po řadě body E, F, G. Zjevně U je průsečík rovin ξ_{xy}, π_1, π_2, V je průsečík rovin ξ_{xz}, π_1, π_2 a W je průsečík rovin ξ_{yz}, π_1, π_2. Tedy body U, V, W leží všechny tři na průsečnici rovin π_1, π_2, což je přímka. Tím spíše jejich kolmé průměty E, F, G do roviny η leží na společné přímce.

Poznámky opravovatele: Nikdo z řešitelů neobjevil myšlenku vzorového řešení, všechny správné postupy se spokojili pouze se dvěma rozměry. Nejšikovnější pak bylo použít *Menelaovu větu*, což učinili dva slovenští řešitelé.