2. série

Téma: Matematická indukce

Termín odeslání: 25. října 1999

1. úloha (3 body)

Ukažte, že pro libovolné přirozené n platí

$$\frac{1}{1\cdot 7}+\frac{1}{7\cdot 13}+\frac{1}{13\cdot 19}+\cdots+\frac{1}{(6n-5)\cdot(6n+1)}=\frac{n}{6n+1}.$$

2. úloha (3 body)

Ukažte, že pro libovolné přirozené n platí

$$\frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n+1)^2}+\cdots+\frac{1}{(2n)^2}\le\frac{5}{4}.$$

3. úloha (3 body)

Dokažte, že pro každé $n\ge 2$ přirozené platí rovnost

$$\left(2+\frac{1}{1}-\frac{1}{3}\right)\cdot\left(2+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)\cdot\left(2+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)\cdots\left(2+\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}\right)=2^n\cdot\left(1-\frac{1}{n+1}\right).$$

4. úloha (5 bodů)

Dokažte, že n konvexních 1999-úhelníků (kde $n\ge 1$) může rozdělit rovinu na nejvýše $2+1999n(n-1)$ částí.

5. úloha (5 bodů)

Označme jako s_n součet $\frac{1}{\sqrt{1.n}}+\frac{1}{\sqrt{2.n}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n.n}}$. Dokažte, že pro každé přirozené číslo n je $s_n<2$.

6. úloha (5 bodů)

Dokažte, že existuje libovolně dlouhá konečná rostoucí posloupnost splňující pro $n\ge 1$ vztah $a_{n+1}=19(99-a_n)a_n$. Existuje nekonečná rostoucí posloupnost se stejnou vlastností?

7. úloha (5 bodů)

Mějme dvě posloupnosti přirozených čísel $(x_1,\dots,x_n)$, $(y_1,\dots,y_m)$, kde $m,n\in\mathbb{N}$. Dokažte, že $(x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_m)=(y_1,\dots,y_m,x_1,\dots,x_n)$ právě tehdy, když existuje taková posloupnost $(t_1,\dots,t_k)$, že $(x_1,\dots,x_n)$ je n/k-krát zopakovaná $(t_1,\dots,t_k)$ a $(y_1,\dots,y_m)$ je m/k-krát zopakovaná $(t_1,\dots,t_k)$.

8. ÚLOHA (5 BODŮ)

Nechť $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ je rostoucí funkce, která pro každé přirozené číslo n splňuje vztah $f(f(n)) = f(n) + n - 1$. Dokažte, že pak pro každé $n \in \mathbb{N}$ je $f(n+1) - f(n)$ buď 1 nebo 2. ($\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$.)

Řešení 2. série

1. úloha

Ukažte, že pro libovolné přirozené n platí

$$\frac{1}{1 \cdot 7} + \frac{1}{7 \cdot 13} + \frac{1}{13 \cdot 19} + \dots + \frac{1}{(6n-5) \cdot (6n+1)} = \frac{n}{6n+1}.$$

Důkaz provedeme matematickou indukcí. Pro $n = 1$ tvrzení platí, jak ověříme přímým dosazením. Na levé i pravé straně naší rovnosti dostaneme totiž $\frac{1}{7}$. Nyní budeme předpokládat, že naše tvrzení platí pro $n = k$, kde k je libovolné přirozené číslo, a budeme dokazovat, že pak naše tvrzení platí i pro $n = k + 1$. Pokud se nám toto podaří, budeme mít naše tvrzení dokázané (pomocí matematické indukce) pro libovolné přirozené n.

Pro $n = k$ má naše tvrzení tvar:

$$\frac{1}{1 \cdot 7} + \frac{1}{7 \cdot 13} + \frac{1}{13 \cdot 19} + \dots + \frac{1}{(6k-5) \cdot (6k+1)} = \frac{k}{6k+1},$$

když nyní k oběma stranám této rovnosti přičteme číslo $\frac{1}{(6k+1)\cdot(6k+7)}$, dostaneme

$$\frac{1}{1 \cdot 7} + \frac{1}{7 \cdot 13} + \frac{1}{13 \cdot 19} + \dots + \frac{1}{(6k-5) \cdot (6k+1)} + \frac{1}{(6k+1) \cdot (6k+7)} =$$

$$= \frac{k}{6k+1} + \frac{1}{(6k+1) \cdot (6k+7)} = \frac{6k^2 + 7k + 1}{(6k+1) \cdot (6k+7)} = \frac{(6k+1) \cdot (k+1)}{(6k+1) \cdot (6k+7)} = \frac{k+1}{6k+7},$$

přičemž poslední rovnost už snadno přeupravíme na tvar:

$$\frac{1}{1 \cdot 7} + \frac{1}{7 \cdot 13} + \dots + \frac{1}{(6k-5) \cdot (6k+1)} + \frac{1}{(6(k+1)-5) \cdot (6(k+1)+1)} = \frac{k+1}{6(k+1)+1},$$

což je dokazovaná rovnost pro $n = k + 1$.

Tím jsme ukázali, že z předpokladu, že tvrzení platí pro $n = k$, vyplývá, že platí rovněž pro $n = k + 1$. Tím je hotov druhý indukční krok a naše rovnost dokázána pro všechna n.

Poznámky opravovatele: Tuto úlohu vyřešili téměř všichni správně. U několika řešitelů se vyskytly pokusy dokazovat daný vztah empiricky (např. jen pro čísla 1, 2 a 3). Někdy může být užitečné si to zkusit pro nějaká konkrétní čísla, ale rozhodně to nelze vydávat za důkaz — ohodnotil jsem 0 body.

Za takové drobnosti, jako zapomenutí ověření vztahu pro jedničku, jsem strhnul 1 bod.

Většina problémů byla ale s druhým indukčním krokem. Velmi často (asi v polovině případů) se vyskytoval „důkaz“, který vycházel z toho, co se má dokázat a dospěl k předpokladům. Nejčastěji řešitelé vycházeli z rovnice pro $n+1$ a tu upravovali tak dlouho, až dospěli k rovnosti, která evidentně platí (např. $0=0$), a neuvedli při tom, že prováděli pouze ekvivalentní úpravy. Takový postup je však logicky chybný. Pokud se totiž upravuje nějaká rovnice a jednotlivé kroky se píší pod sebe, neznamená to automaticky, že úpravy fungují i „odzadu“. Problém je v tom, že k rovnosti typu $0=0$ lze dospět nejen úpravami platného vztahu, ale úpravami *libovolného vztahu* (pokud úpravy nejsou ekvivalentní), takže pokud nezdůvodníme, že lze dané úpravy provádět i opačným směrem, **nic jsme nedokázali**. Viz též poznámky k 5. úloze.

2. úloha

Ukažte, že pro libovolné přirozené n platí

$$\frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n+1)^2}+\cdots+\frac{1}{(2n)^2}\le\frac{5}{4}.$$

Tvrzení opět dokážeme matematickou indukcí (myšlenka řešení je obdobná jako u první úlohy). Pro $n=1$ má naše nerovnost tvar $\frac{5}{4}\le\frac{5}{4}$, což zjevně platí. Předpokládejme nyní, že naše tvrzení platí pro $n=k$, tj.

$$\frac{1}{k^2}+\frac{1}{(k+1)^2}+\cdots+\frac{1}{(2k)^2}\le\frac{5}{4}.$$

K oběma stranám naší nerovnosti nyní přičteme[1] číslo

$$\frac{1}{(2k+1)^2}+\frac{1}{(2(k+1))^2}-\frac{1}{k^2}.$$

Pak dostaneme nerovnost

$$\frac{1}{(k+1)^2}+\cdots+\frac{1}{(2k)^2}+\frac{1}{(2k+1)^2}+\frac{1}{(2(k+1))^2}\le\frac{5}{4}+\frac{1}{(2k+1)^2}+\frac{1}{(2(k+1))^2}-\frac{1}{k^2}.$$

Ukážeme-li nyní, že pravá strana získané rovnosti je menší nebo rovna než $\frac{5}{4}$, dostaneme nerovnost

$$\frac{1}{(k+1)^2}+\cdots+\frac{1}{(2k)^2}+\frac{1}{(2k+1)^2}+\frac{1}{(2(k+1))^2}\le\frac{5}{4},$$

[1] Tento krok provádíme proto, abychom na levé straně naší nerovnosti dostali výraz vyskytující se v našem tvrzení pro $n=k+1$.

což je dokazovaná nerovnost pro $n = k + 1$ a tím bude hotov druhý indukční krok a úloha vyřešena.

Zbývá nám proto ještě ukázat platnost nerovnosti

$$\frac{5}{4} + \frac{1}{(2k+1)^2} + \frac{1}{(2(k+1))^2} - \frac{1}{k^2} \leq \frac{5}{4},$$

což pomocí ekvivalentních úprav postupně přepíšeme na

$$\frac{1}{(2k+1)^2} + \frac{1}{(2(k+1))^2} \leq \frac{1}{k^2}.$$

Tuto nerovnost již snadno ověříme, platí totiž

$$\frac{1}{(2k+1)^2} + \frac{1}{(2(k+1))^2} \leq 2\frac{1}{(2k)^2} = \frac{1}{2k^2} \leq \frac{1}{k^2}.$$

Tím jsme ukázali platnost požadované nerovnosti a dle výše uvedených úvah též splnění druhého indukčního kroku. A tím je původní nerovnost dokázaná pro libovolné n.

Poznámky opravovatele: Tato úloha byla celkem lehká, proto asi byla tříbodová. Přesto se vyskytlo několik typických chyb. Nejčastější chybou bylo, že jste zapomněli na to, že mezi $2n$ a $2(n+1)$ je $2n+1$. Za to jsem strhával jeden bod. Dále si někteří „přeformulovali“ matematickou indukci. Dokázali tvrzení pro $n = 1$, pak dokázali tvrzení pro $n+1$ (tzn. $n = 2$). A ještě se tvářili, že je to správně. Těmto řešitelům a jiným, kteří měli jen první indukční krok, jsem dával po bodu. Pak bylo ještě několik řešitelů, kteří neměli ani ten první indukční krok, nebo ho měli špatně.

3. úloha

Dokažte, že pro každé $n \geq 2$ přirozené platí rovnost

$$\left(2 + \frac{1}{1} - \frac{1}{3}\right) \cdot \left(2 + \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) \cdot \left(2 + \frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) \cdots \left(2 + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1}\right) = 2^n \cdot \left(1 - \frac{1}{n+1}\right).$$

Označme si levou stranu dokazované rovnosti jako S_n. Budeme postupovat matematickou indukcí. Pro $n = 2$ chceme dokázat, že $S_2 = 2^2(1 - 1/3)$, což vzhledem k tomu, že $S_2 = 2 + 1/1 - 1/3 = 8/3$, skutečně platí.

Předpokládejme nyní, že tvrzení platí pro $n = k$ (kde $k \geq 2$) a snažme se je dokázat pro $n = k + 1$. Víme tedy, že $S_k = 2^k \left(1 - \frac{1}{k+1}\right)$, a začneme upravovat:

$$\begin{aligned} S_{k+1} &= S_k \left(2 + \frac{1}{k} - \frac{1}{k+2}\right) = 2^k \left(1 - \frac{1}{k+1}\right) \left(2 + \frac{2}{k(k+2)}\right) \\ &= 2^{k+1} \frac{k\left(k(k+2)+1\right)}{(k+1)k(k+2)} = 2^{k+1} \frac{(k+1)^2}{(k+1)(k+2)} \\ &= 2^{k+1} \frac{k+1}{k+2} = 2^{k+1} \left(1 - \frac{1}{k+2}\right). \end{aligned}$$

Dokazované tvrzení tedy opravdu pro $n = k + 1$ platí a tím je důkaz matematickou indukcí hotov.

Poznámky opravovatele: Jen několik řešitelů dokazovalo rovnost ze zadání přímo, většina řešitelů si s touto úlohou snadno poradila pomocí indukce (jak se dalo očekávat). Ovšem mnozí zapomněli zformulovat indukční předpoklad a zmínit jeho užití (podle závažnosti chyby jsem strhávala až 2 body) a někteří provedli pouze první indukční krok (ti dostali nejvýše 1 bod).

4. úloha
Dokažte, že n konvexních 1999-úhelníků (kde $n \geq 1$) může rozdělit rovinu na nejvýše $2 + 1999n(n-1)$ částí.

Důkaz povedeme matematickou indukcí. Pokud je 1999-úhelník jeden, pak dělí rovinu na dvě části. Předpokládejme nyní, že n 1999-úhelníků je již v rovině umístěno (a dělí ji na nejvýše $2 + 1999n(n-1)$ částí) a přidáme k nim $(n+1)$. Každá jeho úsečka protne každý z ostatních 1999-úhelníků nejvýše ve dvou bodech (kdyby nějaký obrazec protnula ve třech bodech, musely by existovat tři body a, b, c této úsečky, takto seřazené, že a a c leží uvnitř obrazce a b vně, což je spor s konvexitou obrazce). Obvod 1999-úhelníka tedy protne obvody ostatních 1999-úhelníků nejvýše v $n \cdot 1999 \cdot 2$ bodech, které jeho obvod rozdělí na stejný počet úseků. Protože každý z těchto úseků rozdělí jednu část na dvě, tak nových částí bude nejvýše $1999 \cdot 2n$. Všech částí tedy bude nejvýše $2 + 1999n(n-1) + 1999 \cdot 2n = 2 + 1999(n+1)n$, což jsme chtěli dokázat.

Pro každé n skutečně existuje takové rozmístění n 1999-úhelníků, že tyto 1999-úhelníky dělí rovinu na právě $2 + 1999n(n-1)$ částí — stačí uvažovat n stejně velkých pravidelných 1999-úhelníků se společným středem, jen jinak natočených (jistě existuje takové natočení $(n+1)$. 1999-úhelníka, aby se žádné tři úsečky jejich obvodů neprotínaly v jednom bodě. Máme totiž k dispozici nekonečně mnoho různých úhlů a potřebujeme se vyhnout jen konečně mnoha bodům.)

5. úloha
Označme jako s_n součet $\frac{1}{\sqrt{1.n}} + \frac{1}{\sqrt{2.n}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n.n}}$. Dokažte, že pro každé přirozené číslo n je $s_n < 2$.

Budeme postupovat matematickou indukcí. Pro $n = 1$ tvrzení očividně platí — potřebujeme ověřit, že $\frac{1}{\sqrt{1.1}} < 2$, čili $1 < 2$, což jistě platí.

Nechť naše nerovnost platí pro $n = k$, dokazujme ji pro $n = k + 1$. Nejprve musíme nahlédnout, že

$$
\begin{aligned}
s_{k+1} &= \left(\frac{1}{\sqrt{1.(k+1)}} + \frac{1}{\sqrt{2.(k+1)}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{k.(k+1)}}\right) + \frac{1}{\sqrt{(k+1).(k+1)}} \\
&= s_k\sqrt{\frac{k}{k+1}} + \frac{1}{k+1}.
\end{aligned}
$$

Ještě si uvědomme, že pro každé $x \leq 1$ platí $\sqrt{1-x} \leq 1 - x/2$ (stačí tuto nerovnost umocnit na druhou). Nyní už můžeme začít upravovat:

$$
\begin{aligned}
s_{k+1} = s_k\sqrt{\frac{k}{k+1}} + \frac{1}{k+1} &= s_k\sqrt{1-\frac{1}{k+1}} + \frac{1}{k+1} \\
&< 2\left(1 - \frac{1}{2(k+1)}\right) + \frac{1}{k+1} = 2
\end{aligned}
$$

a jsme tedy hotovi.

Poznámky opravovatele: Za tuto úlohu více než 80 procent účastníků obdrželo 5 bodů, neboť ji indukcí vyřešili správně. Dva řešitelé dokonce druhý indukční krok $V(n) \Rightarrow V(n+1)$ dokazovali sporem. Byl jsem skoupý na imaginární body: $-i$ za zdlouhavé rozbory, $+i$ dostal jediný řešitel.

Tři body jsem udělil několika řešitelům, jeden mi tvrdil, že $\sqrt{n} - \sqrt{n-1} > \sqrt{2} - \sqrt{1}$, což neplatí, a jiný nedokončil důkaz. Velice pěkné řešení vycházelo z předpokladu $s(n+1) - s(n) > 0$ řešitel dále dokázal lepší odhad: $s(n) < 1 + \sqrt{\frac{n}{n+1}}$. Je pravdou, že posloupnost součtů $s(n)$ je rostoucí, ale v důkazu tato podstatná věc chyběla. Byl jsem velice strohý na udělování bodů řešitelům, kteří tvrdili, že z několika (konečně) spočítaných hodnot vyplývá platnost tvrzení, anebo sčítali odmocniny $\sqrt{a} + \sqrt{b} = \sqrt{a+b}$.

V závěru svého příspěvku se pokusím trochu více osvětit, v čem spočívá typická chyba vyskytující se ve spoustě řešení. Někteří řešitelé z nerovnosti $2(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) \geq \frac{1}{\sqrt{n+1}}$ odvodili implikacemi platnost výroku $1 > 0$ (resp. $4n^2 + 4n + 1 > 4n^2 + 4n$). Tento důkaz je logicky nesprávný, v řešeních jsem uváděl nutnost odvození **ekvivalencemi**. Pak lze důkaz otočit a ze **známého** vztahu $1 > 0$ odvodit požadovaný. Výše popsaným způsobem je totiž možné např. z **nepravdivého** vztahu $-2 > 0$ odvodit **pravdivý** a pak tvrdit, že $-2 > 0$. Důkaz: Předpokládejme, že $-2 > 0$. Pak je -2 kladné číslo a můžeme jím při zachování platnosti nerovnosti tuto nerovnost vydělit. Jistě platí $-2/-2 = 1 > 0$. Platí pak, že -2 je větší než 0? **NE!**

6. úloha

Dokažte, že existuje libovolně dlouhá konečná rostoucí posloupnost splňující pro $n \geq 1$ vztah $a_{n+1} = 19(99 - a_n)a_n$. Existuje nekonečná rostoucí posloupnost se stejnou vlastností?

Řešme nerovnici $a_{n+1} = 19(99 - a_n)a_n > a_n$. Tj. $19a_n(99 - 1/19 - a_n) > 0$. Bude-li a_n ležet v intervalu $I = (0, 98\frac{18}{19})$, bude zjevně platit $a_{n+1} > a_n$. Nyní již můžeme matematickou indukcí najít posloupnost libovolné konečné délky. Zvolme tedy $a_0 \in I$ a máme posloupnost délky 1. A nyní indukční krok — předpokládejme, že pro $k \geq 0$ existuje rostoucí posloupnost $\{b_n\}_{n=0}^{k}$ s požadovanými vlastnostmi, která leží celá v intervalu I, chceme dokázat, že v intervalu I existuje i posloupnost o jeden člen delší, která má požadované vlastnosti. Uděláme to tak, že na začátek posloupnosti přidáme jeden prvek — jistě existuje b_{-1} takové, že $b_0 = 19(99 - b_{-1})b_{-1}$, vyřešíme kvadratickou rovnici $19b_{-1}^2 - 19 \cdot 99b_{-1} + b_0 = 0$ a vidíme, že hledané $b_{-1} = \frac{1}{2\cdot 19}\left(19\cdot 99 - \sqrt{19^2\cdot 99^2 - 4\cdot 19 b_0}\right)$ (nakreslete si obrázek). Nyní stačí položit $a_{k+1} := b_k$, $a_k := b_{k-1}$, ... , $a_0 := b_{-1}$.

Nekonečná rostoucí posloupnost splňující $a_{n+1} = 19(99 - a_n)a_n$ neexistuje. Pro $a_n \geq 99$ je $a_{n+1} \leq 0 < a_n$, pro $a_n \leq 0$ je $a_{n+1} \leq 19\cdot 99 a_n \leq a_n$, tedy kdyby existovala nekonečná posloupnost, musely by všechny její členy ležet v intervalu $(0, 99)$. Protože v intervalu $(99/2, 99)$ je funkce $f(x) = 19(99 - x)x$ klesající, je buďto $f(x) \leq x$ (tj. když $a_n = x$, pak $a_{n+1} = f(x) \leq a_n$, což nemůžeme potřebovat), nebo je $f(x) > x$, ale pak je $f(f(x)) < f(x)$ (z monotonie). Takže členy posloupnosti nemohou ležet ani v intervalu $(99/2, 99)$. Pokud $a_n \in \langle 1, 99/2)$, pak $a_{n+1} > 19\cdot 98 > 99$ (protože funkce f je tu rostoucí) a $a_{n+2} < 0$, takže pokud existuje nekonečná posloupnost, pak všechny její členy leží v intervalu $(0, 1)$. Nechť tedy první člen posloupnosti je $a_0 > 0$. Pro $a_k \in (0, 1)$ platí $a_{k+1}/a_k = 19(99 - a_k) > 19\cdot 98$, tj. $a_k > (19\cdot 98)^k \cdot a_0$, z čehož plyne, že pro dostatečně velké k už bude a_k mimo interval $(0, 1)$. Tím je dokázáno, že neexistuje nekonečná posloupnost splňující požadavky zadání.

Poznámky opravovatele: V druhé části se většina řešitelů dopustila dvou chyb. Jedna skupina se spokojila s tvrzením, že posloupnost je na intervalu $(0, \frac{1880}{19})$ rostoucí, a tedy musí někdy „přelézt“ jeho horní hranici. To samozřejmě obecně neplatí, protože posloupnost se může také přibližovat k nějakému číslu uvnitř daného intervalu. Druhá skupina byli ti, kteří v první části uvedli postačující podmínku pro první člen posloupnosti. V druhé části pak prohlásili, že nekonečná rostoucí posloupnost vyhovující oné podmínce neexistuje. Protože se však jednalo o podmínku postačující avšak nikoliv nutnou, nevyplývá z toho, že nemůže existovat nějaká posloupnost danou podmínku nesplňující, ale přesto neustále rostoucí.

7. úloha

Mějme dvě posloupnosti přirozených čísel $(x_1, \dots, x_n)$, $(y_1, \dots, y_m)$, kde $m, n \in \mathbb{N}$. Dokažte, že $(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m) = (y_1, \dots, y_m, x_1, \dots, x_n)$ právě tehdy, když existuje taková posloupnost $(t_1, \dots, t_k)$, že $(x_1, \dots, x_n)$ je n/k-krát zopakovaná $(t_1, \dots, t_k)$ a $(y_1, \dots, y_m)$ je m/k-krát zopakovaná $(t_1, \dots, t_k)$.

Pro lepší orientaci zavedeme označení: Pro libovolné dvě posloupnosti $x = (x_1, \dots, x_n)$, $y = (y_1, \dots, y_m)$ bude xy značit posloupnost $(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m)$ a x^k bude k-krát zopakovaná posloupnost x.

Pokud platí pravá strana implikace, tedy $x = t^{n/k}$, $y = t^{m/k}$, máme

$$xy = t^{n/k}t^{m/k} = t^{(m+n)/k} = t^{m/k}t^{n/k} = yx,$$

což jsme chtěli dokázat.

Opačnou implikaci dokážeme indukcí podle $m + n$. Nejprve si ale povšimněme, že pro $m = n$ je problém triviální — z $xy = yx$ přímo plyne (rovnost prvních n členů), že $x_1 = y_1, \dots, x_n = y_n$. Můžeme tedy vzít $k = m = n$ a $t = x = y$.

Pokud $m + n = 2$, musí nastat rovnost $m = n = 1$. To už jsme vyřešili.

Přepokládejme, že umíme dokázat implikaci pro všechna $m' + n' < m + n$. BÚNO předpokládejme, že $m < n$. Potom z faktu $xy = yx$ plyne (rovnost prvních m členů), že $x_1 = y_1, \dots, x_m = y_m$. Tedy,

$$(y_1, \dots, y_m, y_1, \dots, y_m, x_{m+1}, \dots, x_n) = (y_1, \dots, y_m, x_1, \dots, x_n) =$$

$$= (x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m) = (y_1, \dots, y_m, x_{m+1}, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m).$$

Vidíme, že platí (škrtneme prvních m členů posloupnosti)

$$(y_1, \dots, y_m, x_{m+1}, \dots, x_n) = (x_{m+1}, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m),$$

přičemž $m + (n - m) = n < m + n$. Můžeme proto použít indukční předpoklad. Existuje posloupnost t délky k splňující $y = t^{m/k}$, $(x_{m+1}, \dots, x_n) = t^{(n-m)/k}$, a proto také $x = (y_1, \dots, y_m, x_{m+1}, \dots, x_n) = t^{m/k} t^{(n-m)/k} = t^{n/k}$, což jsme chtěli dokázat.

Poznámky opravovatele: Většina řešitelů vůbec nepoužívala indukci. Mnohým z nich se potom nepodařilo zformulovat matematický důkaz, protože úloha přes svou zdánlivou jednoduchost vyžaduje exaktní uvažování.

Takřka všechna řešení bez indukce používala jakési posouvání posloupností či nejprve dokázala rovnost pro $k = 1$ a poté z toho vyvodila zbytek. Za důkaz lehčí implikace jsem dával jeden bod, za druhou čtyři body. Mnoho řešitelů totiž na jednu z nich zapomnělo.

8. úloha

Nechť $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ je rostoucí funkce, která pro každé přirozené číslo n splňuje vztah $f(f(n)) = f(n) + n - 1$. Dokažte, že pak pro každé $n \in \mathbb{N}$ je $f(n+1) - f(n)$ buď 1 nebo 2. ($\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$.)

Tvrzení

$$1 \leq f(n+1) - f(n) \leq 2 \qquad (\spadesuit)$$

budeme dokazovat indukcí podle n.

I: $n = 1$. Máme dokázat $1 \leq f(2) - f(1) \leq 2$. Ze vztahu

$$f(f(n)) = f(n) + n - 1 \qquad (\heartsuit)$$

plyne dosazením $n = 1$ vztah $f(f(1)) = f(1)$. Jelikož f je rostoucí a tedy tím spíše prostá, dostáváme $f(1) = 1$. Dosadíme-li $n = 2$, dostaneme $f(f(2)) = f(2) + 1$. Pokud by platilo $f(2) = 2$, okamžitě bychom dostali spor. Pokud $f(2) = k > 3$, pak máme $f(2) = k$, $f(k) = k + 1$. Jelikož f je rostoucí, dostáváme $f(2) < f(3) < f(k)$, neboli $k < f(3) < k + 1$, což je spor. Vidíme tedy, že nutně platí $f(2) = 3$ a tedy $f(2) - f(1) = 2$. Tím je pro $n = 1$ tvrzení dokázáno. Navíc díky tomu, že f je rostoucí a $f(2) = 3$ snadno vidíme, že

$$n \geq 2 \Rightarrow f(n) > n. \qquad (\star)$$

II: Předpokládejme, že tvrzení (♠) již máme dokázáno pro $n = 1,\ 2,\ \ldots,\ k$, kde $k \in \mathbb{N}$. Ukážeme, že pak (♠) platí i pro $n = k+1$. Máme tedy dokázat $1 \le f(k+2) - f(k+1) \le 2$. Najděme si m největší přirozené číslo s vlastností $f(m) \le k+1$. Jelikož $k+1 \ge 2$, z tvrzení ($\star$) plyne $m < k+1$, neboli $m \le k$. Proto pro m můžeme použít indukční předpoklad. Z toho, jak jsme volili m vidíme, že $f(m+1) > k+1$, neboli $f(m+1) \ge k+2$. Z indukčního předpokladu vidíme, že $1 \le f(m+1) - f(m) \le 2$. Snadno nahlédneme, že nastává právě jedna ze tří následujících možností:

(1) $f(m) = k+1,\ f(m+1) = k+2$. Pak užitím ($\heartsuit$) pro $n = m$ a $n = m+1$ dostaneme $f(k+2)-f(k+1) = f(f(m+1))-f(f(m)) = (f(m+1)+m)-(f(m)+m-1) = 2$.

(2) $f(m) = k+1,\ f(m+1) = k+3$. Naprosto analogicky první možnosti dostaneme $f(k+3) - f(k+1) = 3$ a díky nerovnosti $f(k+1) < f(k+2) < f(k+3)$ dostáváme $1 \le f(k+2) - f(k+1) \le 2$.

(3) $f(m) = k,\ f(m+1) = k+2$. Naprosto analogicky prvním dvěma možnostem dostaneme $f(k+2) - f(k) = 3$ a díky nerovnosti $f(k) < f(k+1) < f(k+2)$ dostáváme $1 \le f(k+2) - f(k+1) \le 2$.

Ve všech případech jsme tedy dostali $1 \le f(k+2) - f(k+1) \le 2$. Druhý indukční krok a tedy i celé tvrzení je dokázáno.

Poznámka: Zatím jsme nikde neukázali (a ani nepotřebovali), že vůbec nějaká funkce f splňuje požadavky zadání. Lze se však přesvědčit, že např. funkce $f(n) = \left\lfloor \frac{1+\sqrt{5}}{2} n \right\rfloor$ vyhovuje (není ale jediná).

Poznámky opravovatele: V této úloze dělalo řešitelům největší problémy naformulovat, jaké tvrzení vlastně indukcí dokazují. Ve většině řešení totiž bylo výhodnější dokazovat ne přímo tvrzení úlohy, ale nějaké jiné (podobné), ze kterého už původní tvrzení vyplývá. Spousta řešení vypadala tak, ze řešitel začal nějaké tvrzení dokazovat (podle nějakého schématu indukce), jenže neřekl, *jaké přesně*. Nad některými řešeními jsem strávil opravdu hodně času, než jsem na to přišel.[2] Proto byste ve svých řešeních měli přesně formulovat, co dokazujete.

Dva řešitelé přišli na řešení, které je značně jednodušší než ostatní, (autorské nevyjímaje) a zasloužili si $+2i$. Jejich myšlenka byla následující: Mějme dáno nějaké n, předpokádejme, že $f(n+1) - f(n) = d$. Pak z rekurentního vztahu dostaneme $f(f(n+1)) - f(f(n)) = d+1$. Označíme-li si $y_i = f(f(n) + i + 1) - f(f(n) + i)$ pro $i = 0,\ 1,\ \ldots,\ d-1$, pak platí $y_0 + y_1 + \cdots + y_{d-1} = d+1$. Na levé straně máme součet d kladných celých čísel. Je zřejmé, že jedno z čísel je rovno dvěma, ostatní musí být rovna jedné. Je tedy vidět, že dokazovaný vztah $1 \le f(k+1) - f(k) \le 2$ platí pro $k = f(n),\ f(n)+1,\ \ldots,\ f(n+1)-1$. Odtud už snadnou úvahou (jelikož výchozí n bylo libovolné) vidíme, že jsme tímto postupem vztah $1 \le f(k+1) - f(k) \le 2$ dokázali pro všechna k od $f(1)$ výše. Stejně, jako ve vzorovém řešení dokážeme, že $f(1) = 1$ a jsme hotovi.

[2]Mnohdy lze řešitele podezírat, že to sám neví.