Závěrečná série je již tradičně vyvrcholením semináře. Řešitelé se v ní setkávají s příklady, z nichž každý je motivován jednou z předcházejících sérií. Tomu je uzpůsoben i systém bodování. Každá úloha sestává ze dvou částí. Z nich první je jednodušší, je určena řešitelům, kteří doposud nemají větší zkušenosti s řešením obdobných příkladů, její řešení je občas dobrým návodem pro řešení druhé části. Ta pak obsahuje opravdový oříšek i pro špičkové řešitele. Za část (a) je možno získat až dva body, za část (b) tři.

Pokud máš pocit, že některému pojmu nebo značení v zadání nerozumíš, pravděpodobně se stačí vrátit k příslušné sérii. K řešení úloh vskutku nejsou potřeba žádné speciálnější znalosti.

8. série

Téma: Finální myš(maš)

Termín odeslání: 15. května 2000

1. úloha

(a) Zjistěte, zda existuje kružnice a na ní čtyři (různé) body, jejichž všechny vzájemné vzdálenosti jsou racionální. (2 body)

(b) Zjistěte, zda existuje pět takových bodů. (3 body)

2. úloha

Latinský čtverec je čtvercová matice řádu n z čísel $1,\ 2,\ \ldots,\ n$, taková, že v každém řádku i v každém sloupci je každé z čísel $1,\ 2,\ \ldots,\ n$ právě jednou, tj. každý řádek i každý sloupec je nějaká permutace množiny $\{1,\ 2,\ldots,\ n\}$. Latinský obdélník je matice $k \times n$, kde $k \leq n$, z čísel $1,\ 2,\ \ldots,\ n$, taková, že každý řádek je nějaká permutace $\{1,\ 2,\ldots,\ n\}$ a v každém sloupci se každé číslo vyskytuje nejvýše jednou.

(a) Dokažte, že pro každé přirozené číslo n existuje latinský čtverec. (2 body)

(b) Dokažte, že každý latinský obdélník lze (přidáním řádků) doplnit na latinský čtverec. (3 body)

3. úloha

Nechť $M \subseteq \mathbb{N}_0$. Řekneme, že M je *pěkná*, pokud platí

(1) $(\forall a, b \in M)(a + b \in M,\ |a - b| \in M)$.

(2) $(\forall k \in \mathbb{N}_0)(\forall m \in M)(k \cdot m \in M)$.

Množinu M nazveme *nádhernou*, pokud M je pěkná a navíc platí

$$(\forall a, b \in \mathbb{N}_0)((a \cdot b \in M) \Rightarrow (a \in M \vee b \in M)).$$

(a) Nalezněte všechny pěkné podmnožiny $\mathbb{N}_0$. (2 body)

(b) Nalezněte všechny nádherné podmnožiny $\mathbb{N}_0$. (3 body)

4. Úloha

(a) Rozhodněte, zda existuje spojitá funkce taková, že její graf se otočením o úhel $\frac{\pi}{2}$ (90 stupňů) okolo počátku nezmění. (2 body)

(b) Rozhodněte, zda existuje (ne nutně spojitá) funkce taková, že její graf se otočením o úhel $\frac{\pi}{3}$ (60 stupňů) okolo počátku nezmění. (3 body)

Poznámky: V tomto příkladu *funkcí* rozumíme reálnou funkci reálné proměnné, jejíž definiční obor je **celá** množina $\mathbb{R}$. *Grafem* funkce f rozumíme množinu bodů $[x,\ f(x)]$, kde x probíhá celou množinu $\mathbb{R}$.

Pojem *spojité* funkce stačí chápat intuitivně. V řešení můžeš používat všechny známé elementární vlastnosti spojitých funkcí, zejména tzv. *Darbouxovu vlastnost* o nabývání mezihodnot. Ta říká, že každá spojitá funkce f nabývá na intervalu (a, b) všech hodnot mezi $f(a)$ a $f(b)$.

5. Úloha

Král se chce rozhodnout, kterou ze 100 dívek si vezme za ženu. Pochopitelně chce tu nejhezčí, jenže ony k němu chodí postupně a král musí nápadnici hned říct, zda ji chce, nebo ne. Král zvolil následující strategii: Odmítne prvních padesát a z dalších padesáti si vybere první, která bude hezčí, než všechny předchozí (nebo si, pokud takto odmítne dalších 49, vybere tu poslední).

(a) Jaká je pravděpodobnost, že si král vybere tu nejošklivější? (2 body)

(b) Jaká je pravděpodobnost, že si král vybere tu nejhezčí? (3 body)

6. Úloha

(a) Nechť je dána přímka p a rovina ϱ. Sestrojte obraz roviny ϱ v otočení o 90 stupňů okolo přímky p. (2 body)

(b) Nechť je dána přímka p a roviny ϱ_1, ϱ_2, ϱ_3. Sestrojte krychli[1] $ABCDEFGH$ tak, aby $AE \in p$, $B \in \varrho_1$, $D \in \varrho_2$ a $G \in \varrho_3$. (3 body)

7. Úloha

Najděte všechna komplexní čísla a taková, že funkce $f(z) = az^2$ zobrazuje čtverec s vrcholy $1 + i,\ 1 - i,\ -1 + i,\ -1 - i$

(a) do jednotkového kruhu. (2 body)

(b) do sebe. (3 body)

Čtverec i jednotkový kruh uvažujeme v tomto příkladu uzavřený, tedy obsahující svoji hranici.

[1] Vrcholy jsou značeny v obvyklém pořadí.

Řešení 8. série

1. úloha
(a) Zjistěte, zda existuje kružnice a na ní čtyři (různé) body, jejichž všechny vzájemné vzdálenosti jsou racionální. (2 body)
(b) Zjistěte, zda existuje pět takových bodů. (3 body)

Na obě otázky je odpověď kladná. Chceme-li najít čtyři body, stačí vzít body $[\pm x, \pm y]$ pro vhodná kladná x, y. Tyto body leží na kružnici se středem v počátku a poloměrem z, kde $z^2 = x^2 + y^2$ ($\star$). Vzájemné vzdálenosti jsou $2x$, $2y$, $2z$, potřebujeme tedy najít racionální x, y, z splňující ($\star$). Najdeme dokonce x, y, z celá — stačí najít libovolný pravoúhlý trojúhelník s celočíselnými stranami (tzv. Pythagorejský trojúhelník), např. $x = 3$, $y = 4$, $z = 5$.

Zkusme nyní k našim bodům přidat bod $[z, 0]$ (případně také $[-z, 0]$, čímž se stejnou námahou umístíme na kružnici dokonce šest bodů). Mezi vzájemnými vzdálenostmi přibudou čísla s, t, která si můžeme vyjádřit z Pythagorovy věty následovně

$$s^2 = (z-x)^2 + y^2 = x^2 + y^2 + z^2 - 2xz = 2z^2 - 2xz = 2z\,(z-x)\,,$$
$$t^2 = (z+x)^2 + y^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2xz = 2z^2 + 2xz = 2z\,(z+x)\,.$$

Stačí nám tedy najít Pythagorejský trojúhelník, pro který navíc čísla $2z\,(z-x)$ i $2z\,(z+x)$ jsou čtverce. Použijeme známý vztah pro vytváření (všech) Pythagorejských trojúhelníků: „Vezmi přirozená čísla m, n. Čísla $x = 2mn$, $y = m^2 - n^2$, $z = m^2 + n^2$ jsou strany Pythagorejského trojúhelníku.“ Už na šestý pokus najdeme vyhovující čísla $x = 7$, $y = 24$, $z = 25$ ($2 \cdot 25 \cdot (25+7) = 25 \cdot 64 = (5 \cdot 8)^2$, $2 \cdot 25 \cdot (25-7) = 25 \cdot 36 = (5 \cdot 6)^2$). Našli jsme tedy na kružnici s celočíselným poloměrem šest bodů se všemi vzájemnými vzdálenostmi celočíselnými.

Poznámky opravovatele: Naprostá většina řešení byla správná, jen některým řešitelům bych vytkl, že ve své konstrukci využili Pythagorejského trojúhelníku, aniž by dokázali, že nějaký existuje (ono je to sice obecně známé, ale přece …). Nicméně žádné body jsem za to nestrhával.

Kromě řešení podobných řešení autorskému (najdeme nějakých konkrétních šest bodů na kružnici) se objevily další dva přístupy, které dokonce dávají o něco víc! V prvním z nich (podle *Anši Lauschmannové*) najdeme úhel α takový, že $\sin\alpha$ i $\cos\alpha$ jsou racionální (opět využijeme nějakého Pythagorejského trojúhelníku). Poté umístíme na jednotkovou kružnici body $[\sin 2n\alpha, \cos 2n\alpha]$, kde n je libovolné přirozené — dostáváme tedy nekonečný počet bodů. Zbývá si rozmyslet, že všechny vzájemné vzdálenosti jsou skutečně racionální.

Další metodu použil *Patrik Hudec*: vzal všechny body $\left[\frac{m^2-n^2}{m^2+n^2}, \frac{2mn}{m^2+n^2}\right]$, pro přirozená m, n pro která je $m^2 + n^2$ čtverec. Rozmyslete si sami, že takových dvojic m, n je nekonečně mnoho, že všechny leži na jednotkové kružnici a mají mezi sebou racionální vzdálenosti. Také můžete popřemýšlet o tom, jak toto řešení souvisí s řešením předchozím, jestli náhodou nedostaneme stejné množiny bodů, …

Možná jste si už všimli souvislosti naší úlohy s 6. úlohou 1. série — tam jste měli najít co nejvíce bodů se vzájemnými racionálními vzdálenostmi tak, aby všechny neležely na jedné přímce. Dvě výše uvedená řešení jsou zřejmě alternativou k autorskému řešení zmíněné úlohy.

Ještě se zamysleme nad zajímavou variantou těchto úloh: najděte co nejvíce bodů, které mají všechny vzájemné vzdálenosti **celočíselné** a přitom (a) leží na jedné kružnici (b) neleží na jedné přímce. Rozmyslete si, že můžeme najít libovolně velký konečný počet takových bodů (lehké), ale nikoliv počet nekonečný (pro (a) lehké, pro (b) ... zajímavé).

2. úloha

Latinský čtverec je čtvercová matice řádu n z čísel $1,\ 2,\ \ldots,\ n$, taková, že v každém řádku i v každém sloupci je každé z čísel $1,\ 2,\ \ldots,\ n$ právě jednou, tj. každý řádek i každý sloupec je nějaká permutace množiny $\{1,\ 2,\ldots,\ n\}$. Latinský obdélník je matice $k \times n$, kde $k \leq n$, z čísel $1,\ 2,\ \ldots,\ n$, taková, že každý řádek je nějaká permutace $\{1,\ 2,\ldots,\ n\}$ a v každém sloupci se každé číslo vyskytuje nejvýše jednou.

(a) Dokažte, že pro každé přirozené číslo n existuje latinský čtverec. (2 body)

(b) Dokažte, že každý latinský obdélník lze (přidáním řádků) doplnit na latinský čtverec. (3 body)

(a) Příkladem latinského čtverce je

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \ldots & n-1 & n \\ 2 & 3 & 4 & \ldots & n & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ n & 1 & 2 & \ldots & n-2 & n-1 \end{pmatrix}$$

(b) Dokážeme, že pro $k < n$ se latinský obdélník $k \times n$ dá přidáním řádků doplnit na latinský čtverec (pro $k = n$ není co dokazovat). Dokážeme-li, že ke každému takovému obdélníku lze přidat jeden řádek tak, že vzniklá matice bude opět latinský obdélník, pak postupným přidáváním řádků (tedy indukcí) můžeme každý latinský obdélník doplnit na latinský čtverec.

Ukážeme důkaz, který ve svém řešení zaslala *Katarína Quittnerová*. Vytvoříme tabulku (matici) $(n-k) \times n$, ve které do každého sloupečku zapíšeme v libovolném pořadí čísla, která v tomto sloupečku chybí v doplňovaném latinském obdélníku. Jejich množinu, tedy množinu čísel chybějících v i-tém sloupci obdélníku, označíme $M(i)$; číslo v i-tém sloupci prvního řádku tabulky pak $A(i)$ (budemu mu říkat 1. prvek sloupce i).

Jestliže jsou v prvním řádku tabulky všechna čísla navzájem různá, pak můžeme tento řádek přidat k obdélníku a jsme hotovi. Předpokládejme tedy, že existují sloupce ℓ a m takové, že $A(\ell) = A(m)$. Dokážeme, že pak lze první řádek tabulky „zlepšit“ přehozením čísel v některém sloupci tabulky tak, že potom první řádek obsahuje více různých čísel než před zlepšením. Postupným zlepšováním se zvyšuje počet navzájem různých prvků prvního řádku tak dlouho, až jich je právě n.

Množinu čísel, která chybějí v prvním řádku tabulky, označíme Ch. Pokud některé z čísel m-tého nebo ℓ-tého sloupce leží v Ch, pak můžeme v tomto sloupci přehodit číslo z prvního řádku s prvkem Ch. Jinak vezmeme všechny sloupce j takové, že $A(j) \in M(\ell) \cup M(m)$, tedy že jejich první prvek se vyskytuje také alespoň v jednom ze sloupců ℓ, m. Budeme jim říkat sloupce 1. generace. Pokud se v některém ze sloupců první generace vyskytuje prvek Ch, můžeme v tomto sloupci přehodit toto číslo do prvního řádku a v některém ze sloupců ℓ, m přehodíme prvek v prvním řádku s tím, který byl před přehozením ve sloupci 1. generace v prvním řádku. Tím se počet různých čísel v prvním řádku tabulky o 1 zvětší.

Není-li v žádném ze sloupců 1. generace žádný prvek množiny Ch, označíme za sloupce 2. generace ty, jejichž první prvek se nachází v některém ze sloupců 1. generace. Pokud v některém z těchto sloupců najdeme číslo chybějící v prvním řádku, můžeme přehozením dvou prvků v jednom sloupci 2. generace, v jednom sloupci 1. generace a ve sloupci ℓ nebo m zlepšit první řádek tabulky. Jinak vytvoříme sloupce 3. generace a pokračujeme dále.

Zbývá dokázat, že se postup předčasně nezastaví, tedy že nenastane situace, kdy máme vytvořeno g generací (říkejme jim vygenerované sloupce a počítejme mezi ně i sloupce ℓ a m), jejichž sloupce neobsahují žádné číslo z množiny Ch, a přitom neexistuje žádný sloupec $(g+1)$-ní generace (tedy takový, že jeho první prvek leží také v některém ze sloupců g-té generace). V této situaci je ale každý prvek každého vygenerovaného sloupce prvním prvkem některého (stejného nebo jiného) vygenerovaného sloupce (jinak by byl buď v Ch, nebo v prvním řádku některého zatím nevygenerovaného sloupce). Nechť vygenerovaných sloupců je v. Ve vygenerovaných sloupcích je zapsáno samozřejmě $v \cdot (n-k)$ čísel. V prvním řádku vygenerovaných sloupců je však nejvýše $v-1$ různých prvků (neboť prvky v ℓ-tém a m-tém sloupci jsou stejné). Každé z těchto čísel je v tabulce právě $(n-k)$-krát, takže vygenerované sloupce obsahují nejvýše $(v-1)(n-k)$ čísel a to je spor. Tím jsme dokázali, že generování sloupců se předčasně nezastaví. Protože však nemůže pokračovat do nekonečna (sloupců je jen n), dokážeme někdy zlepšit první řádek tabulky a důkaz je dokončen.

Poznámky opravovatele: Většina řešení byla správná v části (a). Správné řešení části (b) jsme dostali jen jedno (právě jste jej dočetli), další tři řešitelé se malinko přiblížili. Někteří napsali, že je zřejmé, že lze přidat řádek. Za zřejmé to nepovažuji, proto tito řešitelé dostali za část (b) nula bodů.

3. úloha

Nechť $M \subseteq \mathbb{N}_0$. Řekneme, že M je *pěkná*, pokud platí

(1) $(\forall a, b \in M)(a+b \in M,\ |a-b| \in M)$.
(2) $(\forall k \in \mathbb{N}_0)(\forall m \in M)(k \cdot m \in M)$.

Množinu M nazveme *nádhernou*, pokud M je pěkná a navíc platí

$$(\forall a, b \in \mathbb{N}_0)((a \cdot b \in M) \Rightarrow (a \in M \vee b \in M)).$$

(a) Nalezněte všechny pěkné podmnožiny $\mathbb{N}_0$. (2 body)
(b) Nalezněte všechny nádherné podmnožiny $\mathbb{N}_0$. (3 body)

(a) Nejprve si všimněme, že prázdná množina je pěkná, protože všechny podmínky jsou prázdné. Nadále tedy uvažujeme M neprázdnou.

Označme $M_n = \{kn : k \in \mathbb{N}_0\}$ množinu všech násobků čísla n. Tyto množiny jsou pěkné pro libovolné $n \in \mathbb{N}_0$:

(1) pro každé $kn,\ ln \in M_n$ platí $kn + ln = (k+l)\,n \in M_n$ a $|kn - ln| = |k-l|n \in M_n$,

(2) pro každé $k \in \mathbb{N}_0$, $ln \in M_n$ platí $k\,(ln) = (kl)\,n \in M_n$.

Tvrdíme, že jiné pěkné množiny nejsou. Nechť M je pěkná, $M \neq M_0$. Potom $M \setminus \{0\}$ je neprázdná a má nejmenší prvek m. Buď je tedy $M = M_m$ a jsme hotovi, nebo ne. Potom je ovšem $M \setminus M_m$ neprázdná a můžeme označit její nejmenší prvek n. Je vidět, že $n > m$, protože m je nejmenší nenulový prvek M. Takže $|n-m| = n-m \in M \setminus \{0\}$. Navíc $n-m \notin M_m$, protože jinak by $n = (n-m) + m \in M_m$, což jsme zakázali. A už je vidět, že $n > n-m \in M \setminus M_m$, což dává spor s výběrem n jakožto nejmenšího prvku této množiny.

(b) Ukážeme, že M_n je nádherná právě tehdy, když n je prvočíslo, 0 nebo 1. Ověření pro $M_0 = \{0\}$ a $M_1 = \mathbb{N}_0$ je triviální. A samozřejmě také prázdná množina je nádherná.

Nechť n prvočíslo a $ab \in M_n$. Pokud $ab = 0$, zjevně $a = 0$ nebo $b = 0$ a $0 \in M_n$. Pokud ne, mohu ab napsat jako součin kn pro nějaké k přirozené. Prvočíslo n se nutně musí objevit v prvočíselném rozkladu čísla ab, tady také v prvočíselném rozkladu čísla a nebo b. Čímž je vidět, že a nebo b leží v M_n. Takže M_n je nádherná.

Teď uvažme $n = cd$ pro nějaká $c, d \neq 0, 1$ přirozená. Zjevně $c, d \notin M_n$, protože nejmenší nenulový prvek M_n je n. Ale přitom $cd = n \in M_n$, takže M_n nemůže být nádherná.

Poznámky opravovatele: V části (a) jsem uděloval jeden bod řešitelům, kteří sice nalezli všechny pěkné množiny, ale úplnost svého řešení neodůvodnili. Za další drobné nedostatky jsem strhával $-i$ až jeden bod.

4. úloha

(a) Rozhodněte, zda existuje spojitá funkce taková, že její graf se otočením o úhel $\frac{\pi}{2}$ (90 stupňů) okolo počátku nezmění. (2 body)

(b) Rozhodněte, zda existuje (ne nutně spojitá) funkce taková, že její graf se otočením o úhel $\frac{\pi}{3}$ (60 stupňů) okolo počátku nezmění. (3 body)

Poznámky: V tomto příkladu *funkcí* rozumíme reálnou funkci reálné proměnné, jejíž definiční obor je **celá** množina $\mathbb{R}$. *Grafem* funkce f rozumíme množinu bodů $[x,\ f(x)]$, kde x probíhá celou množinu $\mathbb{R}$.

Pojem *spojité* funkce stačí chápat intuitivně. V řešení můžeš používat všechny známé elementární vlastnosti spojitých funkcí, zejména tzv. *Darbouxovu vlastnost* o nabývání mezihodnot. Ta říká, že každá spojitá funkce f nabývá na intervalu (a, b) všech hodnot mezi $f(a)$ a $f(b)$.

(a) Předpokládejme pro spor, že existuje spojitá funkce f, jejíž graf se nezmění po otočení o $\frac{\pi}{2}$ okolo počátku. Ukážeme, že existuje $t > 0$ takové, že $f(t) = 0$. Pokud $f(1) = 0$, položíme $t = 1$ a jsme hotovi. Pokud $f(1) = x > 0$, tak po otočení bodu $[1, x]$ ve směru hodinových ručiček o úhel $\frac{\pi}{2}$ dostáváme $f(x) = -1 < 0$. Z Darbouxovy vlastnosti, kterou f jistě splňuje plyne, že existuje mezi 1 a x bod $t > 0$, kde $f(t)$=0. Analogicky postupujeme, je-li $f(1) = y < 0$. Pak otočením v opačném směru zjistíme, že $f(-y) = 1 > 0$ a znovu použijeme Darbouxovu vlastnost pro nalezení t.

Máme tedy $t > 0$, $f(t) = 0$. Otočením grafu f o úhel $\frac{\pi}{2}$ zjistíme, že $f(0) = t > 0$. Otočíme-li graf f ještě dvakrát, zjistíme, že $f(0) = -t < 0$, což je kýžený spor.

V několika řešeních se také objevila tato idea: Hledaná funkce musí být lichá (což snadno zjistíme dvojím otočením grafu funkce o úhel $\frac{\pi}{2}$), tedy $f(0) = 0$. Také musí být prostá, kdybychom měli dva body $t_1 \neq t_2$ takové, že $f(t_1) = f(t_2) = y$, tak otočením grafu f o úhel $\frac{\pi}{2}$ proti směru hodinových ručiček dostáváme zároveň $f(-y) = t_1$ a $f(-y) = t_2$, což je spor. Použijeme tvrzení, že každá spojitá prostá funkce je buď rostoucí, nebo klesající (toto tvrzení se na zběžný pohled může zdát „jasné", ale ve skutečnosti není úplně jednoduché ho dokázat — a není naším záměrem ho zde dokazovat) a dostáváme, že graf naší funkce f nutně prochází prvním a třetím kvadrantem (pokud je rostoucí), nebo druhým a čtvrtým kvadrantem (pokud je klesající). V obou případech dostaneme spor, otočíme-li graf o úhel $\frac{\pi}{2}$ libovolným směrem.

(b) Na první pohled se to může zdát překvapivé, ale taková funkce existuje.[2] Zkonstruujeme zde funkci g, která má požadované vlastnosti. Předně položíme $g(0) = 0$. Dále nadefinujeme funkci g pro $x > 0$. Nejdříve si uvědomíme, že existuje úhel $\alpha \in (0, \frac{\pi}{6})$ takový, že

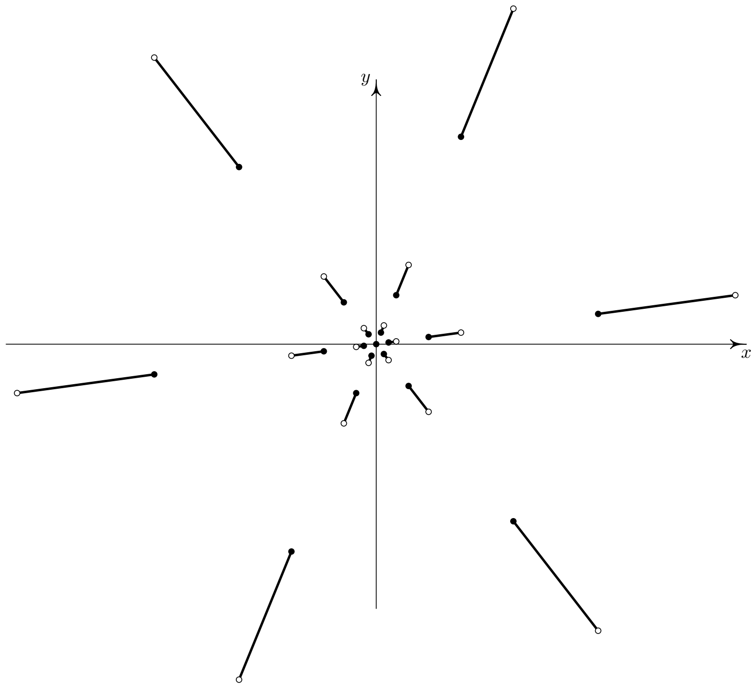
$$\frac{\cos\alpha}{\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{3}\right)} = \frac{\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{3}\right)}{\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right)}.$$

To snadno nahlédneme z Darbouxovy vlastnosti a toho, že rozdíl levé a pravé strany rovnosti je spojitá funkce, nebo prostě tím, že rovnici vyřešíme a dostaneme přesnou hodnotu $\alpha = \operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\left(\sqrt{5}-2\right)\right) \doteq 7,76^\circ$. Detaily si laskavý čtenář rozmyslí sám. Dále označíme

$$t = \frac{\cos\alpha}{\cos(\alpha - \frac{\pi}{3})} = \frac{\cos(\alpha - \frac{\pi}{3})}{\cos(\alpha + \frac{\pi}{3})}. \tag{$\heartsuit$}$$

Přesnou hodnotu lze dopočítat, vyjde $t = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Každé číslo $x > 0$ lze psát ve tvaru $x = u \cdot t^{3z+l}$ pro právě jedno $u \in \langle 1, t)$, $z \in \mathbb{Z}$, $l \in \{0,\ 1,\ 2\}$. Pro tato vyjádřené x definujeme $g(x) = x \cdot \operatorname{tg}(\alpha + \frac{\pi}{3})$, je-li $l = 0$, $g(x) = x \cdot \operatorname{tg}(\alpha - \frac{\pi}{3})$, je-li $l = 1$ a konečně $g(x) = x \cdot \operatorname{tg}\alpha$, je-li $l = 2$. Tedy obrazy bodů $x > 0$ umísťujeme střídavě na přímky procházející počátkem a svírající s osou x úhly $\alpha + \frac{\pi}{3}$, $\alpha - \frac{\pi}{3}$, α, podle toho, do kterého z intervalů $\ldots,\ \langle 1, t),\ \langle t, t^2),\ \langle t^2, t^3), \ldots$ bod x patří. Pro body $x < 0$ definujeme $g(x)$ tak, aby byl graf funkce g symetrický podle počátku. Tím jsme definovali funkci g (pro lepší představu Ti poslouží obrázek). Jak se snadno přesvědčíme, díky vlastnosti ($\heartsuit$) a způsobu, jakým jsme definovali funkci g se její graf nezmění při otočení o úhel $\frac{\pi}{3}$ okolo počátku. Např body grafu, které leží na přímce svírající s osu x úhel α se při otočení o úhel $\frac{\pi}{3}$ proti směru hodinových ručiček dostanou na přímku, která svírá s osou x úhel $\alpha + \frac{\pi}{3}$. Jelikož se jejich x-ová souřadnice zmenší t^2-krát, vše je v souladu s naší definicí funkce g. Obdobně to funguje i s ostatními přímkami, detaily si laskavý čtanář již domyslí sám, vše je názorně vidět z obrázku.

[2] Rozhodně ale nemůže být spojitá, což lze ověřit podobným způsobem, jako v části (a).



Poznámky opravovatele: V řešeních první části využívajících Darbouxovu vlastnost se příliš mnoho chyb nevyskytovalo. Druhý způsob sváděl mnoho řešitelů k neúměrně stručnému důkazu. „Intuitivně jasnou“ větu, že každá prostá spojitá funkce je buď rostoucí nebo klesající, jsem akceptoval bez důkazu, ale např. tvrzení o prostotě hledané funkce by si zasloužilo podrobněji dokázat. Za takováto příliš stručná řešení jsem strhával i.

V druhé části úlohy si mnoho z vás nevšimlo, že hledaná funkce má být definovaná na celém $\mathbb{R}$. Někteří zhruba odhadli tvar grafu hledané funkce, ale pouze tři řešitelé přesně vypočítali předpis pro takovouto funkci. Avšak právě tento výpočet je důkazem, že funkce, jejíž graf jste odhadli, opravdu existuje; bez něho je řešení pouhou domněnkou či nástinem.

5. úloha

Král se chce rozhodnout, kterou ze 100 dívek si vezme za ženu. Pochopitelně chce tu nejhezčí, jenže ony k němu chodí postupně a král musí nápadnici hned říct, zda ji chce, nebo ne. Král zvolil následující strategii: Odmítne prvních padesát a z dalších padesáti si vybere první, která bude hezčí, než všechny předchozí (nebo si, pokud takto odmítne dalších 49, vybere tu poslední).

(a) Jaká je pravděpodobnost, že si král vybere tu nejošklivější? (2 body)

(b) Jaká je pravděpodobnost, že si král vybere tu nejhezčí? (3 body)

(a) Král si bude muset vzít nejošklivější princeznu jedině tehdy, když nejkrásnější bude mezi prvními padesáti, král pak v druhé padesátce nenalezne žádnou krásnější a vezme si proto tu poslední — ta tedy musí být nejošklivější. Pravděpodobnost, že nejošklivější bude poslední je 1/100, na nejhezčí pak zbývá 99 míst, a tedy pravděpodobnost, že bude mezi prvními padesáti je 50/99 (lze to samozřejmě počítat i obráceně, jednotlivé pravděpodobnosti pak jsou 50/100 a 1/99). Výsledná pravděpodobnost je $1/100 \cdot 50/99$, což je 1/198.
(b) Pravděpodobnost, že si král vybere nejhezčí je součtem pravděpodobností, že si vybere nejhezčí, za předpokladu, že jde 1., 2., ... , 100. násobených 1/100 (což je pro každé k pravděpodobnost, že nejhezčí princezna půjde jako k-tá). Pravděpodobnost, že si ji král vybere, když jde 1., 2., ... , 50., je 0. Aby si ji vybral, pokud půjde jako k-tá (kde $50 < k \leq 100$) musí nejkrásnější z těch, co jdou před ní, jít v první padesátce, tedy musí být na některém z padesáti míst z celkových $k-1$, pravděpodobnost je $\frac{50}{k-1}$. Celková pravděpodobnost je rovna

$$\sum_{k=51}^{100} 1/100 \cdot \frac{50}{k-1} = 1/2 \cdot \sum_{k=51}^{100} \frac{1}{k-1} = 1/2 \cdot \sum_{k=50}^{99} 1/k\,.$$

Tento výsledek již nelze nijak hezky upravit, nicméně jeho hodnotu lze docela přesně odhadnout integrálem $1/2 \cdot \int_{50}^{100} 1/x \,\mathrm{d}x = 1/2 \cdot \ln 2 \doteq 0{,}35$.

Poznámky opravovatele:
(a) Zde se problémy příliš nevyskytovaly, jen několik řešitelů si neuvědomilo, že umisťování nejhezčí a nejošklivější princezny nejsou nezávislé jevy — lidsky řečeno: nemohu je obě umístitit na jedno místo, tedy umístím-li jednu z nich, zbyde mi na tu druhou už jen 99 míst místo původních 100.
(b) V této úloze bylo třeba rozlišovat pozice princezen podle nějakého klíče. Podle toho, jak šikovný způsob jste našli, tak jednoduchá vám vyšla výsledná suma. Problém je v tom, že sumy s faktoriály a kombinačními čísly se těžko upravují (a v této úloze o to ani nešlo), proto jsem hodnotila jen to, zda se vám podařilo najít smysluplný způsob, jak úlohu řešit, a jeho správné matematické vyjádření; i bez úpravy na nejjednodušší tvar jste mohli dostat plný počet bodů.

6. úloha
(a) Nechť je dána přímka p a rovina ϱ. Sestrojte obraz roviny ϱ v otočení o 90 stupňů okolo přímky p. (2 body)
(b) Nechť je dána přímka p a roviny ϱ_1, ϱ_2, ϱ_3. Sestrojte krychli[3] $ABCDEFGH$ tak, aby $AE \in p$, $B \in \varrho_1$, $D \in \varrho_2$ a $G \in \varrho_3$. (3 body)

(a) Nejprve sestrojíme rovinu σ kolmou k přímce p. Tato rovina protne rovinu ϱ v přímce q (pokud ji neprotne, je s ϱ rovnoběžná a jejím otočením kolem p je ona sama). Tuto přímku

[3] Vrcholy jsou značeny v obvyklém pořadí.

otočíme v rovině σ kolem bodu $\sigma \cap p$ a získáme přímku q'. Pokud se ϱ a p protínají v jednom bodě, proložíme rovinu přímkou q' a tímto bodem (rovinu σ jsme volili tak, aby tímto bodem neprocházela). Pokud $p \subset \varrho$ stačí proložit rovinu přímkami p a q', které jsou různoběžné. Zbývá případ, kdy p a ϱ jsou rovnoběžné, v tomto případě stačí sestrojit rovinu, která obsahuje q' a je kolmá k rovině σ.
(b) Nejprve ϱ_2 otočíme okolo p o $-90°$, dostaneme ϱ_2', na její průsečnici s ϱ_1 (označme ji b) bude ležet bod B. Nyní otočíme rovinu ϱ_3 o $-45°$ a navíc ji zobrazíme takovým způsobem, aby obraz libovolného bodu měl od p vzdálenost, která je rovna $\sqrt{1/2}$-násobku vzdálenosti vzoru od přímky p. Tím dostaneme rovinu ϱ_F, v které bude ležet bod F. Zobrazení provedeme tak, že sestrojíme obrazy tří bodů a těmi pak proložíme rovinu. Obraz bodu sestrojíme tak, že sestrojíme rovinu τ kolmou k p procházející tímto bodem a v té sestrojíme obraz bodu ve stejnolehlosti se středem $p \cap \tau$ a koeficientem $\sqrt{1/2}$.

Dále víme, že BF bude rovnoběžná s $AE \subset p$. Protože $B \in b$, bude bod F ležet v rovině rovnoběžné s přímkou p obsahující přímku b. Tuto rovinu označme β a její průsečnici s rovinou ϱ_F označme f (rovinu β sestrojíme snadno: nejprve rovinu kolmou k p a pak rovinu kolmou k této rovině, která bude obsahovat b). Nyní víme, že $B \in b$ a $F \in f$, kde b a f jsou přímky. Řekneme, že $B \in b$ a $F \in f$ jsou přátelé, jestliže BF je rovnoběžná s AE. Z konstrukce b a f plyne, že v obecném případě má každý bod B právě jednoho přítele na f a naopak každý bod $F \in f$ má právě jednoho přítele na b (k neobecným případům se vrátíme později). Hledáme takový bod $B \in b$, že vzdálenost B od p je stejná jako vzdálenost B od jeho přítele $F \in f$.

Sestrojme nyní rovinu α kolmou k p a uvažujme kolmý průmět přímky b do této roviny (je to průsečík rovin α a β), označme ho b'. Nyní posuneme každý bod přímky f tak, aby si přátelé zachovali svou vzdálenost, tj. zobrazíme dva body a jimi proložíme přímku f'. Nyní se nám situace zjednodušila tak, že místo vzdálenosti B od přímky p máme vzdálenost B od bodu $A' = \alpha \cap p$. A když ještě otočíme bod A' okolo přímky b' tak, aby ležel v rovině β, máme vše zajímavé shromážděno do roviny β, tj. problém je následující: Dány dvě přímky b', f' a bod A'' v rovině a hledáme bod $B' \in b'$ tak, aby jeho vzdálenost od A'' byla rovna jeho vzdálenosti od přítele $F' \in f'$. Přítel F' je takový bod, že $B'F'$ je kolmá na b'.

Pokud b' je rovnoběžná s f', je zřejmé, jak takový bod najdeme (kružnice se středem v A''). Pokud jsou různoběžné: zvolíme bod $B' \in b'$ a najdeme jeho přítele F'. Sestrojíme kružnici se středem B' a poloměrem $|B'F'|$ a druhou kružnici, Thaletovu nad průměrem $B'X$, kde $X = b' \cap f'$ a průsečík těchto kružnic (je jedno který) označme F''. Veďme body F'' a X přímku a označme ji f''. Bod F'' je novým přítelem bodu B', jeho vzdálenost je stejná, jako původního přítele, ale nepříjemný pravý úhel, který svírala $B'F'$ s b', jsme přemístili tak, že je $B'F''$ kolmá na f''. Že všichni noví přátelé bodů z b' leží na přímce f'' se dá ukázat pomocí podobnosti trojúhelníků.

Nový problém teď vypadá takto: Máme b', f'' a bod A'' a hledáme bod $B' \in b'$, který má stejnou vzdálenost od přímky f'' jako od bodu A''. Věřím, že všem, kteří dočetli až sem (a pochopili),[4] problém nápadně připomíná Appoloniovu úlohu BBp a umějí ho vyřešit (druhý bod je souměrně sdružený s A'' podle přímky b', označme ho Y, bude se hodit). Stačí proložit bodem A'' kolmici k přímce b' (tj. přímku $A''Y$) a nalézt její průsečík s f'' (označme

[4] o prázdné množině se dá říct ledacos

ho W). Nyní z mocnosti bodu ke kružnici plyne, že $|WA''| \cdot |WY| = |WF''|^2$, neboť F'' je bod dotyku kružnice s hledaným středem B' o poloměru $|B'A''| = |B'Y|$. Sestrojíme tedy Thaletovu kružnici nad průměrem WA'' (pokud $|WA''| > |WY|$, jinak zaměníme Y s A'') a kolmici k WA'' bodem Y a jejich průsečík Z má od W stejnou vzdálenost jako hledaný F''. Stačí ho otočit na přímku f'' a máme F''. Odtud již snadno dostaneme bod B', odtud B a F' a F a další vrcholy krychle.

Nyní něco k počtu řešení: V celém řešení je mnoho kroků, kde se může stát, že se roviny či přímky neprotnou nebo splynou a úlohy bude mít nekonečně mnoho, nebo 0 řešení. Pokud ani jeden z těchto případů nenastane, dostaneme tímto postupem pouze jediné řešení (na konci sice získáme až 2 body F'', ale chceme-li, aby označení krychle mělo správnou orientaci,[5] bude vyhovovat pouze jeden z nich). Druhé řešení však můžeme získat tak, že na začátku řešení neotočíme roviny o záporné, ale kladné úhly. Tj. úloha má 0, 1, 2, nebo nekonečně mnoho řešení.

Poznámky opravovatele: Lehčí část úlohy většina řešitelů zvládla. Řešení části (b) bylo málo, byla vesměs komplikovaná a obsahovala více či méně zdařilé pokusy o diskusi. Ale diskuse u příkladu byla složitá, takže jsem body nestrhával.

7. úloha

Najděte všechna komplexní čísla a taková, že funkce $f(z) = az^2$ zobrazuje čtverec s vrcholy $1+i,\ 1-i,\ -1+i,\ -1-i$

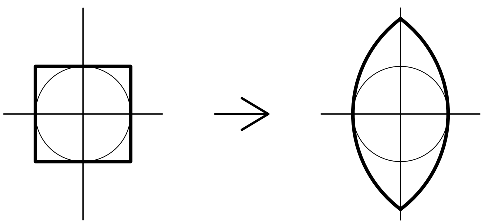
(a) do jednotkového kruhu. (2 body)

(b) do sebe. (3 body)

Čtverec i jednotkový kruh uvažujeme v tomto příkladu uzavřený, tedy obsahující svoji hranici.

Odstavce nutné k řešení úlohy jsou až po symbolu ♡. Všechen předchozí text je o tom, jak se na to dá přijít.

Nejprve si rozebereme zadanou funkci. Pokud $a = 1$, funkce $f(z) = z^2$ zobrazí vrcholy čtverce na body $\pm 2i$ a středy hran na body ± 1. Zbylé body obvodu čtverce budou někde „mezi“. Vyjde asi takovýhle obrázek (kružnice je jednotková):



[5] tj. pokud A je vpředu vlevo dole a B vpředu vpravo dole, pak C je vzadu vpravo dole a nikoli vpředu vpravo nahoře

A co dělá násobení číslem $a = A(\cos\alpha + i\sin\alpha)$? Není to nic jiného, než stejnolehlost se středem v počátku s koeficientem A a otočení o α. (To plyne ze vzorečku

$$(\cos\alpha + i\sin\alpha)(\cos\beta + i\sin\beta) = \cos(\alpha+\beta) + i\sin(\alpha+\beta),$$

který si snadno dokážete sami.)

(a) Aby se ten obrázek vešel do kruhu, musí se nutně nejvzdálenější bod od počátku (tj. $\pm 2i$) přiblížit alespoň na průměr kruhu — takže $|a|$ by mělo být nejvýše $\frac{1}{2}$. Na otočení potom zjevně nezáleží, protože kruh je kulatý. Hypotéza zní: vyhovují všechna $a \in \mathbb{C}$ taková, že $|a| \leq \frac{1}{2}$, tj. z kruhu o poloměru $\frac{1}{2}$.
♡ Korektní ověření provedeme výpočtem. Mějme $x+iy$ bod daného čtverce, tj. $|x| \leq 1, |y| \leq 1$. Dosadíme $f(x+iy) = a(x^2 - y^2 + 2ixy)$. Aby se vešel do jednotkového kruhu, musí být $|f(x+iy)| \leq 1$, tedy

$$1 \geq |a|\sqrt{(x^2-y^2)^2 + 4x^2y^2} = |a|(x^2+y^2),$$

jelikož (x^2+y^2) nabývá největší hodnotu rovnu 2, nerovnost bude platit pro všechna uvažovaná x, y právě tehdy, když $|a| \leq \frac{1}{2}$.

(b) Nechť $a = u + iv$. Pak

$$f(z) = (u(x^2-y^2) - 2vxy) + i(v(x^2-y^2) + 2uxy).$$

Aby se vešel obraz čtverce do čtverce, musí být $|\operatorname{Re} f(z)| \leq 1$ a $|\operatorname{Im} f(z)| \leq 1$. Nejprve to zkusím s rohy čtverce ($x = \pm 1, y = \pm 1$). Vyjdou nutné podmínky

$$|u \cdot 0 \pm 2v| \leq 1, \quad |v \cdot 0 \pm 2u| \leq 1.$$

Takže hypotéza zní: vyhovují všechna $a \in \mathbb{C}$ taková, že $|\operatorname{Re} a| \leq \frac{1}{2}$ a $|\operatorname{Im} a| \leq \frac{1}{2}$, tj. z čtverce s vrcholy $\pm\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}i$.

Zbývá ověřit, že se obraz čtverce vejde do čtverce celý. To zřejmě stačí ověřit pro hrany obrazu, tj. obrazy hran čtverce. Vybereme si jednu hranu, konkrétně $x = 1, y \in \langle -1, 1\rangle$. Ostatní případy budou díky symetrii stejné. Potřebujeme zajistit, aby

$$|u(1-y^2) - 2vy| \leq 1, \quad |v(1-y^2) + 2uy| \leq 1.$$

Vyšetříme první podmínku, druhá se udělá analogicky. Protože $1 - y^2 \geq 0$, můžeme dosadit maximální hodnotu $u = \frac{1}{2}$. Dále volíme $v = \pm\frac{1}{2}$ tak, aby $-2vy \geq 0$. Potom

$$|u(1-y^2) - 2vy| = -\frac{1}{2}y^2 + |y| + \frac{1}{2}.$$

Tato funkce je nezáporná, na intervalu $\langle -1, 0\rangle$ klesající a na intervalu $\langle 0, 1\rangle$ rostoucí, protože $|y| \geq \frac{1}{2}y^2$. Takže své maximum (jehož hodnota je 1) nabývá pro $y = \pm 1$. Tím je důkaz hotov.