Povídání k první sérii

První série se zabývá racionálními a iracionálními čísly. Pravděpodobně tyto pojmy již znáš, pro úplnost je však připomeneme. *Racionálním číslem* rozumíme každé takové číslo q, které je možno zapsat ve tvaru $q = \frac{a}{b}$, kde a je číslo celé a b je číslo přirozené. Racionální čísla je možno charakterizovat také jiným (ekvivalentním) způsobem. Platí, že reálné číslo q je racionální právě tehdy, když jeho desetinný zápis je ukončený nebo periodický (s případnou předperiodou).

Ještě čtenáře musíme upozornit na sedmou úlohu. Bohužel autor této úlohy dodatečně zjistil, že jeho řešení je chybné a že úloha je o mnoho těžší, než jsme se domnívali. Ba dokonce tak těžká, že se ji nikomu z účastníků ani organizátorů semináře doposud nepodařilo vyřešit. Neděs se tedy, pokud se Ti nepodaří tuto úlohu úplně vyřešit.

1. série

Téma:	Racionální a iracionální čísla
Termín odeslání:	11. října 1999

1. úloha (3 body)

Může být součin dvou iracionálních čísel racionální? Může být součet dvou iracionálních čísel racionální? Může být součet racionálního a iracionálního čísla racionální? Své odpovědi zdůvodněte.

2. úloha (3 body)

Zapište racionální číslo $\frac{1}{999^2}$ jako desetinné číslo (tj. vyjádřete, jakou periodu má jeho desetinný zápis).

3. úloha (3 body)

Je číslo $1 + \dfrac{2}{10} + \dfrac{3}{100} + \dfrac{4}{1000} + \dfrac{5}{10000} + \dfrac{6}{100000} + \cdots$ racionální, či iracionální?

4. úloha (5 bodů)

Ukažte, že kvadratická rovnice

$$1999^{2000}x^2 + \left(2000^{1999}\right)^{2000}x + 2001^{2000} = 0$$

má dva různé reálné iracionální kořeny.

5. úloha (5 bodů)

Radek a David hrají hru. Postupně vytvářejí desetinný zápis nějakého čísla, a to tak, že nejprve Radek zapíše číslici na místo desetin, pak David na místo setin, pak Radek na místo

tisícin, a takto se postupně střídají, než vyplní všechna místa (pravdou sice je, že těch míst je nekonečně mnoho, ale oni jsou do hry tak zabraní, že to zkrátka hnedle zvládnou). David vyhrává, pokud je výsledné číslo racionální, Radek vyhraje v případě, že toto číslo je iracionální. Kdo má vyhrávající strategii?
Jak se změní odpověď na naši otázku, když umožníme hráčům vyplňovat desetinný rozvoj číslicemi na přeskáčku (tzn. každý hráč může ve svém tahu doplnit jednu číslici na libovolné místo za desetinou čárkou)?

6. ÚLOHA (5 BODŮ)
Najděte co nejvíce bodů v rovině tak, aby vzdálenosti mezi každými dvěma z nich byly racionální. (Body nesmějí ležet na jedné přímce.) Své odpovědi zdůvodněte.

7. ÚLOHA (5 BODŮ)
Pro přirozené číslo n označme

$$a_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^4} + \frac{1}{5^5} + \frac{1}{6^6} + \cdots + \frac{1}{n^n},$$

$$b_n = a_n + \frac{1}{n^n}.$$

Ukažte, že pak existuje iracionální číslo A takové, že pro všechna přirozená čísla n platí $A \in (a_n, b_n)$.

8. ÚLOHA (5 BODŮ)
Určete, pro která $a_1 \in \mathbb{R}$ existuje k přirozené a čísla $a_2,\ a_3,\ \ldots,\ a_k \in \mathbb{R}$ tak, aby pro každé přirozené n bylo číslo $a_1^n + a_2^n + a_3^n + \cdots + a_k^n$ racionální.

Řešení 1. série

1. úloha
Může být součin dvou iracionálních čísel racionální? Může být součet dvou iracionálních čísel racionální? Může být součet racionálního a iracionálního čísla racionální? Své odpovědi zdůvodněte.

Racionální čísla jsou čísla, která se dají zapsat ve tvaru zlomku, podílu celého a přirozeného čísla, tzn. ve tvaru $\frac{p}{q}$, kde p je číslo celé, q číslo přirozené. Všechna ostatní reálná čísla, která se nedají zapsat ve tvaru zlomku, se nazývají iracionální. Budeme mlčky předpokládat, že iracionální čísla skutečně existují (příkladem je například číslo $\sqrt{2}$, důkaz toho, že je to skutečně číslo iracionální, nalezne čtenář jako součást řešení úlohy 4).[1]

A nyní již zodpovíme naše otázky. Písmenem a budeme označovat nějaké iracionální číslo, můžeš si pod ním představovat třeba $\sqrt{2}$.

Součin dvou iracionálních čísel může být racionální:
Příkladem jsou čísla a a $\frac{1}{a}$, obě dvě jsou totiž iracionální.Číslo a je iracionální dle předpokladu. Kdyby $\frac{1}{a}$ nebylo iracionální, šlo by vyjádřit ve tvaru zlomku $\frac{1}{a} = \frac{p}{q}$ (kde p je zjevně nenulové), a pak by šlo vyjádřit jako zlomek i číslo $a = \frac{q}{p}$, což by byl spor se skutečností, že a je iracionální. Tedy a i $\frac{1}{a}$ jsou čísla iracionální a jejich součin je číslo 1, které je racionální.

Součet dvou iracionálních čísel může být racionální:
Příkladem takových dvou čísel jsou a a $-a$. Obě jsou opět iracionální a jejich součet, číslo 0, je racionální.

Součet racionálního a iracionálního čísla nemůže být racionální:
Tuto skutečnost dokážeme sporem. Předpokládejme proto, že existuje nějaké racionální číslo $\frac{p}{q}$, kde p je celé, q přirozené, a iracionální číslo b, že jejich součet je číslo racionální, tj. číslo tvaru $\frac{r}{s}$, kde r je celé, s je přirozené. Pak platí

$$\frac{p}{q} + b = \frac{r}{s},$$

což po úpravě dává

$$b = \frac{rq - ps}{qs},$$

což znamená, že číslo b je racionální. To je však spor se skutečností, že b je iracionální. Odpověď na naši poslední otázku je proto záporná.

2. úloha
Zapište racionální číslo $\frac{1}{999^2}$ jako desetinné číslo (tj. vyjádřete, jakou periodu má jeho desetinný zápis).

Experimentováním brzy dojdeme k závěru, že desetinný zápis čísla $\frac{1}{999^2}$ je

$$0{,}000\,001\,002\,003\,004\,005\,006\,007\,008\,009\,010\,011\ldots996\,997\,999\,000\,001\,002\,003\,004\ldots,$$

tj. že perioda v jeho desetinném zápise má tvar 000001002003004...996997999.

Tuto skutečnost nyní dokážeme. Označíme (zatím jen domnělou) první periodu našeho čísla za desetinnou čárkou jako A, tzn. přesněji položíme

$$A = 0{,}000\,001\,002\,003\,004\,005\,006\ldots995\,996\,997\,999 = \frac{1}{1000^{999}} + \sum_{i=1}^{998} \frac{i}{1000^{i+1}}.$$

[1] Ač se to nezdá, je iracionálních čísel dokonce nekonečně mnoho a v „jistém smyslu“ mnohem více než čísel racionálních, ale těchto skutečností není při řešení úlohy 1 třeba.

To lze přeupravit postupnými úpravami na

$$
\begin{aligned}
A &= \frac{1}{1000^{999}} + \sum_{i=1}^{998} \frac{i}{1000^{i+1}} = \\
&= \frac{1}{1000^{999}} + \sum_{i=1}^{998} \sum_{k=1}^{i} \frac{1}{1000^{i+1}} = \frac{1}{1000^{999}} + \sum_{k=1}^{998} \left(\sum_{i=k}^{998} \frac{1}{1000^{i+1}} \right) = \\
&= \frac{1}{1000^{999}} + \sum_{k=1}^{998} \frac{1}{999} \cdot \left(\frac{1}{1000^{k}} - \frac{1}{1000^{999}} \right) = \\
&= \frac{1}{1000^{999}} + \left(\sum_{k=1}^{998} \frac{1}{999} \cdot \frac{1}{1000^{k}} \right) - \frac{1}{1000^{999}} \cdot \frac{998}{999} = \\
&= \frac{1}{999} \cdot \frac{1}{1000^{999}} + \frac{1}{999^2} \left(1 - \frac{1}{1000^{998}} \right) = \frac{1}{999^2} \left(1 - \frac{1}{1000^{999}} \right).
\end{aligned}
$$

Tj. celkem jsme dostali, že

$$\frac{1}{999^2} = A \frac{1}{1 - \frac{1}{1000^{999}}}.$$

Uvědomíme-li si, že ze vzorečku pro součet geometrické řady plyne

$$\frac{1}{1 - \frac{1}{1000^{999}}} = 1 + \frac{1}{1000^{999}} + \frac{1}{1000^{999 \cdot 2}} + \frac{1}{1000^{999 \cdot 3}} + \frac{1}{1000^{999 \cdot 4}} + \frac{1}{1000^{999 \cdot 5}} + \cdots,$$

dostáváme, že platí

$$\frac{1}{999^2} = A \left(1 + \frac{1}{1000^{999}} + \frac{1}{1000^{999 \cdot 2}} + \frac{1}{1000^{999 \cdot 3}} + \frac{1}{1000^{999 \cdot 4}} + \frac{1}{1000^{999 \cdot 5}} + \cdots \right),$$

což neznamená nic jiného (vzhledem k počtu míst čísla A), že perioda našeho původního čísla $\frac{1}{999^2}$ je rovna

000 001 002 003 004 005 006 007 008 009 010 011 012 013 014 ... 994 995 996 997 999,

což jsme chtěli ukázat.

Poznámky opravovatele: Došlá řešení lze v podstatě rozdělit na 4 skupiny. Ti co měli pouze výsledek, nebo nesprávný postup dostali 0 bodů. Jeden bod jsem dával většinou za řešení, kde se násobilo $0,\overline{001} \cdot 0,\overline{001}$ „pod sebou“. Často řešitel nezdůvodňoval přechody do vyšších řádů. Pokud řešitel dělil přímo $1 : 999^2$ a nedostatečně zdůvodnil, co se děje se zbytky, dostal 2 body. Zbylá správná řešení byla ohodnocena třemi body.

3. úloha

Je číslo $1 + \frac{2}{10} + \frac{3}{100} + \frac{4}{1000} + \frac{5}{10000} + \frac{6}{100000} + \cdots$ racionální, či iracionální?

Řadu $1+\frac{2}{10}+\frac{3}{100}+\frac{4}{1000}+\frac{5}{10000}+\cdots$ si rozdělíme na nekonečně mnoho řad: $1+\frac{1}{10}+\frac{1}{100}+\frac{1}{1000}+\cdots$, $\frac{1}{10}+\frac{1}{100}+\frac{1}{1000}+\cdots$, $\frac{1}{100}+\frac{1}{1000}+\cdots$, atd. Všechny tyto řady jsou geometrické, proto (s využitím známého vzorečku $1+q+q^2+\cdots=1/(1-q)$ pro $|q|<1$) součet první řady je $\frac{1}{1-1/10}=10/9$, druhé pak $1/10\cdot 10/9$, třetí $1/100\cdot 10/9$ a tak dále. Tato čísla opět tvoří geometrickou posloupnost, jejich součet je tedy $10/9\cdot 10/9=100/81$, což je racionální číslo. (Pozor, tento postup jsme mohli použít jen díky tomu, že všechna čísla, která sčítáme, jsou kladná. Kdyby některá z nich byla záporná, mohlo by se stát, že součet, který jsme dostali po změně pořadí sčítanců, bude jiný, než součet řady původní.)

Poznámky opravovatele: Někteří řešitelé (a nebylo jich málo) prostě napsali, že součet racionálních čísel je číslo racionální. To samozřejmě pro součet nekonečně mnoha čísel nemusí platit, tj. 0 bodů. Další řešitelé našli periodu, ale pak se jim nepovedlo zdůvodnit, že je to skutečně perioda (1 nebo 2 body). Takže všechna správná řešení vypadala tak, že řešitel nějakými výpočty (každý jinými) došel k tomu, že číslo je rovno 100/81, což je racionální číslo.

4. úloha

Ukažte, že kvadratická rovnice

$$1999^{2000}x^2+\left(2000^{1999}\right)^{2000}x+2001^{2000}=0$$

má dva různé reálné iracionální kořeny.

V této úloze budeme využívat jedno pomocné tvrzení, které je možná známé, ale pro úplnost ho zde dokážeme. Napíšeme-li si druhé odmocniny z přirozených čísel za sebe do řady

$$\sqrt{1}=1,\ \sqrt{2},\ \sqrt{3},\ \sqrt{4}=2,\ \sqrt{5},\ \sqrt{6},\ \sqrt{7},\ \sqrt{8},\ \sqrt{9}=3,\ \sqrt{10},\ \sqrt{11},\dots,$$

pak čísla v této řadě jsou buď čísla přirozená, nebo iracionální, přičemž přirozené jest dané číslo jedině v případě, je-li pod odmocninou druhá mocnina z přirozeného čísla (tj. $\sqrt{1}$, $\sqrt{4}$, $\sqrt{9},\dots$), všechny ostatní odmocniny jsou již iracionální (tj. $\sqrt{2}$ atd.). Nyní si tuto vlastnost zformulujeme jako pomocné tvrzení.

Tvrzení. *Nechť se přirozené číslo n nedá zapsat jako druhá mocnina jiného přirozeného číslo, tj. $n\neq k^2$ pro žádné $k\in\mathbb{N}$. Pak $\sqrt{n}$ je číslo iracionální.*

Důkaz: Důkaz tohoto tvrzení ukážeme pro $n=2$. Pro obecné n si analogickým postupem čtenář může důkaz provést jako domácí cvičení.

Nechť tedy $n=2$, budeme dokazovat iracionalitu čísla $\sqrt{2}$.

Důkaz provedeme sporem. Nechť $\sqrt{2}$ je číslo racionální, tj. je ve tvaru $\sqrt{2}=\frac{p}{q}$, kde p je číslo celé a q je přirozené. Můžeme rovněž předpokládat, že zlomek $\frac{p}{q}$ je v základním tvaru, tedy p a q jsou čísla *nesoudělná* (kdyby tomu tak nebylo, lze celý zlomek krátit). Umocněním rovnosti $\sqrt{2}=\frac{p}{q}$ na druhou dostaneme po malé úpravě

$$2\cdot q^2=p^2.$$

Levá strana poslední rovnosti je dělitelná číslem 2, proto i pravá strana této rovnosti musí být dělitelná číslem 2. Speciálně je číslo p ve tvaru $p = 2 \cdot z$, kde z je přirozené číslo. Dosadíme-li vyjádření $p = 2 \cdot z$ do poslední rovnosti, dostaneme vztah $2q^2 = 4z^2$, což po zkrácení dvojky dává rovnici

$$q^2 = 2z^2.$$

Z poslední rovnosti vidíme, že též číslo q je dělitelné číslem 2. Celkem jsme tedy zjistili, že obě čísla p, q jsou dělitelná číslem 2, což je spor s předpokladem, že p a q jsou čísla nesoudělná. Předpoklad, že $\sqrt{2}$ je racionální vedl ke sporu, proto je $\sqrt{2}$ číslo iracionální.

Obdobným způsobem si může čtenář vyzkoušet důkaz pro obecné n.

c.b.d.[2]

Nyní přistoupíme k řešení naší úlohy. Dle známého vzorečku pro kořeny kořeny kvadratické rovnice vidíme, že naše kvadratická rovnice

$$1999^{2000}x^2 + (2000^{1999})^{2000}x + 2001^{2000} = 0$$

má kořeny

$$x_{1,2} = \frac{-(2000^{1999})^{2000} \pm \sqrt{(2000^{1999})^{2\cdot 2000} - 4 \cdot 2001^{2000} \cdot 1999^{2000}}}{2 \cdot 1999^{2000}}.$$

Odtud vidíme, že stačí ukázat, že číslo

$$\sqrt{(2000^{1999})^{2\cdot 2000} - 4 \cdot 2001^{2000} \cdot 1999^{2000}}$$

je reálné iracionální. Z toho již zřejmě (viz úvahy z řešení první úlohy) vyplyne, že naše rovnice má dva různé reálné iracionální kořeny.

Dle pomocného tvrzení stačí ukázat, že výraz pod odmocninou není druhou mocninou přirozeného čísla. K tomu stačí nahlédnout platnost odhadů (díky nimž diskriminant rovnice leží mezi dvěma po sobě jdoucími čtverci[3]):

$$(2000^{1999\cdot 2000} - 1)^2 < 2000^{1999\cdot 2\cdot 2000} - 4 \cdot 2001^{2000} \cdot 1999^{2000} < (2000^{1999\cdot 2000})^2.$$

Pravá nerovnost je zřejmá, levou snadno ověříme roznásobením výrazu úplně vlevo. Tj. obě nerovnosti platí a odtud dle výše uvedených úvah vidíme, že naše rovnice má skutečně dva různé reálné iracionální kořeny.

Poznámky opravovatele: V této úloze bylo třeba především dokázat, že diskriminant D není druhá mocnina přirozeného čísla, odkud už plynulo, že oba kořeny kvadratické rovnice jsou

---

[2] Zkratka „c.b.d.“ znamená „což bylo dokázati“ a dává se pro lepší orientaci v textu na konec důkazu.

[3] Čtverec je jiný výraz pro druhou mocninu.

iracionální. Většina úspěšných řešitelů postupovala sporem, výsledek pak dostávali pomocí zbytků po dělení různými čísly (např. 4, 16, 2000), nebo dokázali existenci přirozeného čísla a, pro které $(a-1)^2 < D < a^2$. Jiná řešení byla obvykle složitější.

5. úloha

Radek a David hrají hru. Postupně vytvářejí desetinný zápis nějakého čísla, a to tak, že nejprve Radek zapíše číslici na místo desetin, pak David na místo setin, pak Radek na místo tisícin, a takto se postupně střídají, než vyplní všechna místa (pravdou sice je, že těch míst je nekonečně mnoho, ale oni jsou do hry tak zabraní, že to zkrátka hnedle zvládnou). David vyhrává, pokud je výsledné číslo racionální, Radek vyhraje v případě, že toto číslo je iracionální. Kdo má vyhrávající strategii?

Jak se změní odpověď na naši otázku, když umožníme hráčům vyplňovat desetinný rozvoj číslicemi na přeskáčku (tzn. každý hráč může ve svém tahu doplnit jednu číslici na libovolné místo za desetinou čárkou)?

První varianta hry je poměrně jednoduchá. Stačí, když bude Radek vyplňovat na svých pozicích postupně všechny číslice desetinného rozvoje nějakého iracionálního čísla. Nezáleží na Davidových číslicích, výsledné číslo (označme ho $0{,}a_1a_2a_3\dots$) bude vždy iracionální. Sporem: kdyby ne, měla by posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ nějakou předperiodu délky n a periodu délky p. Platilo by tedy $a_m = a_{m+kp}$ pro každé $m > n$ a $k \in \mathbb{N}$. Ovšem pak by také pro libovolné liché $m > n$ platilo $a_m = a_{m+2kp}$ pro každé $k \in \mathbb{N}$. Tedy by platilo $a_{2(l+kp)-1} = a_{2l-1+2kp} = a_{2l-1}$ pro každé $k \in \mathbb{N}$ a $2l-1 > n$. Rozvoj Radkova čísla by tedy měl také periodu délky p, což je ve sporu s jeho iracionalitou.

V druhé variantě musí Radek postupovat vychytraleji (tuto strategii je možno použít i v prvním případě). Nejprve si seřadí všechna racionální čísla v intervalu $\langle 0,1\rangle$ do posloupnosti – třeba takto:

$$0,\ 1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{2}{3},\ \frac{1}{4},\ \frac{2}{4},\ \frac{3}{4},\ \frac{1}{5},\ \frac{2}{5},\ \frac{3}{5},\ \frac{4}{5},\ \frac{1}{6},\dots$$

Ve svém n-tém tahu Radek vyplní první (tzn. stojící nejvíce vlevo) ještě nevyplněnou číslici (nechť je to k-tá číslice). Tím si zajistí to, že ať hraje David jakkoli, na konci hry budou vyplněny všechny číslice výsledného čísla (protože m-tá číslice bude vyplněna nejpozději po m-tém Radkově tahu). Hodnotu, kterou zapíše na k-té místo výsledného čísla, Radek určí tak, že se podívá na neukončený desetinný zápis[4] n-tého racionálního čísla své posloupnosti, přičemž se zajímá pouze o k-tou číslici (označme si ji b_k). Pokud je $b_k \le 4$, vyplní Radek na k-té místo číslici 7, pokud je $b_k \ge 5$, vyplní číslici 2. Překvapivě, výsledek bude iracionální, ať už David hraje jakkoliv. Opět sporem: kdyby bylo výsledné číslo Q racionální, muselo by se vyskytovat v Radkově posloupnosti. Nechť se tam vyskytuje na pozici m. Řekněme, že v m-tém tahu Radek vyplňoval l-tou číslici čísla Q. Pak se (díky způsobu, kterým Radek určoval hodnotu cifry, kterou vyplní) neukončený desetinný zápis m-tého racionálního čísla Radkovy

[4] Tím máme na mysli to, že pro racionální čísla s ukončeným desetinným rozvojem budeme uvažovat zápis typu $\frac{3}{10} = 0{,}29999\dots$

posloupnosti a vzniklý zápis čísla Q určitě liší v l-té cifře. To by bylo možné pouze v případě, že vzniklý zápis čísla Q je ukončený[5]. Jenže Radek používal pouze cifry 2 a 7, vzniklý zápis čísla Q musí obsahovat nekonečně mnoho nenulových cifer, je tedy nutně neukončený. Tím jsme dostali kýžený spor.

Metoda, kterou použil Radek, se nazývá *diagonální.* Má široké uplatnění zejména v logice. Pomocí ní lze například ukázat, že existuje matematické tvrzení, které nelze dokázat ani vyvrátit. Též se užívá při důkazu, že existuje problém, který nelze vyřešit žádným algoritmem. V obou případech (populárně řečeno) se dotyčné tvrzení, resp. problém, konstruuje v krocích tak, že v n-tém kroku zajistíme, aby nešel dokázat n-tým důkazem, resp. vyřešit n-tým algoritmem.

Poznámky opravovatele: Na příští sérii si asi pořídím dětskou tiskárničku a vysázím si na ní razítka: „Chybí důkaz!“, „A na to jsi přišel jak?“ ...

Spousta z vás totiž správně určila, že v obou částech má vítěznou strategii Radek, ale nedokázala to. Nestačí jen říct, že budete rušit každou periodu, kterou se soupeř pokusí udělat, protože v jednom tahu „hrozí“ period více. Například u $0, \ldots 12881288$ je třeba nejen nedat 1, ale ani 8. Snadno jistě teď každý z vás odvodí posloupnost číslic, po které ať Radek umístí libovolnou číslici, alespoň jednu periodu neporuší. Osobně bohužel nedokážu ani vyvrátit, že tato strategie je vyhrávající, ani to dokázat. Pokud to umí někdo z vás, dejte vědět.

Řada z vás také zbytečně dumala nad tím, jak to Radek s Davidem stihnou dohrát, resp. mysleli si, že je to po konečném počtu číslic přestane bavit a skončí. Nevěřte tomu, Radek s Davidem jsou opravdu dobří. Umí hrát nekonečně rychle a zaplnit nekonečně mnoho cifer je pro ně tudíž hračka. Nezapomínejte, že matematika nutně pracuje v zidealizovaném prostředí a nehledejte „reálný svět“ tam, kde není.

Ještě k bodování: Část (a) jsem hodnotil třemi, část (b) dvěma body. Při výše uvedené strategii jsem za část (a) dával podle věrohodnosti $0-1$ bod, za lepší strategie, ale bez důkazu 2 body. V druhé části jsem byl velice tolerantní a uznával řešení i těm, kteří nepochopili správně, co se stane, když hráči nezaplní všechna místa v desetinném rozvoji (tedy nezaručili, že budou zaplněna všechna místa).

6. úloha

Najděte co nejvíce bodů v rovině tak, aby vzdálenosti mezi každými dvěma z nich byly racionální. (Body nesmějí ležet na jedné přímce.) Své odpovědi zdůvodněte.

Ukážeme, že lze v rovině najít dokonce nekonečnou prostou posloupnost (tedy spočetně mnoho) bodů takových, že neleží všechny na společné přímce a vzdálenost každých dvou z nich je racionální. Zvolme v rovině $X_1 = [0, 1]$, $X_2 = [0, 0]$ a $X_n = [\frac{2n+1}{2n^2+2n}, 0]$ pro $n \geq 3$. Díky nerovnostem $\frac{1}{n+1} < \frac{2n+1}{2n^2+2n} < \frac{1}{n}$ (kterou ověříme přímým roznásobením) snadno vidíme, že body v posloupnosti $\{X_n\}$ se neopakují (jedná se o prostou posloupnost). Dále platí $|X_1X_2| = 1$ je racionální. Dále pro $m, n \geq 2$ je $|X_mX_n| \in \mathbb{Q}$, protože oba body X_m, X_n

[5] Neukončený desetinný zápis čísel je jednoznačný. Mohli bychom však ještě dostat rovnost typu $0,3 = 0,29999\ldots$, (zde se l-te cifry na obou stranách liší pro $l \geq 2$).

leží na ose x a mají racionální souřadnice. Zbývá tedy ověřit, že pro $n \geq 3$ je $|X_1X_n|$ racionální. Podle Pythagorovy věty je $|X_1X_n| = \sqrt{1 + (\frac{2n+1}{2n^2+2n})^2} = \sqrt{\frac{(2n^2+2n)^2+(2n+1)^2}{(2n^2+2n)^2}} = \sqrt{\frac{(2n^2+2n)^2+2(2n^2+2n)+1}{(2n^2+2n)^2}} = \sqrt{\frac{(2n^2+2n+1)^2}{(2n^2+2n)^2}} = \frac{2n^2+2n+1}{2n^2+2n} \in \mathbb{Q}$. Tím jsme ukázali, že vzdálenost každých dvou bodů naší posloupnosti je racionální.

Někomu by mohlo připadat, že naše volba bodů $X_1,\ X_2, \ldots$ spadla z nebe. Všimněme si však, že každá trojice bodů $X_1,\ X_2,\ X_n,\ n \geq 3$ tvoří Pythagorejský trojúhelník (tj. pravoúhlý trojúhelník s celočíselnými délkami stran), jehož strany jsou vyděleny vhodným přirozeným číslem tak, aby delší odvěsna měla délku 1. Využili jsme tedy faktu, že existuje nekonečně mnoho Pythagorejských trojúhelníků, zde jsme použili konkrétní posloupnost trojúhelníků se stranami $a = 2n + 1,\ b = 2n^2 + 2n,\ c = 2n^2 + 2n + 1$, které jsou Pythagorejské (délky stran jsme vydělili číslem $b = 2n^2 + 2n$).

Teď nám již zbývá jen zdůvodnit, že nelze najít nespočetně mnoho bodů, které vyhovují zadání.[6] Ukážeme, že každý systém bodů v rovině, jehož každá dvojice bodů má racionální vzdálenost je nejvýše spočetný.[7] Nebudeme tedy potřebovat předpoklad, že body neleží na jedné přímce. Označme si $S(a)$, kde a je bod v rovině, systém všech kružnic se středem v a a racionálním poloměrem. Nechť $\{X_\alpha\}_{\alpha \in I}$ je libovolný neprázdný systém bodů, jehož každá dvojice má racionální vzdálenost. Pak vezměme libovolný bod Y z tohoto systému. Je jasné, že pro libovolné $X \neq Y$ z našeho systému platí[8] $X \in \bigcup S(Y)$, protože $|XY|$ je racionální. Uvažujme teď kružnici k o středu Y a pevném poloměru $q \in \mathbb{Q}$. Buď má se systémem $\{X_\alpha\}$ prázdný průnik, nebo existuje nějaký bod $Z \in k$ našeho systému. Pak každá kružnice systému $S(Z)$ protíná k v maximálně dvou bodech a tedy celý systém $S(Z)$ má s k nejvýše spočetný počet průsečíků. Body systému $\{X_\alpha\}$, které leží na k musí ležet jen v těchto průsečících, jelikož mají racionální vzdálenost i od bodu Z. Tedy jsme ukázali, že systém $\{X_\alpha\}$ má s každou kružnicí systému $S(Y)$ nejvýše spočetný průnik. Jelikož počet kružnic systému $S(Y)$ je spočetný (každé lze jednoznačně přiřadit její racionální poloměr) a mimo systém $S(Y)$ již leží pouze bod $Y \in \{X_\alpha\}$, je systém $\{X_\alpha\}$ nejvýše spočetný. Tím jsme hotovi.

Poznámky opravovatele: Řešitelé této úlohy se dají rozdělit na tři skupiny.

V první z nich jsou Ti, kterým se podařilo najít konečný počet (až sedm) bodů v rovině s racionálními vzdálenostmi. Pokud nalezli alespoň pět bodů a netvrdili dále ve svém řešení něco nepravdivého, ocenil jsem jejich úsilí dvěma body. Jinak obdrželi bodů méně.

Ve druhé skupině jsou řešitelé, kteří nalezli nekonečně mnoho bodů vyhovujících zadání. Postup byl povětšinou podobný autorskému řešení.

Poslední část řešitelů ukázala, že bodů může být libovolně velký konečný počet. Umisťovali body pravidelně na jednotkovou kružnici vedle sebe tak, aby vzdálenost sousedních dvou byla racionální.

---

[6] Pokud neznáš pojmy spočetný a nespočetný, budeš se asi muset spokojit se skutečností, že lze najít nekonečně mnoho takových bodů a tento odstavec přeskočit.

[7] To znamená, že body lze seřadit do konečné, nebo nekonečné posloupnosti.

[8] Symbolem $\bigcup S(y)$ rozumíme sjednocení všech kružnic systému $S(Y)$.

Imaginarní body jsem neudělil žádné.

7. úloha
Pro přirozené číslo n označme

$$a_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^4} + \frac{1}{5^5} + \frac{1}{6^6} + \cdots + \frac{1}{n^n},$$

$$b_n = a_n + \frac{1}{n^n}.$$

Ukažte, že pak existuje iracionální číslo A takové, že pro všechna přirozená čísla n platí $A \in (a_n, b_n)$.

Jak ses dočetl v úvodu k první sérii, kompletní řešení této úlohy neznáme (vlastně ani nevíme, jestli úloha platí). Ukážeme zde tedy alespoň částečné řešení. Nejdříve ukážeme, že posloupnost $\{b_n\}$ je klesající. Stačí ukázat, že pro každé n je $b_n - b_{n+1} > 0$. Platí

$$b_n - b_{n+1} = \frac{1}{n^n} - \frac{2}{(n+1)^{n+1}} \geq \frac{1}{n^n} - \frac{n+1}{(n+1)^{n+1}} = \frac{1}{n^n} - \frac{1}{(n+1)^n} > 0,$$

což jsme chtěli.

Dále posloupnost $\{a_n\}$ je zjevně rostoucí. Navíc pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $a_n < b_n$. Odtud již snadnou úvahou zjistíme, že libovolný člen posloupnosti $\{b_n\}$ je větší, než libovolný člen posloupnosti $\{a_n\}$.

Označme

$$A = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^4} + \cdots + \frac{1}{n^n}\right).$$

Číslo A existuje, neboť je limitou rostoucí shora omezené posloupnosti (například b_1 je větší, než libovolný člen posloupnosti a_n). Ukážeme, že splňuje požadavky úlohy. Je jasné, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ je $A > a_n$ (číslo A je limitou rostoucí posloupnosti $\{a_n\}$). Číslo A je však také limitou posloupnosti b_n, jelikož $b_n - a_n = \frac{1}{n^n} \to 0$ pro $n \to \infty$. Proto naprosto analogicky pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $A < b_n$. Ukázali jsme tedy, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ je $A \in (a_n, b_n)$. Zbývá již jen ukázat, že A je číslo iracionální. To se nám bohužel ani při největším úsilí nepodařilo.

Poznámky opravovatele: Tuto úlohu se bohužel nikomu nepodařilo vyřešit, dokonce ani autorovi úlohy ne. Nejlepší řešení byla ta, kde řešitelé dokázali existenci nějakého A, tj. nezjistili jen, že jimi nalezené A je iracionální. Za takovéto řešení jsem uděloval dva body.

Mnoho řešitelů se dopustilo následující chyby. Nejprve dokázali (nebo konstatovali), že mezi libovolnými dvěma racionálními čísly se nachází nekonečně mnoho iracionálních čísel; čísla a_n i b_n jsou racionální, je tedy mezi nimi nějaké iracionální číslo A. To je samozřejmě pravda, ale takhle pro každé n najdou nějaké A, nejspíš pro různá n najdou různá A. Co jsme my ale chtěli, bylo najít **stejné** A pro všechna n přirozená! Někteří řešitelé ještě psali, že z toho, že v každém intervalu (a_n, b_n) je nekonečně mnoho iracionálních čísel plyne, že existuje i nějaké iracionální číslo A, které by bylo ve všech takových intervalech. Tato úvaha ale opravdu neplatí. Kdyby totiž bylo $a_n = 1+1/10+1/10^2+1/10^3+\cdots+1/10^n$, $b_n = a_n+1/10^n$, jejich úvahy by mohly probíhat úplně stejně, avšak tvrzení úlohy očividně neplatí (rozmysli si, proč). Při řešení je třeba nějak využít toho, že přičítané členy jsou $1/n^n$, tedy výrazy, které hodně rychle klesají.

8. úloha

Určete, pro která $a_1 \in \mathbb{R}$ existuje k přirozené a čísla $a_2,\ a_3,\ \ldots,\ a_k \in \mathbb{R}$ tak, aby pro každé přirozené n bylo číslo $a_1^n + a_2^n + a_3^n + \cdots + a_k^n$ racionální.

Mějme k-tici reálných čísel $a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_k$. Označme:

$$s_n = a_1^n + a_2^n + \cdots + a_k^n = \sum_{i=1}^{k} a_i^n$$

a dále

$$\begin{aligned}
v_1 &= -(a_1 + a_2 + \cdots + a_k) = -\sum_{i=1}^{k} a_i \\
v_2 &= a_1a_2 + a_1a_3 + \cdots + a_1a_k + a_2a_3 + \cdots + a_{k-1}a_k = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=i+1}^{k} a_ia_j \\
v_3 &= -(a_1a_2a_3 + a_1a_2a_4 + \cdots + a_{k-2}a_{k-1}a_k) = -\sum_{i=1}^{k} \sum_{j=i+1}^{k} \sum_{l=j+1}^{k} a_ia_ja_l \\
&\vdots \\
v_{k-1} &= (-1)^{k-1}(a_1a_2\cdots a_{k-1} + a_1\cdots a_{k-2}a_k + \cdots + a_2a_3\cdots a_k) = \\
&= (-1)^{k-1} \sum_{i=1}^{k} a_1\cdots a_{i-1}a_{i+1}\cdots a_k \\
v_k &= (-1)^k a_1a_2\cdots a_k
\end{aligned}$$

Čísla $v_1,\ v_2,\ \ldots,\ v_k$ (pokud je chápeme jako polynomy proměnných $a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_k$) se nazývají Viètovy polynomy a platí pro ně následující rovnost, kterou zde nebudu dokazovat (tato jejich vlastnost je známá a důkaz je cvičení na matematickou indukci).

$$(x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_k) = x^k + v_1x^{k-1} + v_2x^{k-2} + \cdots + v_{k-1}x + v_k$$

Tuto rovnost nutno chápat jako rovnost polynomů v proměnné x (tzn. že platí pro každé x). Tato rovnost v podstatě znamená, že čísla $a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_k$ jsou kořeny polymu s koeficienty $1,\ v_1,\ v_2,\ \ldots,\ v_k$.

Nyní zde dokáži následující Lemma, které nám pomůže charakterizovat hledaná čísla.

Lemma 1: Pro libovolné přirozené n platí

$$s_n + v_1 s_{n-1} + \cdots + v_{n-1} s_1 + v_n n = 0$$

kde $v_{k+1},\ v_{k+2}, \ldots$ dodefinujeme nulou.
Důkaz: Nejprve tvrzení dokážeme pro $k \leq n$. Vezměme polynom

$$(x - a_1)(x - a_2) \cdots (x - a_k) x^{n-k} = x^n + v_1 x^{n-1} + v_2 x^{n-2} + \cdots + v_n$$

Vzhledem k uvedené rovnosti a dodefinování $v_{k+1},\ v_{k+2}, \ldots$ nulou platí i tato rovnost. Nyní do toho polynomu dosadíme jeho kořeny, tj. postupně $a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_k$ a $(n-k)$ krát nulu, čímž dostaneme vždy nulu, a vzniklých n rovností posčítáme, dostaneme dokazované tvrzení. Zbývá dořešit případ $k > n$. Výraz na levé straně dokazovaného vztahu můžeme chápat jako polynom v proměnných $a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_k$, který se má rovnat nule pro libovolnou počáteční volbu $a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_k$. To znamená, že tento polynom musí být identicky roven nule, tj. všechny jeho koeficienty musí být nulové. Všechny jeho členy jsou stupně nejvýše n, neboť v_i resp. s_i obsahuje pouze členy stupně i. Soustřeďme se na koeficient u členu $a_{i_1}^{j_1} a_{i_2}^{j_2} \cdots a_{i_n}^{j_n}$. Nyní označme $k' = n' = n$, $a_1' = a_{i_1}$, $a_2' = a_{i_2}$, $\ldots$, $a_n' = a_{i_n}$ a $v_1',\ v_2',\ \ldots,\ v_n',\ s_1',\ s_2',\ \ldots,\ s_n'$ příslušné polynomy pro $a_1',\ a_2',\ \ldots,\ a_n'$. Pokud nyní dosadíme čárkované proměnné do uvedené rovnosti bude koeficient u členu $a_1'^{j_1} a_2'^{j_2} \cdots a_n'^{j_n}$ zřejmě stejný, jako zkoumaný koeficient v původní dokazované rovnosti. Jelikož jsme volili $k' = n'$ víme již podle první části důkazu, že pro čárkované proměnné rovnost platí, a tedy tento koeficient musí být roven nule. Nule je tedy roven i koeficient v původní rovnosti a jelikož jsme zkoumaný člen volili (vzhledem k maximálnímu stupni polynomu na levé straně) zcela libovolně, jsou všechny koeficienty v původním polynomu rovny nule a Lemma je dokázáno.

Nyní již můžeme přímo charakterizovat hledaná čísla, k čemuž nám poslouží Lemma 2.
Lemma 2: Nechť n je přirozené číslo. Pak čísla $s_1,\ s_2,\ \ldots,\ s_n$ jsou všechna racionální právě tehdy, když čísla $v_1,\ v_2,\ \ldots,\ v_n$ jsou všechna racionální.
Důkaz: Tvrzení dokážeme matematickou indukcí.

I: Pro $n = 1$ je tvrzení triviální, neboť

$$s_1 = a_1 + a_2 + \cdots + a_k = -v_1$$

a tedy s_1 je racionální právě když v_1 je racionální.

II: Předpokládejme, že tvrzení platí pro $n-1$. Nejprve dokažme implikaci zleva doprava. Podle Lemmatu 1 platí:

$$v_n = -\frac{1}{n}(s_n + v_1 s_{n-1} + \cdots + v_{n-1} s_1)$$

a podle předpokladu jsou čísla $v_1,\ v_2,\ \ldots,\ v_{n-1}$ a $s_1,\ s_2,\ \ldots,\ s_n$ racionální, tedy i v_n je racionální. Na druhou stranu opět podle Lemmatu 1 platí:

$$s_n = -v_1 s_{n-1} - \cdots - v_{n-1} s_1 - v_n n$$

a podle předpokladu jsou čísla $v_1,\ v_2,\ \dots,\ v_n$ a $s_1,\ s_2,\ \dots,\ s_{n-1}$ racionální, tedy i s_n je racionální.

Zjistili jsme, že vyhovující k a $a_2,\ a_3,\ \dots,\ a_k$ existují právě pro taková a_1, která jsou kořenem nějakého polynomu s racionálními koeficienty. Číslo k je potom stupeň tohoto polynomu a $a_2,\ a_3,\ \dots,\ a_k$ jeho ostatní kořeny. Aby však ostatní čísla $a_2,\ a_3,\ \dots,\ a_k$ byla reálná, musí mít uvažovaný polynom pouze reálné kořeny. Řešením jsou tedy všechna čísla, která jsou kořenem nějakého polynomu s racionálními koeficienty, který má pouze reálné kořeny.

Poznámka: Vidíme tedy, že všechna vyhovující čísla a_1 jsou *algebraická* (číslo t se nazývá algebraické, existuje-li nenulový polynom $P(x)$ s racionálními koeficienty takový, že $P(t)=0$). Není ale pravda, že všechna algebraická čísla jsou vyhovující. Vezmeme-li například $a_1 = \sqrt[3]{2}$, vyhovující $a_2,\ \dots,\ a_k$ již nenalezneme. Platí totiž následující tvrzení (které zde ale nebudeme dokazovat):

Je-li $P(x)$ polynom s racionálními koeficienty a $P(\sqrt[3]{2}) = 0$, pak je polynom P dělitelný polynomem $x^3 - 2$. Speciálně platí, že P má (alespoň dva) komplexní kořeny — zbylé dvě třetí odmocniny ze dvou.

Polynom $x^3 - 2$ je tzv. *minimální* polynom čísla $\sqrt[3]{2}$ nad tělesem racionálních čísel (tzn. nenulový polynom s vedoucím koeficientem 1, jehož kořenem je $\sqrt[3]{2}$ a který má nejmenší možný stupeň). Platí obecnější zákonitost — každý polynom s racionálními koeficienty je dělitelný minimálním polynomem libovolného svého kořene. Dále platí, že každý nenulový polynom je minimálním polynomem svých kořenů právě tehdy, když jej nelze rozložit na součin dvou polynomů s racionálními koeficienty a menšími stupni. Odtud je vidět metoda, kterou lze nalézt mnoho algebraických čísel a_1, které nevyhovují požadavkům zadání. Stačí např. vzít nějaký nerozložitelný polynom lichého stupně většího, než 1, který má jen jeden reálný kořen t. Pak je zjevně t algebraické číslo, které nevyhovuje požadavkům zadání.

Poznámky opravovatele: Až na jednu výjimku nikdo z řešitelů nenašel jiná řešení, než čísla typu $a_1 = a + \sqrt{b}$, kde $a,\ b \in \mathbb{Q}$, za což jsem dával 1 bod. Úloha byla asi moc těžká.