Povídání k sedmé sérii

Komplexní čísla jsou rozšířením oboru reálných čísel. Mohou být definována mnoha ekvivalentními způsoby. Nejdůležitější jsou tyto:

(1) *(intuitivně)* Reálná čísla rozšíříme o imaginární jednotku i, pro kterou definujeme $i^2 = -1$. Komplexní čísla pak budou čísla ve tvaru $(a+ib)$, kde a, b jsou čísla reálná. Sčítání a násobení funguje stejně jako v reálných číslech, tj.

$$(a+ib)+(c+id)=(a+c)+i(b+d)$$

$$(a+ib)\cdot(c+id)=(ac-bd)+i(bc+ad).$$

(Druhý vztah dostaneme roznásobením a následným použitím vztahu $i^2 = -1$.)

(2) *(geometricky)* Vezmu body (uspořádané dvojice reálných čísel) v rovině, sčítání a násobení definuji

$$[a,b]+[c,d]=[a+c,b+d]$$

$$[a,b]\cdot[c,d]=[ac-bd,bc+ad].$$

Mluvíme pak o tzv. *Gaussově rovině.*

(3) *(alegbraicky)* Komplexní čísla jsou nejmenší číselný obor, ve kterém má každý nekonstantní reálný polynom kořen.

Snadno můžeme ověřit vzorec pro dělení:

$$\frac{a+ib}{c+id}=\frac{(a+ib)(c-id)}{(c+id)(c-id)}=\frac{ac+bd+i(bc-ad)}{c^2+d^2}.$$

Zavedeme následující označení.

(1) absolutní hodnota: $|a+ib|=\sqrt{a^2+b^2}$.
(2) reálná, imaginární část: $\operatorname{Re}(a+ib)=a$, $\operatorname{Im}(a+ib)=b$.
(3) komplexně sdružené číslo: $\overline{a+ib}=a-ib$.
(4) komplexní exponenciála: $e^{x+iy}=e^x(\cos y+i\sin y)$.

Každé komplexní číslo α lze psát v goniometrickém tvaru $r(\cos\varphi+i\sin\varphi)=re^{i\varphi}$. Stačí volit $r=|\alpha|$ a φ tak, aby $\cos\varphi=\frac{\operatorname{Re}\alpha}{|\alpha|}$, $\sin\varphi=\frac{\operatorname{Im}\alpha}{|\alpha|}$.

Platí tzv. *Moivreova věta*, která dává opodstatnění definici komplexní exponenciály:

$$(re^{i\varphi})^n=(r(\cos\varphi+i\sin\varphi))^n=r^n(\cos n\varphi+i\sin n\varphi)=r^ne^{in\varphi}$$

Tato věta se používá pro výpočet mocnin i odmocnin komplexních čísel. Pozor, odmocniny nejsou jednoznačné! $\sqrt[n]{\alpha}$ je vlastně řešení rovnice $x^n-\alpha=0$ a polynom n-tého stupně může mít (a v tomto případě pro $\alpha\neq 0$ má) n různých komplexních kořenů.

Pomocí součtových vzorců pro goniometrické funkce můžeme odvodit vzorec pro násobení komplexních čísel v goniometrickém tvaru:

$$r(\cos\varphi+i\sin\varphi)\cdot s(\cos\psi+i\sin\psi)=rs(\cos(\varphi+\psi)+i\sin(\varphi+\psi)).$$

Z něj Moivreova věta snadno plyne. V exponenciálním zápisu je věc ještě jasnější — platí

$$e^{a+ib}e^{c+id} = e^{(a+c)+i(b+d)}.$$

7. série

Téma: Komplexní čísla

Termín odeslání: 17. DUBNA 2000

1. ÚLOHA (3 BODY)

Dokažte, že pro libovolná komplexní čísla $a,\ b,\ c,\ d,\ e,\ f$ platí

$$a(b(c(d(ef)))) = ((((ab)c)d)e)f.$$

2. ÚLOHA (3 BODY)

Nechť n je přirozené číslo. Najděte všechny funkce $f : \{0,\ 1, \dots, n-1\} \to \mathbb{C}$, které pro všechna $a,\ b \in \{0,\ 1, \dots, n-1\}$ splňují $f(a \oplus b) = f(a)f(b)$, kde $a \oplus b$ je takové číslo z $\{0,\ 1, \dots, n-1\}$, které dává stejný zbytek po dělení n, jako $a + b$.
Jakých hodnot může nabývat součet $f(0) + f(1) + \cdots + f(n-1)$?

3. ÚLOHA (3 BODY)

Najděte všechna $z \in \mathbb{C}$, pro která $|z| = 1$ a $|z^2 + z + 1| = 1$.

4. ÚLOHA (5 BODŮ)

Nechť $x_1,\ x_2,\ \dots,\ x_n$ jsou vrcholy pravidelného n-úhelníka se středem v z, všechny tyto body chápeme jako komplexní čísla v Gaussově rovině. Nechť dále k je přirozené číslo menší než n. Sečtěte

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^k.$$

5. ÚLOHA (5 BODŮ)

Nechť $a,\ b$ jsou reálné parametry. Najděte všechna (komplexní) řešení rovnice

$$x^4 + (2a + 2b)x^3 + (3 + 4ab)x^2 + (4a + 2b)x + 2 = 0.$$

6. ÚLOHA (5 BODŮ)

Dokažte, že pro všechna komplexní čísla z se zápornou reálnou částí platí nerovnost

$$|e^z - 1| < |z|.$$

Můžete bez důkazu předpokládat, že tato nerovnost platí pro záporná reálná čísla, dále můžete bez důkazu použít nerovnost $|\sin x| \leq |x|$ pro x reálné.

7. ÚLOHA (5 BODŮ)

Buď X nejmenší množina komplexních funkcí komplexní proměnné, která obsahuje funkce $f(z) = -\frac{1}{z}$, $g(z) = z + 1$, $h(z) = z - 1$ a která je uzavřená na skládání funkcí. Dokažte, že pro každé komplexní číslo c s kladnou imaginární částí existuje funkce $u \in X$ taková, že $|u(c)| \geq 1$ a $|\mathrm{Re}\, u(c)| \leq \frac{1}{2}$ ($\mathrm{Re}\, t$ značí reálnou čast čísla t).

8. ÚLOHA (5 BODŮ)

Buď A nejmenší množina komplexních funkcí komplexní proměnné, která obsahuje všechny polynomy a funkci $f(z) = \frac{1}{z}$ a která je uzavřená na skládání funkcí. Buď $G = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1,\ \mathrm{Re}\, z > 0,\ \mathrm{Im}\, z > 0\}$ ($\mathrm{Re}\, t$ značí reálnou čast čísla t, $\mathrm{Im}\, t$ pak jeho imaginární část), buď $H = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$[1]. Dokažte, že v A existuje **prostá** funkce u taková, že $H = u(G)$, tedy, že množina H je obrazem množiny G při zobrazení u.

Řešení 7. série

1. úloha

Dokažte, že pro libovolná komplexní čísla a, b, c, d, e, f platí

$$a(b(c(d(ef)))) = ((((ab)c)d)e)f.$$

Nejprve dokážeme, že $(xy)z = x(yz)$.

$$(xy)z = \Big((x_1 + ix_2)(y_1 + iy_2)\Big)(z_1 + iz_2) = \Big((x_1y_1 - x_2y_2) + i(x_1y_2 + y_1x_2)\Big)(z_1 + iz_2) =$$
$$= (x_1y_1z_1 - x_2y_2z_1 - x_1y_2z_2 - x_2y_1z_2) + i(x_1y_1z_2 + x_1y_2z_1 + x_2y_1z_1 - x_2y_2z_2).$$

Obdobně roznásobíme $x(yz)$ a ověříme rovnost. Nyní můžeme psát

$$a(b(c(d(ef)))) = (ab)(c(d(ef))) = ((ab)c)(d(ef)) = (((ab)c)d)(ef) = ((((ab)c)d)e)f$$

a jsme hotovi.

[1]Tedy H je jednotkový kruh v Gaussově rovině, G jeho čtvrtina, která leží v prvním kvadrantu. Obě množiny jsou otevřené, neobsahují svoji hranici.

Poznámky opravovatele: Plný počet bodů obdrželi všichni, kteří asociativitu komplexních čísel dokázali (stačilo pro tři čísla) a aplikovali ji na daný příklad. Jelikož v zadání nebylo řečeno, z jakého tvaru komplexního čísla se má vycházet, uznávala jsem všechny. Naopak ti, kteří prohlásili asociativitu komplexních čísel za zřejmou případně ji odvozovali z asociativity polynomů (ekvivalentní problém), dostali bohužel jen 1 bod. Častokrát jsem přidávala za takováto řešení útěšné i-čko. Zadání bylo tentokráte formulováno poněkud nešikovně, bylo vidět, že mnoho řešitelů nevědělo, co lze a co nelze považovat za samozřejmost.

2. úloha

Nechť n je přirozené číslo. Najděte všechny funkce $f : \{0,\ 1, \dots, n-1\} \to \mathbb{C}$, které pro všechna $a,\ b \in \{0,\ 1, \dots, n-1\}$ splňují $f(a \oplus b) = f(a)f(b)$, kde $a \oplus b$ je takové číslo z $\{0,\ 1, \dots, n-1\}$, které dává stejný zbytek po dělení n, jako $a + b$.

Jakých hodnot může nabývat součet $f(0) + f(1) + \cdots + f(n-1)$?

Nejprve se podívejme na hodnotu $f(0)$. Vzoreček nám říká, že $f(0) = f(0 \oplus 0) = f(0)f(0)$, a tedy $f(0) = 0$ nebo $f(0) = 1$. V prvním případě ovšem $f(k) = f(k \oplus 0) = f(k)f(0) = 0$ pro každé k, tedy funkce f je nulová, takže $f(0) + \cdots + f(n-1) = 0 + \cdots + 0 = 0$. V druhém případě

$$1 = f(0) = f(\underbrace{1 \oplus \cdots \oplus 1}_{n\text{-krát}}) = f(1)^n,$$

takže $f(1)$ je nějaká odmocnina z 1. Podobně můžeme dostat pro každé k

$$f(k) = f(\underbrace{1 \oplus \cdots \oplus 1}_{k\text{-krát}}) = f(1)^k.$$

Každá taková funkce f splňuje požadavky zadání.

Pokud $f(1) = 1$, platí $f(k) = 1$ pro každé k a okamžitě sečteme $f(0) + \cdots + f(n-1) = 1 + \cdots + 1 = n$.

Pokud $f(1) \neq 1$, sečteme geometrickou řadu

$$f(0) + \cdots + f(n-1) = 1 + f(1) + f(1)^2 + \cdots + f(1)^{n-1} = \frac{f(1)^n - 1}{f(1) - 1} = 0.$$

Shrnuto, pokud f je konstantní funkce rovná 1, součet je roven n. V opačném případě je součet roven 0.

3. úloha

Najděte všechna $z \in \mathbb{C}$, pro která $|z| = 1$ a $|z^2 + z + 1| = 1$.

Řešení budeme hledat v goniometrickém tvaru. Nechť $z = r \cdot (\cos\alpha + i \cdot \sin\alpha)$, kde $r \geq 0$ a $\alpha \in \langle 0, 2\pi)$, splňuje podmínky v zadání. Potom $|z| = r$ a tedy $r = 1$. Dále

$$|z^2 + z + 1| = 1,$$

$$
\begin{aligned}
|(\cos\alpha + i\cdot\sin\alpha)^2 + (\cos\alpha + i\cdot\sin\alpha) + 1| &= 1,\\
|(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha + \cos\alpha + 1) + i\cdot(2\sin\alpha\cos\alpha + \sin\alpha)| &= 1,\\
(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha + \cos\alpha + 1)^2 + (2\sin\alpha\cos\alpha + \sin\alpha)^2 &= 1^2,\\
(2\cos^2\alpha - 1 + \cos\alpha + 1)^2 + (1-\cos^2\alpha)(2\cos\alpha+1)^2 &= 1,\\
\cos^2\alpha(2\cos\alpha+1)^2 + (1-\cos^2\alpha)(2\cos\alpha+1)^2 &= 1,\\
(2\cos\alpha+1)^2 &= 1,\\
4\cos^2\alpha + 4\cos\alpha &= 0,\\
\cos\alpha\cdot(\cos\alpha+1) &= 0.
\end{aligned}
$$

Z poslední rovnice dostáváme řešení úlohy $\alpha = \frac{\pi}{2}$, $\alpha = \frac{3\pi}{2}$, $\alpha = \pi$. Z toho dostáváme $z = i$, $z = -1$, $z = -i$. Všechna tato řešení vyhovují podmínkám úlohy, takže úloha má právě tato tři řešení.

Poznámky opravovatele: Většina řešitelů hledala řešení v algebraickém tvaru což vedlo na řešení polynomu čtvrtého stupně. Dále se vyskytla dvě řešení ve vektorovém tvaru, z nichž jedno (*Katarína Quittnerová*) bylo bezchybné ($+i$). Méně zdatní řešitelé řešili absolutní hodnotu rozborem dvou případů. Tento postup je špatně, neboť v komplexních číslech se absolutní hodnotou rozumí vzdálenost komplexního čísla od bodu 0+0i. V rovině komplexních čísel je bodů na kružnici o poloměru 1 nekonečně mnoho, nestačí tedy vyšetřit jen dva případy.

4. úloha

Nechť $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n$ jsou vrcholy pravidelného n-úhelníka se středem v z, všechny tyto body chápeme jako komplexní čísla v Gaussově rovině. Nechť dále k je přirozené číslo menší než n. Sečtěte

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^k.$$

Označme $c = x_n - z$ a ε „první“ z n-tých odmocnin z jedné (tj. $\varepsilon = e^{2\pi i/n}$). Snadno nahlédneme, že ε^j jsou vrcholy pravidelného n-úhelníka se středem v nule, a tedy $x_j = z + c\varepsilon^j$.

$$
\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{n} x_j^k &= \sum_j (z + c\varepsilon^j)^k\\
&= \sum_j \sum_{l=0}^{k} \binom{k}{l} z^{k-l} c^l \varepsilon^{jl}\\
&= \sum_l \binom{k}{l} z^{k-l} c^l \sum_j \varepsilon^{jl}\\
&= nz^k.
\end{aligned}
$$

Poslední úpravu je třeba trochu vysvětlit. Označme $s_l = \sum_{j=1}^{n} \varepsilon^{jl}$. Pro $l = 0$ je zřejmě $s_l = n$, pro $0 < l < n$ si všimneme, že $s_l \varepsilon^l = s_l$ a zjistíme, že $s_l = 0$. Zjistili jsme tedy, že průměr k-tých mocnin vrcholů mnohoúhelníka je k-tá mocnina jeho středu.

Poznámky opravovatele: Bohužel většina řešitelů přesně nepochopila, co úloha požaduje. Vyskytly se tedy řešení jen pro některé případy, např. pro střed v počátku.

5. úloha

Nechť $a,\ b$ jsou reálné parametry. Najděte všechna (komplexní) řešení rovnice

$$x^4 + (2a + 2b)x^3 + (3 + 4ab)x^2 + (4a + 2b)x + 2 = 0.$$

Hledáme kořeny polynomu

$$P(x) = x^4 + (2a + 2b)x^3 + (3 + 4ab)x^2 + (4a + 2b)x + 2 = (x^2 + 2ax + 1)(x^2 + 2bx + 2).$$

Díky nalezenému rozkladu kořeny snadno spočteme (jde o dvě kvadratické rovnice).

$$x_{1,2} = -a \pm \sqrt{a^2 - 1}.$$
$$x_{3,4} = -b \pm \sqrt{b^2 - 2}.$$

Kořeny mohou být i komplexní, pokud $|a| < 1$ resp. $|b| < \sqrt{2}$. Některé kořeny samozřejmě mohou splynout.

Jak se dá přijít na výše uvedený rozklad? Předpokládáme např., že kořenem rovnice je číslo $c + di,\ d \neq 0$. Potom je kořenem rovněž číslo komplexně sdružené, tedy $c - di$. Polynom $P(x)$ je tedy dělitelný polynomem

$$(x - (c + di)) \cdot (x - (c - di)) = (x^2 - 2cx + (c^2 + d^2)).$$

Takže pokud předpokládáme čtyři řešení, která nejsou reálná, víme, že

$$P(x) = (x^2 - 2cx + (c^2 + d^2)) \cdot (x^2 - 2ex + (e^2 + f^2)).$$

Označíme si $C := c^2 + d^2,\ E := e^2 + f^2$ (jsou to druhé mocniny norem) a roznásobíme. Vyjde

$$P(x) = x^4 + (-2c - 2e)x^3 + (C + E + 4ce)x^2 + (-2cE - 2eC)x + CE,$$

z čehož již není těžké uhodnout $c = -a,\ e = -b,\ C = 1,\ E = 2$ a máme hledaný rozklad.

Poznámky opravovatele: Téměř všichni, kdo úlohu řešili, dostali 5 bodů. Někteří se pokusili o diskuzi počtu řešení, ta však nebyla ani v jednom případě správná. Škoda, docela by mě zajímala.

6. úloha

Dokažte, že pro všechna komplexní čísla z se zápornou reálnou částí platí nerovnost

$$|e^z - 1| < |z|.$$

Můžete bez důkazu předpokládat, že tato nerovnost platí pro záporná reálná čísla, dále můžete bez důkazu použít nerovnost $|\sin x| \leq |x|$ pro x reálné.

Budeme dokazovat nerovnost $|e^z - 1| < |z|$. Protože se jedná o nezáporná čísla, stačí dokázat $|e^z - 1|^2 < |z|^2$. Napíšeme si z v algebraickém tvaru $z = a + bi$. Pak ze známé identity $|z|^2 = z \cdot \overline{z}$ (nebo z definice $|c + id|^2 = c^2 + d^2$) plyne

$$|e^z - 1|^2 = \Big(e^a(\cos b + i \sin b) - 1\Big)\Big(e^a(\cos b - i \sin b) - 1\Big) = (e^a \cos b - 1)^2 + e^{2a} \sin^2 b.$$

Po roznásobení závorky dostáváme

$$|e^z - 1|^2 = e^{2a}(\cos^2 b + \sin^2 b) - 2e^a \cos b + 1 = e^{2a} - 2e^a + 1 + 2e^a(1 - \cos b) =$$

$$= (e^a - 1)^2 + 2e^a(1 - \cos b).$$

Toto číslo máme porovnávat s $|z|^2 = a^2 + b^2$. Nerovnost $(e^a - 1)^2 < a^2$ plyne z $|e^a - 1| < |a|$, což víme ze zadání (neboť $a < 0$). Stačí dokázat $2e^a(1 - \cos b) \leq b^2$, kde $e^a \leq 1$, tedy stačí $2(1 - \cos b) \leq b^2$.

Použijeme součtový vzorec $\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2 \alpha$ pro $b = 2\alpha$, tj.

$$2(1 - \cos b) = 2\Big(1 - \Big(1 - 2\sin^2(b/2)\Big)\Big) = 4\sin^2(b/2),$$

což je podle nerovnosti uvedené v zadání menší nebo rovno $4 \cdot (b/2)^2 = b^2$. Tím je nerovnost dokázána.

Poznámky opravovatele: Správná řešení se v podstatě shodovala se vzorovým. Nejčastější chybou bylo umocnění nerovnice na druhou bez kontroly znamének na obou stranách. Za zbytečně zdlouhavé řešení jsem strhával $1i$.

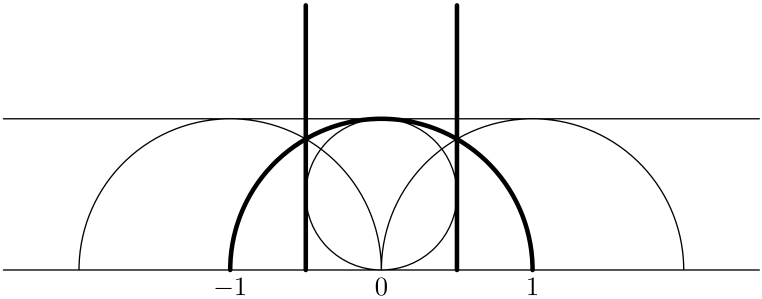
7. úloha

Buď X nejmenší množina komplexních funkcí komplexní proměnné, která obsahuje funkce $f(z) = -\frac{1}{z}$, $g(z) = z + 1$, $h(z) = z - 1$ a která je uzavřená na skládání funkcí. Dokažte, že pro každé komplexní číslo c s kladnou imaginární částí existuje funkce $u \in X$ taková, že $|u(c)| \geq 1$ a $|\mathrm{Re}\, u(c)| \leq \frac{1}{2}$ ($\mathrm{Re}\, t$ značí reálnou část čísla t).

Mějme nějaké $c \in \mathbb{C}$ s kladnou imaginární složkou. Budeme postupně skládáním funkcí f, g, h budovat zobrazení u splňující podmínky zadání.

I. Nechť $|c| \geq 1$ a $|\mathrm{Re}\, c| \leq \frac{1}{2}$. Pak c již splňuje podmínky zadání, stačí zvolit $u = h \circ g$, což je identita.

II. Pokud $\operatorname{Re} c \notin \left\langle -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle$, opakovaným aplikováním funkce g, resp. h, lze získat číslo, jehož reálná část leží v intervalu $\left\langle -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle$ a jehož imaginární část se nezmění. Bylo-li tedy $\operatorname{Im} c \geq 1$, jsme hotovi.



Označme L useknutý jednotkový půlkruh $\{z \in \mathbb{C} : |\operatorname{Re} z| \leq \frac{1}{2}, |z| < 1\}$ a označme K kruh o poloměru $\frac{1}{2}$ se středem v $\frac{1}{2}i$. Zbývá nalézt funkci u, která zobrazí dané číslo $c \in L$ na číslo s požadovanou vlastností.

III. Nechť $c = a + bi \in K$, tj. platí $|a + bi - \frac{1}{2}i| \leq \frac{1}{2}$, což dá podmínku $a^2 + b^2 \leq b$. Funkcí f se bod c zobrazí na bod s imaginární částí nejméně 1, protože

$$\operatorname{Im} f(c) = \operatorname{Im} \left(-\frac{1}{a + bi} \right) = \operatorname{Im} \left(\frac{-a + bi}{a^2 + b^2} \right) = \frac{b}{a^2 + b^2} \geq 1.$$

Úloha se tedy převede na **II.**

IV. Nechť $c = a + bi \in L \setminus K$, $a > 0$, $b \geq \frac{1}{2}$, $|c - 1| \geq 1$, tj. platí $|(a - 1)^2 + b^2| \geq 1$, neboli $a^2 + b^2 \geq 2a$. Pro takové c platí, že $|f(c)| \geq 1$ (zřejmě) a

$$\operatorname{Re} f(c) = \operatorname{Re} \left(-\frac{1}{a + bi} \right) = \operatorname{Re} \left(\frac{-a + bi}{a^2 + b^2} \right) = \frac{-a}{a^2 + b^2} \in \left\langle -\frac{1}{2}, 0 \right\rangle.$$

Podmínky úlohy jsou tedy splněny. Analogicky pro $a < 0$ a $|c + 1| \geq 1$.

V. Nechť $c = a + bi \in L \setminus K$, $a > 0$, $b \geq \frac{1}{2}$, $|c - 1| \leq 1$, tj. platí $a^2 + b^2 \leq 2a$. Potom

$$|f(c) + 1|^2 = 1 + \frac{1 - 2a}{a^2 + b^2} \geq 1,$$

$$\operatorname{Re} f(c) = \frac{-a}{a^2 + b^2} \in \left\langle -1, -\frac{1}{2} \right\rangle.$$

Takže číslo $g(f(c))$ (výsledek posunutý o 1 doprava) splňuje podmínky úlohy. Analogicky pro $a < 0$ a $|c + 1| \leq 1$.

VI. Nechť $c = a_0 + b_0 i \in L \setminus K$, $b < \frac{1}{2}$ („zbytek“). Nejprve toto číslo zobrazíme funkcí f a pak ho posuneme funkcemi g, resp. h, tak, aby reálná složka byla opět v intervalu $\left\langle -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle$. Označme výsledek c_1. Buď c_1 padne do některé z množin vyšetřovaných v **I.** – **V.**, čímž jsme úlohu převedli na známý problém. Nebo padne opět do „zbytku“, načež aplikujeme stejný postup a dostaneme čísla $c_2, c_3, \ldots$ Tvrdím, že existuje přirozené n, pro které $c_n = a_n + b_n i$ neleží ve „zbytku“. Platí totiž, že

$$b_{n+1} - b_n = \frac{b_n}{a_n^2 + b_n^2} - b_n = (1 - a_n^2 - b_n^2)\frac{b_n}{a_n^2 + b_n^2} \geq \frac{1}{2}\frac{b_n}{a_n^2 + b_n^2} = \frac{1}{2} b_{n+1},$$

čili $b_{n+1} \geq 2b_n$. Protože $b_0 > 0$, existuje určitě dostatečně velké n, pro které $b_n \geq \frac{1}{2}$, takže c_n nemůže ležet ve „zbytku“.

Rozebrali jsme způsob konstrukce funkce u pro všechny body c s kladnou imaginární částí, úloha je tedy vyřešena.

Poznámky opravovatele: Všechna tři správná řešení byla různá. Uvedené je nejhezčí, protože nepoužívá limitu posloupnosti. Chyba těch zbylých byla, že se nezabývala tím, zda se postupné budování funkce u pomocí f, g, h někdy zastaví.

8. úloha

Buď A nejmenší množina komplexních funkcí komplexní proměnné, která obsahuje všechny polynomy a funkci $f(z) = \frac{1}{z}$ a která je uzavřená na skládání funkcí. Buď $G = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1,\ \mathrm{Re}\, z > 0,\ \mathrm{Im}\, z > 0\}$ ($\mathrm{Re}\, t$ značí reálnou část čísla t, $\mathrm{Im}\, t$ pak jeho imaginární část), buď $H = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$[2]. Dokažte, že v A existuje **prostá** funkce u taková, že $H = u(G)$, tedy, že množina H je obrazem množiny G při zobrazení u.

Ke Gaussově rovině přidejme bod ∞, který leží na každé přímce. Zobecněnou kružnicí rozumíme kružnici nebo přímku. Každá zobecněná kružnice rozděluje rovinu na dvě části a pro každou trojici bodů existuje právě jedna zobecněná kružnice, která jimi prochází. Nejprve dokážeme pomocné tvrzení:

Lemma: Každé lineární lomené zobrazení (tj. zobrazení typu[3] $f(z) = \frac{a+bz}{c+dz}$), které není konstantní, zobrazí zobecněnou kružnici k prostě na zobecněnou kružnici $f(k)$ a oblasti Ω_1, Ω_2 určené zobecněnou kružnicí k zobrazí na oblasti Ω_1', Ω_2' určené zobecněnou kružnicí $f(k)$.

Důkaz: Pokud $d = 0$, je $f(z) = a/c + b/c \cdot z$ a pokud $d \neq 0$, je $f(z) = u + v/(c + dz)$, kde $u = b/d$ a $v = a - bc/d$. Z těchto tvarů je vidět, že tvrzení stačí dokázat pro funkce $f(z) = cz + d$ a $g(z) = 1/z$. První funkce není nic jiného než stejnolehlost se středem v počátku a koeficientem $|c|$ složená s otočením o úhel $\arg(c)$ (zápisem $\arg(z)$ rozumíme úhel $\alpha \in \langle 0, 2\pi)$ v goniometrickém zápisu čísla $z = |z| \cdot (\cos\alpha + i \sin\alpha)$) a posunutím o d a všechny části tvrzení jsou pro toto zobrazení zřejmé. Zobrazení $1/z$ je kruhová inverze složená s osovou souměrností podle osy x a tvrzení plyne z vlastností kruhové inverze.

[2]Tedy H je jednotkový kruh v Gaussově rovině, G jeho čtvrtina, která leží v prvním kvadrantu. Obě množiny jsou otevřené, neobsahují svoji hranici.

[3]V bodech ∞ a $-c/d$ toto zobrazení dodefinujeme „spojitě“, tedy příslušnou limitou.

Nyní najdeme zobrazení, které zobrazí čtvrtkruh (tj. množinu $\{z \in \mathbb{C} \mid \ z = a + bi,\ a, b > 0,\ |z| < 1\}$) na celý kruh. Dostaneme ho složením několika zobrazení. Nejprve $f_1(z) = z^2$ zobrazí čtvrtkruh na půlkruh (je zřejmé z toho, jak se násobí komplexní čísla v exponenciálním tvaru — vynásobí se absolutní hodnoty a sečtou se argumenty).

Půlkruh je průnik oblastí určených dvěma zobecněnými kružnicemi — jednotkovou kružnicí a reálnou osou, budeme ho chtít zobrazit lineárním lomeným zobrazením na čtvrtrovinu (pravou horní), která je také průnikem dvou oblastí určených zobecněnými kružnicemi — reálnou osou a imaginární osou. Průsečíky zobecněných kružnic (tj. body 1, -1) se musí zobrazit do průsečíků obrazů kružnic (tj. bodů 0, ∞). Dále budeme chtít, aby se bod i zobrazil do bodu 1. Zobrazení tedy musí mít v čitateli $z - 1$ (aby se jednička zobrazila do nuly), ve jmenovateli $z + 1$, aby se -1 zobrazila na ∞. Aby se bod i zobrazil do 1, musíme zlomek $\frac{z-1}{z+1}$ ještě vynásobit nějakou konstantou, snadno se dopočte, že je to $-i$. Protože zobrazení

$$f_2 = \frac{-i(z-1)}{z+1}$$

zobrazí bod 0 do bodu i a bod $i/2$ do pravé horní čtvrtroviny, musí dle lemmatu zobrazit půlkruh do pravé horní čtvrtroviny.

Nyní vezměme $f_3 = z^2$, které zobrazí čtvrtrovinu na horní polorovinu. A nakonec najdeme zobrazení f_4 podobným způsobem jako zobrazení f_2. Budeme chtít, aby zobrazovalo body 0, 1, ∞ po řadě na body 1, i, -1. Dostaneme

$$f_4(z) = \frac{1 + iz}{1 - iz} \,.$$

Zobrazeni f_4 převádí reálnou osu na jednotkovou kružnici (využíváme toho, že každými třemi body prochází právě jedna zobecněná kružnice). Protože navíc $f_4(i) = 0$, řekne nám naše lemma, že f_4 převádí horní polorovinu na vnitřek jednotkového kruhu. To znamená, že složením $f_4 \circ f_3 \circ f_2 \circ f_1$ dostaneme hledané zobrazení u.