Povídání k osmé sérii

Závěrečná série je již tradičně vyvrcholením semináře. Řešitelé se v ní setkávají s příklady, z nichž každý je motivován jednou z předcházejících sérií. Tomu je uzpůsoben i systém bodování. Každá úloha sestává ze dvou částí. Z nich první je jednodušší, je určena řešitelům, kteří doposud nemají větší zkušenosti s řešením obdobných příkladů, její řešení je občas dobrým návodem pro řešení druhé části, ta pak obsahuje opravdový oříšek i pro špičkové řešitele. Za část (a) je možno získat až dva body, za část (b) tři.

K řešení většiny příkladů nepotřebuješ žádné speciální znalosti (i když je dobré seznámit se předem s úlohami příslušné série a jejich řešeními). Výjimku tvoří 1. příklad, kde se setkáš s pojmem limity. Ten Ti může být dosud neznámý, proto jej zde poněkud osvětlíme.

Začneme definicí toho, co znamená $\lim\limits_{n\to\infty} p_n = L$, čteme „limita p_n pro n jdoucí k nekonečnu je L", případně „posloupnost $\{p_n\}$ konverguje k číslu L". Vágně řečeno to znamená, že pro všechna dostatečně velká n je p_n skoro rovno L. Přesně to znamená následující

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n > N) \quad |p_n - L| < \varepsilon.$$

O pojmu limity se můžeš mnoho dalšího dozvědět v moudrých knihách, pro první seznámení doporučujeme například *Jiří Jarník: Posloupnosti a řady, Mladá Fronta, Praha 1979, Škola mladých matematiků 43.* Na tomto místě uvedeme jen některé vlastnosti limit, které se Ti při řešení příkladu mohou hodit.

(a) Je-li naše posloupnost konstantní, tj. pro všechna n je $p_n = L$, je i $\lim_{n\to\infty} p_n = L$.

(b) Je-li p_n zdola omezená a nerostoucí, pak tato posloupnost konverguje. Podrobněji: pokud je p_n nerostoucí a existuje a takové, že pro každé n je $p_n > a$, tak existuje takové L, že $\lim_{n\to\infty} p_n = L$.

(c) Pokud pro všechna n platí $a_n \le p_n \le b_n$ a přitom $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = L$, pak také $\lim_{n\to\infty} p_n = L$.

8. série

Téma: Finální myš(maš)

Termín odeslání: 17. května 1999

1. úloha

Nechť jsou dány $k \in \mathbb{N}$ a $p_1, p_2, \ldots, p_k \in \mathbb{R}$ libovolně. Definujme posloupnost $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ rekurentním vztahem

$$p_{n+k+1} = \frac{p_{n+1} + p_{n+2} + \cdots + p_{n+k}}{k}$$

pro každé n celé nezáporné.

(a) Dokažte, že posloupnost $\{p_n\}$ je omezená pro libovolné hodnoty prvních k členů. (2 body)

(b) Najděte hodnotu $\lim_{n\to\infty} p_n$ v závislosti na hodnotách $p_1, p_2, \ldots, p_k$. (3 body)

2. úloha

Buď P množina všech nenulových polynomů s reálnými koeficienty. Definujme tyto pojmy:

(1) $p \mid q$ (polynom p *dělí* polynom q), pokud $\exists r \in P \quad q = pr$
(2) $p \| q$, pokud $p \mid q$ & $q \mid p$ (např. $x + 2 \| 3x + 6$)
(3) polynom $p \in P$ nazveme *prvočinitel*, pokud $(\forall f, g \in P) \quad (p | fg \;\Rightarrow\; p \mid f$ nebo $p \mid g)$
(4) polynom $p \in P$ nazveme *nerozložitelný*, pokud $(\forall f \in P) \quad (f \mid p \;\Rightarrow\; f \| 1$ nebo $f \| p)$

Povšimněte si, že $f \| 1$ právě tehdy, když f je konstantní polynom. Dále si povšimněte, že např. polynom $x^2 + x + 1$ je nerozložitelný. Platí následující tvrzení?

(a) Každý prvočinitel je nerozložitelný. (2 body)

(b) Každý nerozložitelný polynom je prvočinitel. (3 body)

3. úloha

(a) Dokažte, že neexistují celá čísla x, y, která řeší diofantickou rovnici

$$3y(y + 1) = x(x + 3) + 1. \qquad \text{(2 body)}$$

(b) Dokažte, že diofantická rovnice

$$3y(y + 1) = x(x + 4) + 1$$

má nekonečně mnoho řešení x, y v celých číslech. (3 body)

4. úloha

(a) Dokažte, že pro všechna n přirozená platí:

$$(3n)! \geq 6^n \cdot (n!)^3. \qquad \text{(2 body)}$$

(b) Dokažte, že pro všechna n přirozená platí:

$$(n!)! \geq \prod_{i=1}^{n} (i!)^{\frac{n!}{i}}. \qquad \text{(3 BODY)}$$

5. ÚLOHA

Chobotničce z 5. série konečně sundali sádru ze třetího chapadla.

(a) Kolika způsoby může vylézt na sedmou příčku? (2 BODY)

(b) Kolika způsoby může vylézt na n-tou příčku? (3 BODY)

Chapadla jsou rozlišitelná.

6. ÚLOHA

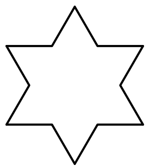
(a) Nalezněte všechny spojité funkce $f : (0, \infty) \to (0, \infty)$ splňující pro každé kladné x, y

$$f(x+y) = \frac{f(x)f(y)}{f(x)+f(y)}. \qquad \text{(2 BODY)}$$

(b) Nalezněte všechny spojité funkce $f : (0, \infty) \to (1, \infty)$ splňující pro každé kladné x, y

$$f(x+y) = \frac{f(x)f(y)+1}{f(x)+f(y)}. \qquad \text{(3 BODY)}$$

7. ÚLOHA



Na obrázku vidíte šesticípou hvězdu vzniklou sjednocením dvou rovnostranných trojúhelníků o straně délky 3 (hvězda je „pravidelná“, takže všechny úsečky mají délku 1). Tuto hvězdu chceme pokrýt

(a) šesti (2 BODY), resp.

(b) čtyřmi (3 BODY)

stejně velkými kruhy tak, aby jejich poloměr byl co nejmenší. Jak velké kruhy potřebujeme?

Pokud tuto úlohu nevyřešíš úplně (tj. nezjistíš optimální poloměr), zkus nám poslat i částečné řešení (typu: optimální poloměr je větší než 1/2 a menší než $2\sqrt{2}$).

Řešení 8. série

1. úloha

Nechť jsou dány $k \in \mathbb{N}$ a $p_1, p_2, \ldots, p_k \in \mathbb{R}$ libovolně. Definujme posloupnost $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ rekurentním vztahem

$$p_{n+k+1} = \frac{p_{n+1} + p_{n+2} + \cdots + p_{n+k}}{k}$$

pro každé n celé nezáporné.

(a) Dokažte, že posloupnost $\{p_n\}$ je omezená pro libovolné hodnoty prvních k členů. (2 body)

(b) Najděte hodnotu $\lim\limits_{n\to\infty} p_n$ v závislosti na hodnotách $p_1, p_2, \dots, p_k$. (3 body)

(a) Označme si $m_0 = \min\{p_1, p_2, \dots, p_k\}$, $M_0 = \max\{p_1, p_2, \dots, p_k\}$. Snadno dokážeme matematickou indukcí

$$p_n \geq m_0,\ n = 1, 2, \dots$$

I. Pro $n = 1, 2, \dots, k$ je tvrzení zřejmé.

II. Předpokládejme platnost tvrzení pro $n = s, s+1, \dots, s+k-1$, kde $s \in \mathbb{N}$. Pak tedy $p_{s+k} = \frac{p_s + p_{s+1} + \cdots + p_{s+k-1}}{k} \geq \frac{m_0 + m_0 + \cdots + m_0}{k} = m_0$ (v nerovnosti jsme využili indukční předpoklad). Tvrzení tedy platí i pro $n = s + k$. Tím je důkaz indukcí hotov.

Zcela analogicky dokážeme tvrzení

$$p_n \leq M_0,\ n = 1, 2, \dots$$

Tedy posloupnost $\{p_n\}$ je shora i zdola omezená, je tedy omezená.

(b) Nejdříve musíme dokázat, že naše posloupnost $\{p_n\}$ je konvergentní. Označme si jako $m_n = \min\{p_{n\cdot k+1}, p_{n\cdot k+2}, \dots, p_{(n+1)\cdot k}\}$, $M_n = \max\{p_{n\cdot k+1}, p_{n\cdot k+2}, \dots, p_{(n+1)\cdot k}\}$. Ukážeme, že $M_{n+1} - m_{n+1} \leq \frac{k^k - 2}{k^k}(M_n - m_n)$. Je totiž

$$p_{(n+1)\cdot k+1} = \frac{p_{n\cdot k+1} + p_{n\cdot k+2} + \cdots + p_{(n+1)\cdot k}}{k} \leq \frac{m_n + (k-1)M_n}{k},$$

jelikož alespoň jedno z čísel $p_{n\cdot k+1}, p_{n\cdot k+2}, \dots, p_{(n+1)\cdot k}$ je rovno m_n a všechna jsou menší nebo rovna M_n. Dále indukcí dokážeme $p_{(n+1)\cdot k+s} \leq \frac{m_n + (k^s - 1)M_n}{k^s}$ pro $s \in \{1, 2, \dots k\}$, a tedy dostáváme $M_{n+1} \leq \frac{m_n + (k^k - 1)M_n}{k^k}$. Zcela analogicky dokážeme $m_{n+1} \geq \frac{M_n + (k^k - 1)m_n}{k^k}$ a odečtením těchto dvou nerovností dostaneme

$$M_{n+1} - m_{n+1} \leq \frac{k^k - 2}{k^k}(M_n - m_n),$$

což jsme chtěli. Odtud je vidět, že $\lim\limits_{n\to\infty} M_n - m_n = 0$. Posloupnost $\{M_{\lfloor \frac{n-1}{k} \rfloor}\}$ je klesající posloupnost zdola omezená např. číslem m_0, je tedy konvergentní (označme p její limitu). Obdobně posloupnost $\{m_{\lfloor \frac{n-1}{k} \rfloor}\}$ je rostoucí posloupnost shora omezená např. číslem M_0, je tedy konvergentní. Jelikož víme, že $\lim\limits_{n\to\infty} M_n - m_n = 0$, musí mít posloupnost $\{m_{\lfloor \frac{n-1}{k} \rfloor}\}$ také limitu p. Dále pro každé n platí $m_{\lfloor \frac{n-1}{k} \rfloor} \leq p_n \leq M_{\lfloor \frac{n-1}{k} \rfloor}$, proto i posloupnost $\{p_n\}$ je konvergentní a má limitu p. Nyní určíme hodnotu p. Označme si $C_n = \sum\limits_{i=1}^{k} i \cdot p_{n+i}$. Dokážeme matematickou indukcí, že posloupnost $\{C_n\}$ je konstantní, tedy

$$C_n = C_0,\ n = 0, 1, 2, \dots$$

I. Pro $n = 0$ je tvrzení zřejmé.

II. Platí-li tvrzení pro $n = s - 1$, pak

$$C_s = \sum_{i=1}^{k} i \cdot p_{s+i} = \left(\sum_{i=1}^{k-1} i \cdot p_{s+i} \right) + k \cdot p_{s+k} =$$
$$= \left(\sum_{i=2}^{k} (i-1) \cdot p_{s+i-1} \right) + p_s + p_{s+1} + \cdots + p_{s+k-1} = \sum_{i=1}^{k} i \cdot p_{s-1+i} = C_{s-1} = C_0.$$

Pro poslední rovnost jsme využili indukční předpoklad, dále jsme využili rekurentní vztah pro posloupnost $\{p_n\}$. Tvrzení je dokázané.

Platí tedy $\lim\limits_{n\to\infty} C_n = C_0$, jelikož posloupnost je konstantní. Na druhou stranu platí

$$\lim_{n\to\infty} C_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{k} i \cdot p_{n+i} = \sum_{i=1}^{k} i \cdot (\lim_{n\to\infty} p_{n+i}) = \sum_{i=1}^{k} i \cdot p = \frac{k(k+1)}{2} p.$$

Odtud tedy dostáváme

$$p = \frac{2}{k(k+1)} C_0 = \frac{2(1 \cdot p_1 + 2 \cdot p_2 + \cdots + k \cdot p_k)}{k(k+1)},$$

což je námi hledaná závislost hodnoty $\lim\limits_{n\to\infty} p_n$ na prvních k hodnotách posloupnosti $\{p_n\}$.

Poznámka: tato úloha Ti možná připadá uměle vykonstruovaná, přesto však má téměř praktické využití. Představ si, že stojíš na políčku nula a podle hodu (spravedlivou) kostkou poskočíš o 1, 2, … , 6 polí dopředu. Na políčku s číslem 10^9 je propadlo — kdo na to políčko dopadne, propadne se a zabije, kdo ho přeskočí, přežije. Když se trochu zamyslíš, zjistíš, že úkol určit pravděpodobnost přežítí vede na naši úlohu pro $k = 6$. Tuto pravděpodobnostní úvahu lze využít i ke zcela jinému (a snazšímu) řešení — zkus to!

2. úloha

Buď P množina všech nenulových polynomů s reálnými koeficienty. Definujme tyto pojmy:

(1) $p \mid q$ (polynom p *dělí* polynom q), pokud $\exists r \in P \quad q = pr$
(2) $p \| q$, pokud $p \mid q \ \& \ q \mid p$ (např. $x + 2 \| 3x + 6$)
(3) polynom $p \in P$ nazveme *prvočinitel*, pokud $(\forall f, g \in P) \quad (p \mid fg \ \Rightarrow \ p \mid f$ nebo $p \mid g)$
(4) polynom $p \in P$ nazveme *nerozložitelný*, pokud $(\forall f \in P) \quad (f \mid p \ \Rightarrow \ f \| 1$ nebo $f \| p)$

Povšimněte si, že $f \| 1$ právě tehdy, když f je konstantní polynom. Dále si povšimněte, že např. polynom $x^2 + x + 1$ je nerozložitelný. Platí následující tvrzení?

(a) Každý prvočinitel je nerozložitelný. (2 BODY)
(b) Každý nerozložitelný polynom je prvočinitel. (3 BODY)

Označme x proměnnou všech polynomů z P. Stupeň polynomu je největší n takové, že koeficient u x^n je nenulový. Uvědomte si, že pro libovolné polynomy $f, g \in P$ stupňů m, n platí, že polynom $f \cdot g$ má stupeň $m + n$.

(a) Buď $p \in P$ prvočinitel, který není nerozložitelný. Pak existuje $f \in P$, který je vlastním dělitelem p (tj. $f \not\parallel 1$, $f \not\parallel p$, neboli $0 <$ stupeň $f <$ stupeň p). Čili $p = fg$ pro nějaké $g \in P$, $0 <$ stupeň $g <$ stupeň p. Tedy $p \mid fg$. Protože je p prvočinitel, musí platit $p \mid f$ nebo $p \mid g$, což je spor (polynom s vyšším stupněm nemůže dělit polynom s nižším stupněm).

(b) Buď $p \in P$ libovolný polynom stupně n. Takový polynom lze jednoznačně rozložit na součin jednočlenů $p = p_n \cdot (x - x_1) \cdot \ldots \cdot (x - x_n)$, kde $p_n \in \mathbb{R}$ je koeficient u mocniny x^n a $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{C}$ jsou kořeny polynomu p.

Dále (ověřte si!) je-li $y \in \mathbb{C}$ kořen p, je i $\overline{y}$ kořen p (číslo komplexně sdružené, neboli $\overline{a+bi} = a - bi$). Upravíme $(x-y)(x-\overline{y}) = x^2 - (2\operatorname{Re} y)x + |y|^2$. Tento polynom je nerozložitelný, neboť jej lze rozložit pouze na dva jednočleny s komplexními koeficienty, které tedy nejsou z P. Triviálně také platí, že polynom $ax + b \in P$ je nerozložitelný. Máme tedy jednoznačný (až na násobky reálným číslem, tj. polynomem stupně 0) rozklad daného polynomu na nerozložitelné polynomy. *(Rozmysli si, že je tomu vskutku tak!)*

Pokud pro nějaký nerozložitelný polynom p platí $p \nmid f$ a $p \nmid g$ (tj. p se nevyskytuje v rozkladu f ani g), tak se p nevyskytuje ani v rozkladu polynomu fg (ten je jednoznačně určen součinem rozkladů f a g) — tj. $p \nmid fg$. Neboli pokud $p \mid fg$, pak $p \mid f$ nebo $p \mid g$, takže p přesně splňuje definici prvočinitele.

Poznámky opravovatele: Část (a) nečinila větší potíže. U (b) se však sešla jen dvě úplná řešení (nepočítaje jeden odkaz na literaturu) — jedno se stalo podkladem pro řešení vzorové, druhé užívalo (zobecněný) největší společný dělitel dvou polynomů.

3. úloha

(a) Dokažte, že neexistují celá čísla x, y, která řeší diofantickou rovnici

$$3y(y+1) = x(x+3) + 1. \qquad \text{(2 BODY)}$$

(b) Dokažte, že diofantická rovnice

$$3y(y+1) = x(x+4) + 1$$

má nekonečně mnoho řešení x, y v celých číslech. (3 BODY)

(a) Ukážeme sporem, že neexistují žádná x, y, která splňují naši diofantickou rovnici $3y(y+1) = x(x+3)+1$. Nechť pro spor taková x, y existují. Na levé straně máme v součinu čísla y a $y+1$, což jsou dvě po sobě jdoucí celá čísla, a proto je jedno z nich sudé, tedy vidíme, že na levé staně naší rovnice stojí vždy sudé číslo.

Naproti tomu na pravé straně máme čísla x a $x+3$, z nichž musí opět jedno být sudé. Proto je číslo $x \cdot (x+3)$ sudé a pravá strana naší rovnice lichá. To je však hledaný spor, neboť levá strana je sudá. Tudíž neexistují žádná celá x, y, která splňují naši diofantickou rovnici.

(b) Dosazením snadno ověříme, že jedním řešením naší diofantické rovnice

$$3y(y+1) = x(x+4) + 1 \qquad (*)$$

je dvojice $x_1 = 1$ a $y_1 = 1$.

Nyní nalezneme rekurentní předpis, který nám z jednoho řešení rovnice $(*)$ (označíme ho jako x_n, y_n) dává řešení další (označíme ho jako x_{n+1}, y_{n+1}), tím předpisem je:

$$x_{n+1} = 12y_n + 7x_n + 18, \qquad y_{n+1} = 7y_n + 4x_n + 11. \tag{$**$}$$

Dosazením $x := x_{n+1}$ a $y := y_{n+1}$ do rovnice $(*)$ a využitím předpokladu, že x_n a y_n rovnici $(*)$ splňují jedoduchými úpravami ověříme, že i celá čísla x_{n+1} a y_{n+1} rovnici $(*)$ splňují.

Celkem tedy z jednoho řešení $x = 1$ a $y = 1$ a rekurentního vztahu dostáváme celou posloupnost různých řešení x_n a y_n. (Poznamenejme ještě, že ze $(**)$ vyplývají nerovnosti $x_{n+1} > x_n$ a $y_{n+1} > y_n$, takže vidíme, že se nám v posloupnostech x_n, y_n nemohou řešení opakovat.)

4. úloha

(a) Dokažte, že pro všechna n přirozená platí:

$$(3n)! \geq 6^n \cdot (n!)^3. \qquad \text{(2 BODY)}$$

(b) Dokažte, že pro všechna n přirozená platí:

$$(n!)! \geq \prod_{i=1}^{n} (i!)^{\frac{n!}{i}}. \qquad \text{(3 BODY)}$$

Dokážeme obecnější tvrzení: Nechť $a_1, \ldots, a_n$ jsou přirozená čísla, pak

$$(a_1 \cdot \ldots \cdot a_n)! \geq \prod_{i=1}^{n} (a_i!)^{a_1 \cdot \ldots \cdot a_{i-1} \cdot a_{i+1} \cdot \ldots \cdot a_n}.$$

Budeme postupovat indukcí: nejprve pro $n = 2$. Chceme dokázat, že $(ab)! \geq (a!)^b (b!)^a$. Pišme tedy $(ab)! = (1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot a) \cdot ((a+1) \cdot \ldots \cdot 2a) \cdot \ldots \cdot (((b-1)a+1) \cdot \ldots \cdot ba)$. Když si z každého činitele k-té závorky vytkneme k a použijeme $((k-1)a+l)/k \geq l$ (to je ekvivalentní s $(k-1)a \geq (k-1)l$, což pro $a \geq l$ platí), dostaneme, že $(ab)! \geq (1^a \cdot a!) \cdot (2^a \cdot a!) \cdot \ldots \cdot (b^a \cdot a!) = (a!)^b \cdot (b!)^a$, což jsme chtěli dokázat.

Indukční krok je ještě snažší, neboť $(a_1 \cdot \ldots \cdot a_n \cdot a_{n+1})! = ((a_1 \cdot \ldots \cdot a_n) \cdot a_{n+1})!$. To je podle právě dokázaného větší nebo rovno $((a_1 \cdot \ldots \cdot a_n)!)^{a_{n+1}} (a_{n+1}!)^{a_1 \cdot \ldots \cdot a_n}$. Když si teď faktoriál součinu n činitelů odhadneme z indukčního předpokladu, dostaneme požadovanou nerovnost pro součin $n+1$ činitelů.

V části (a) stačí položit $a_1 = 3$, $a_2 = n$, v části (b) pak $a_i = i$.

5. úloha

Chobotničce z 5. série konečně sundali sádru ze třetího chapadla.

(a) Kolika způsoby může vylézt na sedmou příčku? (2 BODY)

(b) Kolika způsoby může vylézt na n-tou příčku? (3 BODY)

Chapadla jsou rozlišitelná.

Polohu, kdy má chobotnička jedno (libovolné) z chapadel na j-té příčce, jiné na k-té příčce a poslední na l-té příčce, si označme (j,k,l). Nyní definujme funkci F, která trojici přirozených čísel (j,k,l) přiřadí počet možných výstupů chobotničky do pozice (j,k,l). Pro zvolené k označme $a = F(k,k,k)$ a $b = F(k-1,k,k+1)$. Pak platí následující: $F(k,k,k+1) = 3a+b$ (do této pozice se může dostat tak, že v pozici (k,k,k) přesune jedno ze tří chapadel o příčku výše, nebo v pozici $(k-1,k,k+1)$ přesune jedno konkrétní chapadlo o příčku výše) a $F(k-1,k+1,k+1) = b$. Podobně si promyslete, že $F(k,k+1,k+1) = 2F(k,k,k+1)+F(k-1,k+1,k+1) = 6a+3b$, $F(k,k,k+2) = F(k,k,k+1) = 3a+b$ a konečně $F(k+1,k+1,k+1) = F(k,k+1,k+1) = 6a+3b$ a $F(k,k+1,k+2) = 2F(k,k,k+2)+2F(k,k+1,k+1) = 18a+8b$. Označíme-li nyní $a(n) = F(n,n,n)$ a $b(n) = F(n-1,n,n+1)$ musí tyto dvě posloupnosti pro $n \geq 1$ splňovat:

$$\begin{aligned} a(n+1) &= 6a(n) + 3b(n) \\ b(n+1) &= 18a(n) + 8b(n)\,. \end{aligned}$$

Řešení rovnice budeme nejprve očekávat ve tvaru $a(n) = \lambda^n$, $b(n) = c\lambda^n$. Dosadíme-li do obou rovnic a vydělíme λ^n, dostaneme

$$\begin{aligned} \lambda &= 6 + 3c \\ c\lambda &= 18 + 8c\ . \end{aligned}$$

První rovnici vynásobíme $-c$ a přičteme k druhé a dostaneme kvadratickou rovnici $3c^2 - 2c - 18 = 0$, která má dvě řešení:

$$c_{1,2} = \frac{1}{3}(1 \pm \sqrt{55})\ , \qquad \lambda_{1,2} = 7 \pm \sqrt{55}\,.$$

Pokud dvojice posloupností $a_1(n)$, $b_1(n)$ řeší naší soustavu a dvojice $a_2(n)$, $b_2(n)$ řeší soustavu, pak i dvojice $pa_1(n) + qa_2(n)$, $pb_1(n) + qb_2(n)$, kde p, q jsou libovolná reálná čísla, řeší soustavu. Budeme tedy hledat p, q tak, aby řešení kromě soustavy splňovalo i počáteční podmínky (po chvilce počítání dospějeme k výsledku, že do pozice $(1,1,1)$ se chobotnička dostane šesti způsoby a do pozice $(0,1,2)$ osmnácti způsoby, tj. $a(1) = 6$, $b(1) = 18$).

$$\begin{aligned} a(1) &= pa_1(1) + qa_2(1) = p\lambda_1^1 + q\lambda_2^1 = 7(p+q) + \sqrt{55}(p-q) = 6 \\ b(1) &= pb_1(1) + qb_2(1) = pc_1\lambda_1^1 + qc_2\lambda_2^1 = \frac{62}{3}(p+q) + \frac{8}{3}\sqrt{55}(p-q) = 18\,, \end{aligned}$$

což je soustava lineárních rovnic, kterou umíme vyřešit:

$$p = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{55}}\right)\ , \qquad q = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{\sqrt{55}}\right)\ .$$

Tedy po dosazení máme konečný výsledek

$$a(n) = pa_1(n) + qa_2(n) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{55}}\right)\left(7+\sqrt{55}\right)^n + \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{\sqrt{55}}\right)\left(7-\sqrt{55}\right)^n ,$$

což je přesně počet způsobů, jak se může chobotnička dostat všemi chapadly na n-tou příčku žebříku.

Kdybychom odvodili, že soustava musí být splněna už pro $n = 0$, mohli bychom volit počáteční podmínky $a(0) = 1$ a $b(0) = 0$ a další výpočty by možná byly o něco jednodušší.

Zbývá dosadit a zjistit, že $a(7) = 55978560$ (to bychom mohli vypočítat i pomocí rekurentních formulí, nemuseli bychom odvozovat explicitní vzorec). Poznamenejme ještě, že $a(n)$ je nejbližší celé číslo k číslu $\frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{55}}\right)\left(7+\sqrt{55}\right)^n$, tj. k prvnímu sčítanci. Můžeme tedy vypočítat jen ten a zaokrouhlit.

Poznámky opravovatele: Došla celkem čtyři řešení, dvě byla správně (podobná vzorovému řešení, jinak se to snad ani řešit nedá), zbylí dva řešitelé poslali jen část (a), navíc se jim nepovedlo úplně správně sestavit rovnice.

6. úloha

(a) Nalezněte všechny spojité funkce $f : (0, \infty) \to (0, \infty)$ splňující pro každé kladné x, y

$$f(x+y) = \frac{f(x)f(y)}{f(x)+f(y)}. \qquad \text{(2 BODY)}$$

(b) Nalezněte všechny spojité funkce $f : (0, \infty) \to (1, \infty)$ splňující pro každé kladné x, y

$$f(x+y) = \frac{f(x)f(y)+1}{f(x)+f(y)}. \qquad \text{(3 BODY)}$$

Označme si $\mathbb{D} = \{\frac{m}{2^n} \mid m, n \in \mathbb{N}\}$ množinu všech kladných dyadických racionálních čísel[1]. Dokážeme nejdříve následující.

Lemma $1_{\mathbb{D}}$. *Množina $\mathbb{D}$ všech kladných dyadických racionálních čísel je hustá v $\mathbb{R}^+$.*

Důkaz: Máme ukázat, že pro každá kladná reálná $a < b$ existuje $d \in \mathbb{D}$ takové, že $d \in (a, b)$. Jistě je $b - a > 0$ a tedy existuje přirozené n takové, že $2^n(b-a) > 1$. Pak interval $(2^n a, 2^n b)$ obsahuje nějaké přirozené číslo m, konkrétně $m = \lfloor 2^n a + 1 \rfloor$. Pak ovšem $\frac{m}{2^n} \in (a, b)$ je hledané kladné dyadické číslo.

Nyní k části (a): Jak se snadno přesvědčíme dosazením, úloze vyhovují funkce ve tvaru

$$f(x) = \frac{c}{x}, \qquad (\triangle)$$

[1] Jde o ta kladná racionální čísla, která mají ukončený rozvoj ve dvojkové soustavě.

kde c je kladná reálná konstanta. Budeme se tedy snažit dokázat, že všechna řešení úlohy jsou tohoto tvaru. Předpokládejme, že máme nějaké řešení f. Předně zvolíme $c = f(1) > 0$, pak bude vztah ($\triangle$) platit pro $x = 1$. Předpokládejme, že pro nějaká $x_1, y_1 > 0$ platí vztah ($\triangle$). Pak $f(x_1 + y_1) = \frac{f(x_1)f(y_1)}{f(x_1)+f(y_1)} = \frac{\frac{c}{x_1}\frac{c}{y_1}}{\frac{c}{x_1}+\frac{c}{y_1}} = c\frac{\frac{1}{x_1y_1}}{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{y_1}} = \frac{c}{x_1+y_1}$, čili vztah ($\triangle$) platí i pro $x = x_1 + y_1$. Jelikož vztah ($\triangle$) platí pro $x = 1$, snadno z právě odvozeného tvrzení matematickou indukcí dokážeme, že ($\triangle$) platí pro každé x přirozené. Nyní předpokládejme, že ($\triangle$) platí pro nějaké $x = x_1 > 0$. Pak $\frac{c}{x_1} = f(x_1) = \frac{(f(\frac{x_1}{2}))^2}{2f(\frac{x_1}{2})}$ a jelikož víme, že $f(\frac{x_1}{2}) > 0$, dostáváme $f(\frac{x_1}{2}) = 2f(x_1) = 2\frac{c}{x_1} = \frac{c}{\frac{x_1}{2}}$. Vztah ($\triangle$) tedy platí i pro $x = \frac{x_1}{2}$. Odtud snadno matematickou indukcí (jelikož už máme platnost ($\triangle$) pro $x \in \mathbb{N}$) dokážeme platnost ($\triangle$) pro všechna x tvaru $x = \frac{m}{2^n}$, kde $m, n \in \mathbb{N}$, neboli ($\triangle$) platí pro každé $x \in \mathbb{D}$. Definujeme-li funkci g předpisem $g(x) = \frac{c}{x}$ pro $x > 0$, vidíme, že funkce f, g jsou spojité a shodují se na množině $\mathbb{D}$. Podle lemmatu $1_{\mathbb{D}}$ a lemmatu 2 (ze starších komentářů) pak pro každé $x > 0$ platí $f(x) = g(x) = \frac{c}{x}$. Úlohu (a) tedy řeší právě funkce $f(x) = \frac{c}{x}$, kde c je kladná reálná konstanta.

Teď k části (b): Postup bude zcela analogický části (a), jen tvar funkce f bude jiný. Buď $a > 1$ kladná reálná konstanta. Pak pro každé $x > 0$ platí

$$\frac{a^x + 1}{a^x - 1} > 1$$

a pro každé $x, y > 0$ platí

$$\begin{aligned}\frac{\frac{a^x+1}{a^x-1}\frac{a^y+1}{a^y-1} + 1}{\frac{a^x+1}{a^x-1} + \frac{a^y+1}{a^y-1}} &= \frac{\frac{(a^x+1)(a^y+1)+(a^x-1)(a^y-1)}{(a^x-1)(a^y-1)}}{\frac{(a^x+1)(a^y-1)+(a^y+1)(a^x-1)}{(a^x-1)(a^y-1)}} \\ &= \frac{a^{x+y} + a^x + a^y + 1 + a^{x+y} - a^x - a^y + 1}{a^{x+y} - a^x + a^y - 1 + a^{x+y} - a^y + a^x - 1} = \frac{a^{x+y} + 1}{a^{x+y} - 1}\end{aligned} \tag{$\star$}$$

Odtud je vidět, že funkce f ve tvaru

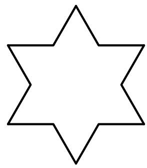
$$f(x) = \frac{a^x + 1}{a^x - 1} \tag{$\square$}$$

kde $a > 1$ je konstanta, jsou řešením úlohy. Ukážeme, že všechna řešení úlohy mají tento tvar. Předpokládejme, že máme nějaké řešení f. Předně volíme (víme, že $f(1) > 1$) $a = \frac{f(1)+1}{f(1)-1} > 1$, snadnou úpravou se přesvědčíme, že pak vztah ($\square$) platí pro $x = 1$. Matematickou indukcí díky vztahu ($\star$) snadno dokážeme platnost vztahu ($\square$) pro každé x přirozené. Dále předpokládejme, že vztah ($\square$) platí pro nějaké $x = x_1 > 0$. Pak $f(x_1) = \frac{(f(\frac{x_1}{2}))^2+1}{2f(\frac{x_1}{2})}$. Tedy $f(\frac{x_1}{2})$ vyhovuje rovnici $u^2 - 2f(x_1)u + 1 = 0$, která má řešení $u_{1,2} = f(x_1) \pm \sqrt{(f(x_1))^2 - 1}$. Vidíme, že $u_1 \cdot u_2 = 1$ a $u_1 > u_2$. S využitím $f(\frac{x_1}{2}) > 1$ tedy dostáváme $f(\frac{x_1}{2}) = u_1$

a po úpravách zjistíme, že vztah (□) je splněn i pro $x = \frac{x_1}{2}$. Matematickou indukcí tedy (s využitím platnosti (□) pro $x \in \mathbb{N}$) snadno dokážeme platnost (□) pro všechna x tvaru $\frac{m}{2^n}$, kde $m, n \in \mathbb{N}$. Tedy definujeme-li funkci g pro $x > 0$ předpisem $g(x) = \frac{a^x+1}{a^x-1}$, vidíme, že f, g jsou spojité a platí $f(x) = g(x)$ pro každé $x \in \mathbb{D}$. Podle lemmatu $1_{\mathbb{D}}$ a lemmatu 2 (ze starších komentářů) tedy pro každé $x > 0$ platí $f(x) = g(x) = \frac{a^x+1}{a^x-1}$. Úlohu tedy řeší právě funkce $f(x) = \frac{a^x+1}{a^x-1}$, kde $a > 1$ je reálná konstanta.[2]

Poznámky opravovatele: Většina řešitelů nepoužívala Cauchyho metodu přímo, jako vzorové řešení, ale jednodušeji pomocí různých substitucí převedli funkcionální rovnici na některou z rovnic, které jsme již vyřešili v předchozích sériích.

7. úloha



Na obrázku vidíte šesticípou hvězdu vzniklou sjednocením dvou rovnostranných trojúhelníků o straně délky 3 (hvězda je „pravidelná“, takže všechny úsečky mají délku 1). Tuto hvězdu chceme pokrýt

(a) šesti (2 BODY), resp.

(b) čtyřmi (3 BODY)

stejně velkými kruhy tak, aby jejich poloměr byl co nejmenší. Jak velké kruhy potřebujeme?

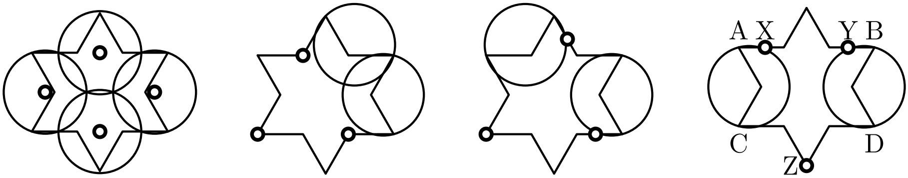
Pokud tuto úlohu nevyřešíš úplně (tj. nezjistíš optimální poloměr), zkus nám poslat i částečné řešení (typu: optimální poloměr je větší než 1/2 a menší než $2\sqrt{2}$).

(a) Uvažme následujících sedm bodů: cípy hvězdy a její střed. Z šesti kruhů aspoň jeden obsahuje aspoň dva z těchto bodů, jeho průměr je tedy aspoň $\sqrt{3}$ (minimální vzdálenost mezi dvěma z těchto bodů). Na druhou stranu takto velkými kruhy hvězdu snadno pokryjeme, každý kruh bude mít za průměr jednu z úseček mezi středem hvězdy a jejím cípem. Optimální poloměr je tedy $\sqrt{3}/2 = 0.866\ldots$

(b) Ukážeme, že optimální poloměr je $r_{\text{opt}} = \sqrt{2} - 1/2 = 0.914\ldots$ Pokrytí hvězdy čtyřmi kruhy o tomto poloměru vidíte na prvním obrázku (spočtěte si, že obrázek je správný, tj. že v bodě, kde je nakreslený průsečík tří čar, se skutečně tyto čáry protínají). Předpokládejme nyní, že je hvězda pokryta čtyřmi kruhy o poloměru $r < r_{\text{opt}}$ a pokusme se odvodit spor. Vzhledem k tomu, že čtyři kruhy pokrývají šest cípů hvězdy, tak buď jeden kruh pokrývá tři cípy (to by ale byl poloměr $\geq 1.5 \geq r_{\text{opt}}$ nebo dva kruhy pokrývají po dvou cípech. Vzhledem k symetrii stačí rozlišit tři případy: tyto dva kruhy mají společný cíp, pokrývají sousední dvojice cípů, příp. nesousední dvojice cípů. Ve všech případech najdeme tři nepokryté body, jejichž vzájemná vzdálenost je alespoň $2r_{\text{opt}}$, a tedy je nemůžeme dvěma zbylými kruhy o poloměru r pokrýt.

---

[2]Pro ty z vás, kteří jsou obeznámeni s hyperbolickými funkcemi je asi přirozenější psát řešení ve tvaru $f(x) =$cotgh(cx), kde $c > 0$ je reálná konstanta.



V prvním případě můžeme zvolit jeden cíp hvězdy a dvě „prohlubně“. Ve druhém i třetím zvolíme jeden cíp a pak dva body, v nichž by „optimální kružnice“ protnuly obvod hvězdy. Rozveďme podrobněji třetí případ, ostatní si zkuste rozmyslet sami. Nejprve důležité upozornění: jediné, co o vyznačených kruzích víme, je to, že obsahují body A a C, resp. B a D. Nemůžeme přepokládat, že vše je jako na našem obrázku. Žádný ze zakroužkovaných bodů nemůže být pokryt vyznačenými kruhy. Bod Z je totiž příliš daleko (více než $2r_{\mathrm{opt}}$) od bodů A, B, nemůže tedy být pokryt kruhy, které tyto body obsahují. Obdobně bod X je daleko od C, Y od D. Zbývá dopočítat vzálenost X a D, vzdálenost X a Y je přesně $2r_{\mathrm{opt}}$ (to víme z výpočtů u optimálního rozmístění). Toto, stejně jako obdobné úvahy pro další dva případy, již přenechávám laskavému čtenáři.

Poznámky opravovatele: Nejvážnější chybou bylo to, že řešitel napsal (např.) „v ideální pozici budou kruhy rozmístěny tak a tak“ a vůbec ho netrápilo, že by měl své tvrzení zdůvodnit. Někdy takové tvrzení ani neplatilo, ale i pokud platilo, tak chybějící důkaz je důvod ke stržení bodů.