1. seriálová série

Téma: Numerická matematika

Termín odeslání: 10. ledna 2000

1. úloha (5 bodů)

Nalezněte, co nejvíce čísel c takových, že metoda $x_{k+1} = x_k + c(x_k^2 - 7)$ konverguje k hodnotě $\sqrt{7}$ pro libovolný počáteční odhad $x_0 \in (2, 3)$. Využijte větu ze seriálu. (Neočekáváme vyčerpávající výsledek. Čím více čísel c se Ti však podaří vyšetřit, tím více bodů můžeš získat.)

2. úloha (5 bodů)

Mějme spojitou funkci f která v intervalu (a, b) protíná osu x v bodě α, tj. $f(\alpha) = 0$. Nechť platí $f(a) < 0$ a $f(b) > 0$. Popište předpis metody sečen a metody půlení intervalů ve tvaru $x_{k+1} = \dots$, $y_{k+1} = \dots$, kde x_{k+1} je odhad kořene α zespoda, y_{k+1} seshora. Tj. pokuste se formálně zapsat, co bylo v seriálu zformulováno jen slovy (nenechte se zmást tím, že předpis bude záviset na znaménku funkce f v bodech x_k a y_k).

3. úloha (5 bodů)

Vezměte rovnici, kterou nám dala fyzikální motivace na začátku seriálu. Zvolte nějakou metodu a spočítejte řešení s přesností na $\frac{1}{1000}$. (Zkuste též ukázat konvergenci této metody a spočítat nějaký odhad chyby.)

2. seriálová série

Téma: Numerická matematika

Termín odeslání: 13. března 2000

4. úloha (5 bodů)

Napište Lagrangeův interpolační polynom pro funkci danou tabulkou v obchodním motivačním příkladě na začátku druhého dílu seriálu.

(Pro aproximaci hodnot funkce by se v tomto příkladě lépe hodila aproximace metodou nejmenších čtverců. Měření jsou totiž vždy zatížena chybou, takže lepší výsledek dostaneme, budeme-li se tabulkových hodnot snažit dosáhnout jen přibližně. To ale Libor neví, proto zde přesto použij interpolaci.)

5. ÚLOHA (5 BODŮ)

Ověřte správnost obecného vzorce pro k-tou diferenci, tj. že pro k-tou diferenci platí

$$\Delta_h^k f(x) = \sum_{j=0}^{k} (-1)^{k-j} \binom{k}{j} f(x+jh).$$

6. ÚLOHA (5 BODŮ)

Je dána tabulka hodnot funkce f:

x	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
$f(x)$	0.7091	0.4336	0.1711	−0.0784	−0.3125

Nalezněte přibližnou hodnotu kořene funkce $f(x)$ ležícího v intervalu $\langle 0.3, 0.4 \rangle$.

3. seriálová série

Téma: Numerická matematika

Termín odeslání: 15. KVĚTNA 2000

7. ÚLOHA (5 BODŮ)

Zvolte nějakou metodu a spočítejte velikost integrálu, který nám dala fyzikální motivace na začátku třetího dílu seriálu (tj. spočítejte práci W) s přesností na tisíciny.

8. ÚLOHA (5 BODŮ)

Jak vypadají uzavřené Newtonovy-Cotesovy vzorce pro $n = 3$? Spočítejte koeficienty H_0, H_1, H_2, H_3.

9. ÚLOHA (5 BODŮ)

Odvoďte vzorce (analogie k vzorcům (%) a (%%)) pro chybu otevřených Newtonových-Cotesových kvadraturních vzorců.

Poznámka: To je o dost těžší úloha než ostatní úlohy seriálu, tak se jí nenech odradit při řešení úloh 7 a 8. Je zde zadána pro uspokojení řešitelů, kterým se zdály úlohy seriálu příliš jednoduché, a vyžaduje hlubší znalosti o integrálech.

Řešení seriálové série

1. úloha
Nalezněte, co nejvíce čísel c takových, že metoda $x_{k+1} = x_k + c(x_k^2 - 7)$ konverguje k hodnotě $\sqrt{7}$ pro libovolný počáteční odhad $x_0 \in (2,3)$. Využijte větu ze seriálu. (Neočekáváme vyčerpávající výsledek. Čím více čísel c se Ti však podaří vyšetřit, tím více bodů můžeš získat.)

Použijeme větu, kterou jsme zformulovali v úvodním povídání. V naší úloze zkoumáme funkci F tvaru $F(x) = x + c(x^2 - 7)$, kde c je konstanta — fungující dále jako parametr, jehož možné hodnoty stanovíme na závěr našich úvah. Derivace funkce F má pak (jedná se o derivaci polynomu, takže můžeme využít vzoreček ze seriálu) tvar

$$F'(x) = 1 + 2cx.$$

Abychom mohli využít větu ze seriálu pro stanovení konvergence naší metody, potřebujeme na intervalu (2,3) odhadnout derivaci funkce F konstantou menší než jedna, tzn.

$$|1 + 2cx| \leq q < 1.$$

Na levé straně (derivace F) je lineární funkce, jejím grafem je přímka. Je zřejmé z názoru, že taková přímka nabývá extrémních hodnot vždy na krajích zkoumaného intervalu. Tj. hodnotu výrazu $|1+2cx|$ v intervalu (2,3) lze odhadnout hodnotami $|F'(2)|$ a $|F'(3)|$, což jsou hodnoty $|1+4c|$ a $|1+6c|$. Maximum z těchto dvou hodnot si můžeme zvolit jako konstantu q. Zbývá tedy nalézt takové konstanty c, aby zároveň platilo $|1+4c| < 1$ a $|1+6c| < 1$. Řešením těchto dvou nerovností dostaneme, že pro $c \in (-1/3, 0)$ zkoumaná metoda konverguje.

Poznámky opravovatele: Téměř všichni řešitelé využili větu ze seriálu a dospěli ke stejnému výsledku jako my ve vzorovém řešení. Drtivá většina však udělala chybu při ověřování jednoho z předpokladů. Aby zmíněná věta platila, musí být splněna následující podmínka: Nechť pro $x \in (a,b)$ platí nerovnost $|F'(x)| \leq q < 1$, kde q je vhodná konstanta (nezávislá na x). Je nutné si uvědomit, že i když je $|F'(x)| < 1$ na (a,b), požadovaná existence konstanty q z toho ještě neplyne. Nejlépe to ukážeme na příkladu. Vezměme funkci $g(x) = x^2/2$ která má na intervalu $(0,1)$ derivaci $g'(x) = x$. Zřejmě platí, že $g'(x) < 1$ na $(0,1)$. Konstanta q ovšem neexistuje. Ukážeme to sporem, nechť tedy existuje kladné q, pro které $g'(x) \leq q < 1$ pro všechna $x \in (0,1)$. Pro $x_0 = (1+q)/2$ je $g'(x_0) > q$ ač $x_0 \in (0,1)$, což je kýžený spor. Všem, kteří ověřovali jen $|F'(x)| < 1$ na (a,b), jsem dávala 3 body.

Katarína Quittnerová a částečně i *Honza Houštěk* dokázali, že metoda $x_{k+1} = x_k + c({x_k}^2 - 7)$ konverguje k $\sqrt{7}$ právě pro $c \in \langle -1/\sqrt{7}, 0)$, vysloužili si tak imaginární body.

2. úloha
Mějme spojitou funkci f která v intervalu (a,b) protíná osu x v bodě α, tj. $f(\alpha) = 0$. Nechť platí $f(a) < 0$ a $f(b) > 0$. Popište předpis metody regula falsi a metody půlení intervalů

ve tvaru $x_{k+1} = \dots$, $y_{k+1} = \dots$, kde x_{k+1} je odhad kořene α zespoda, y_{k+1} seshora. Tj. pokuste se formálně zapsat, co bylo v seriálu zformulováno jen slovy (nenechte se zmást tím, že předpis bude záviset na znaménku funkce f v bodech x_k a y_k).

Postupem naznačeným v seriálu dospějeme u metody regula falsi ke vzorcům:

$$x_0 = a,\ y_0 = b.$$

Zřejmě platí $f(x_0) < 0 < f(y_0)$. Máme-li již spočítány iterace x_k a y_k a y_k pro něž platí $f(x_k) < 0 < f(y_k)$, pak v následujícím kroku spočítáme číslo

$$c = \frac{f(y_k)}{f(y_k) - f(x_k)} x_k + \frac{f(x_k)}{f(x_k) - f(y_k)} y_k.$$

Pokud platí $f(c) < 0$, položíme $x_{k+1} = c,\ y_{k+1} = y_k$, pokud platí $f(c) > 0$, položíme $x_{k+1} = x_k,\ y_{k+1} = c$. Snadno si rozmyslíme, že v obou případech stále platí $x_{k+1} < y_{k+1}$ a $f(x_{k+1}) < 0 < f(y_{k+1})$. Pokud by náhodou bylo $f(c) = 0$, pak můžeme výpočet ukončit, neboť jsme našli kořen.

V případě metody půlení intervalů máme dle postupu naznačeného v seriálu vzorce:

$$x_0 = a,\ y_0 = b.$$

Zřejmě platí $f(x_0) < 0 < f(y_0)$. Máme-li spočítány již iterace x_k a y_k pro něž platí $f(x_k) < 0 < f(y_k)$, pak v následujícím kroku spočítáme číslo

$$c = \frac{x_k + y_k}{2}.$$

Pokud platí $f(c) < 0$, položíme $x_{k+1} = c,\ y_{k+1} = y_k$, pokud platí $f(c) > 0$, položíme $x_{k+1} = x_k,\ y_{k+1} = c$. Snadno si rozmyslíme, že v obou případech stále platí $x_{k+1} < y_{k+1}$ a $f(x_{k+1}) < 0 < f(y_{k+1})$. Pokud by náhodou nenastala ani jedna z těchto dvou možností a $f(c) = 0$, pak můžeme výpočet ukončit, neboť jsme našli kořen.

3. úloha

Vezměte rovnici, kterou nám dala fyzikální motivace na začátku seriálu. Zvolte nějakou metodu a spočítejte řešení s chybou nejvýše $\frac{1}{1000}$. (Zkuste též ukázat konvergenci této metody a spočítat nějaký odhad chyby.)

Jelikož nás zajímá x z intervalu $(r, 2r)$ hledáme řešení $z = \frac{x}{r}$ rovnice $f(z) = 0$ z intervalu $(1, 2)$. Vezmeme-li pro metodu sečen (či metodu půlení intervalů) odvozenou v předcházející úloze počáteční odhady $x_0 = 1,\ y_0 = 2$, dostaneme po několika iteracích výsledek s žádanou přesností. Chybu můžeme v každém kroku odhadnout rozdílem $|y_k - x_k|$. S přesností na tisíciny vyjde výsledek $z = 1.269$.

Poznámky opravovatele: Zadání se bohužel dalo pochopit tak, že stačí najít pouze jedno řešení, takže jsem byl nucen udělovat i za nalezení jednoho kořene 5 bodů. Avšak ty, co našli kořeny oba, jsem odměnil i-čky.

4. úloha

Napište Lagrangeův interpolační polynom pro funkci danou tabulkou v obchodním motivačním příkladě na začátku druhého dílu seriálu.

(Pro aproximaci hodnot funkce by se v tomto příkladě lépe hodila aproximace metodou nejmenších čtverců. Měření jsou totiž vždy zatížena chybou, takže lepší výsledek dostaneme, budeme-li se tabulkových hodnot snažit dosáhnout jen přibližně. To ale Libor neví, proto zde přesto použij interpolaci.)

Máme tedy funkci f danou tabulkou:

x	-5	0	5	10	20	25
$f(x)$	0,3	0,5	1	2	5	11

V uvedené tabulce máme šest tabulkových hodnot, označme si tedy $x_1 = -5$, $x_2 = 0$, $x_3 = 5$, $x_4 = 10$, $x_5 = 20$ a $x_6 = 25$. Dle textu ze seriálu má Lagrangeův polynom tvar

$$l(x) = f(x_1)g_1(x) + f(x_2)g_2(x) + f(x_3)g_3(x) + f(x_4)g_4(x) + f(x_5)g_5(x) + f(x_6)g_6(x) =$$

$$= f(-5)g_1(x) + f(0)g_2(x) + f(5)g_3(x) + f(10)g_4(x) + f(20)g_5(x) + f(25)g_6(x),$$

kde funkce g_i, $i = 1, \ldots, 6$, jsou polynomy dané předpisem

$$g_i(x) = \frac{(x-x_1)\cdot(x-x_2)\cdots(x-x_{i-1})\cdot(x-x_{i+1})\cdots(x-x_6)}{(x_i-x_1)\cdot(x_i-x_2)\cdots(x_i-x_{i-1})\cdot(x_i-x_{i+1})\cdots(x_i-x_6)}.$$

Po dosazení za x_i, $i = 1, \ldots, 6$, můžeme psát

$$\begin{aligned}
l(x) = &-\frac{0{,}3}{562500}(x-0)(x-5)(x-10)(x-20)(x-25)\\
&+\frac{0{,}5}{125000}(x+5)(x-5)(x-10)(x-20)(x-25)\\
&-\frac{1}{75000}(x+5)(x-0)(x-10)(x-20)(x-25)\\
&+\frac{2}{112500}(x+5)(x-0)(x-5)(x-20)(x-25)\\
&-\frac{5}{375000}(x+5)(x-0)(x-5)(x-10)(x-25)\\
&+\frac{11}{1125000}(x+5)(x-0)(x-5)(x-10)(x-20),
\end{aligned}$$

což je jeden ze způsobů, jak můžeme zapsat hledaný Lagrangeův interpolační polynom.

5. úloha
Ověřte správnost obecného vzorce pro k-tou diferenci, tj. že pro k-tou diferenci platí

$$\Delta_h^k f(x) = \sum_{j=0}^{k} (-1)^{k-j} \binom{k}{j} f(x+jh).$$

Vzoreček nahlédneme matematickou indukcí podle k. Pro $k=0$ a $k=1$ ověříme přímým dosazením, že vzoreček platí. Předpokládejme nyní, že náš vztah platí pro $k=n-1$ a ukážeme, že platí i pro $k=n$.

Pro n-tou diferenci můžeme z rekurentního vztahu psát

$$\Delta_h^n f(x) = \Delta_h^{n-1} f(x+h) - \Delta_h^{n-1} f(x). \tag{$*$}$$

Jelikož předpokládáme platnost dokazovaného vzorečku pro $k=n-1$, víme, že

$$\Delta_h^{n-1} f(x+h) = \sum_{j=0}^{n-1} (-1)^{n-1-j} \binom{n-1}{j} f(x+jh+h) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{n-j} \binom{n-1}{j-1} f(x+jh),$$

$$\Delta_h^{n-1} f(x) = \sum_{j=0}^{n-1} (-1)^{n-1-j} \binom{n-1}{j} f(x+jh),$$

což nám po dosazení do $(*)$ dává

$$\begin{aligned}
\Delta_h^n f(x) &= \sum_{j=1}^{n} (-1)^{n-j} \binom{n-1}{j-1} f(x+jh) - \sum_{j=0}^{n-1} (-1)^{n-j-1} \binom{n-1}{j} f(x+jh) = \\
&= f(x+nh) + \sum_{j=1}^{n-1} (-1)^{n-j} \left(\binom{n-1}{j-1} + \binom{n-1}{j} \right) f(x+jh) - (-1)^{n-1} f(x) = \\
&= f(x+nh) + \sum_{j=1}^{n-1} (-1)^{n-j} \binom{n}{j} f(x+jh) + (-1)^n f(x) = \\
&= \sum_{j=0}^{n} (-1)^{n-j} \binom{n}{j} f(x+jh),
\end{aligned}$$

což jsme chtěli ukázat. Tím je hotov druhý indukční krok a důkaz je proveden.

6. úloha
Je dána tabulka hodnot funkce f:

x	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
$f(x)$	0,7091	0,4336	0,1711	−0,0784	−0,3125

Nalezněte přibližnou hodnotu kořene funkce $f(x)$ ležícího v intervalu $\langle 0{,}3, 0{,}4\rangle$.

Použijeme inverzní interpolace, jak je popsáno na konci druhé části seriálu. Nalezněme proto interpolační polynom k funkci g dané tabulkou:

y	0,7091	0,4336	0,1711	$-0{,}0784$	$-0{,}3125$
$g(y)$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5

Označíme-li $y_1 = 0{,}7091$, $y_2 = 0{,}4336$, $y_3 = 0{,}1711$, $y_4 = -0{,}0784$ a $y_5 = -0{,}3125$, má Lagrangeův interpolační polynom funkce g tvar

$$\begin{aligned} l(y) &= g(y_1)g_1(y) + g(y_2)g_2(y) + g(y_3)g_3(y) + g(y_4)g_4(y) + g(y_5)g_5(y) = \\ &= 0{,}1 \cdot g_1(y) + 0{,}2 \cdot g_2(y) + 0{,}3 \cdot g_3(y) + 0{,}4 \cdot g_4(y) + 0{,}5 \cdot g_5(y), \end{aligned}$$

kde funkce g_i, $i = 1, \ldots, 5$, jsou polynomy dané předpisem

$$g_i(y) = \frac{(y - y_1)\cdots(y - y_{i-1}) \cdot (y - y_{i+1})\cdots(y - y_5)}{(y_i - y_1)\cdots(y_i - y_{i-1}) \cdot (y_i - y_{i+1})\cdots(y_i - y_5)}.$$

Po dosazení za y_i, $i = 1, \ldots, 5$, můžeme psát

$$\begin{aligned} l(y) &= 0{,}83862(y - 0{,}4336)(y - 0{,}1711)(y + 0{,}0784)(y + 0{,}3125) \\ &\quad - 7{,}23956(y - 0{,}7091)(y - 0{,}1711)(y + 0{,}0784)(y + 0{,}3125) \\ &\quad + 17{,}60568(y - 0{,}7091)(y - 0{,}4336)(y + 0{,}0784)(y + 0{,}3125) \\ &\quad - 16{,}98508(y - 0{,}7091)(y - 0{,}4336)(y - 0{,}1711)(y + 0{,}3125) \\ &\quad + 5{,}79435(y - 0{,}7091)(y - 0{,}4336)(y - 0{,}1711)(y + 0{,}0784), \end{aligned}$$

což po dosazení $y = 0$ dává přibližný odhad kořene

$$l(0) = 0{,}3680.$$

7. úloha

Zvolte nějakou metodu a spočítejte velikost integrálu, který nám dala fyzikální motivace na začátku třetího dílu seriálu (tj. spočítejte práci W) s chybou menší, než $\frac{1}{1000}$.

Chceme spočítat numericky integrál

$$W = \int_0^5 \frac{7 - x}{2 + x}\,\mathrm{d}x.$$

Budeme využívat složeného kvadraturního vzorce, přitom zvolíme tolik uzlů v intervalu $\langle 0, 5\rangle$, abychom dosáhli žádané přesnosti.

Použijme třeba Simpsonovo pravidlo ve tvaru uvedeném v seriálu, tj. zvolíme si $m \in \mathbb{N}$ sudé, položíme $h = \frac{5}{m}$ a budeme uvažovat $m+1$ uzlů v intervalu $\langle 0, 5 \rangle$ ve tvaru $x_i = hi$, $i = 0, \ldots, m$, pak

$$\int_0^5 \frac{7-x}{2+x}\,\mathrm{d}x \approx \frac{h}{3}(f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + 2f(x_4) + 4f(x_5) + \cdots$$

$$\cdots + 4f(x_{m-3}) + 2f(x_{m-2}) + 4f(x_{m-1}) + f(x_m)).$$

K odhadu chyby metody bychom mohli použít vzoreček ze seriálu $E(f) = -\frac{(b-a)h^4}{180} f^{(4)}(\omega)$, kde $b = 5$, $a = 0$, $\omega \in (0, 5)$ a h krok dělení. My ovšem budeme postupovat jinak, jak se většinou v praxi postupuje.

Budeme postupně zvyšovat číslo $m+1$, tj. počet uzlů kvadratury, a vždy pomocí Simpsonova pravidla spočítáme velikost zkoumaného integrálu W. V okamžiku, když se přestane při zvyšování m měnit výsledek na požadovaných místech, výpočet zastavíme.

V tabulce jsou spočítané výsledky integrálu W v závislosti na m :

m	2	4	6	8
S_m	6,488095	6,301461	6,281535	6,277222

m	16	32	64	128
S_m	6,275035	6,274877	6,274867	6,274867

Z tabulek vidíme, že pro 65 a 129 uzlů nedošlo k viditelné změně výsledku, můžeme proto směle tvrdit, že $W = 6{,}275$. Pokud chceme být úplně přesní, užijeme k odhadu chyby vzoreček ze seriálu, to již necháváme čtenáři jako cvičení.

Poznámky opravovatele: Úloha se měla řešit numericky, takže řešitelé, kteří si dali tu práci a spočetli přesné řešení, byli ohodnoceni 0 body.

Zadání bylo poněkud nejednoznačné[1] v tom, zda přesnost „na tisíciny“ znamená přenost na tři desetinná místa nebo chybu menší než $\frac{1}{1000}$. Uznával jsem obě řešení.

Naopak jsem netoleroval řešitele, kterým odněkud „spadnul“ počet uzlů a pouze ověřili, že s tímto počtem uzlů je přesnost dostatečná ($-i$).

8. úloha

Jak vypadají uzavřené Newtonovy-Cotesovy vzorce pro $n = 3$? Spočítejte koeficienty H_0, H_1, H_2, H_3.

---

[1] V ročence už je tento nedostatek odstraněn (pozn. aut.).

Pro $n = 3$ dělíme interval $\langle a, b\rangle$ na tři podintervaly s krajními body a, $a+h$, $b-h$ a b, kde $h = \frac{b-a}{3}$. Podle vzorečku (##) můžeme koeficienty H_0, H_1, H_2 a H_3 spočítat takto:

$$\begin{aligned}
H_0 &= -\frac{1}{(h)(2h)(3h)} \int_a^b (x-a-h)(x-b+h)(x-b)\,\mathrm{d}x,\\
H_1 &= \frac{1}{(h)(h)(2h)} \int_a^b (x-a)(x-b+h)(x-b)\,\mathrm{d}x,\\
H_2 &= -\frac{1}{(2h)(h)(h)} \int_a^b (x-a)(x-a-h)(x-b)\,\mathrm{d}x,\\
H_3 &= \frac{1}{(3h)(2h)(h)} \int_a^b (x-a)(x-a-h)(x-b+h)\,\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

Provedeme-li příslušné integrace (stačí využít vzorec pro integrál z polynomu ze seriálu), dostaneme

$$H_0 = H_3 = \frac{3}{8}h, \quad H_1 = H_2 = \frac{9}{8}h, \quad \text{kde } h = \frac{b-a}{3},$$

tedy uzavřené Newtonovy-Cotesovy vzorce mají pro $n = 3$ tvar

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{b-a}{8}\left(f(a) + 3f(a+h) + 3f(b-h) + f(b)\right) + E(f),$$

kde $E(f)$ je chyba kvadraturního vzorce.

Poznámky opravovatele: Většina řešitelů prostě dosadila do vzorců uvedených v komentářích a dostala správný výsledek. *Katka Quittnerová* a *Honza Kynčl* dokázali, že $H_0 = H_3$ a $H_1 = H_2$, takže jim stačilo spočítat dva koeficienty a navíc dostali $+i$.

9. úloha

Odvoďte vzorce (analogie k vzorcům (%) a (%%)) pro chybu otevřených Newtonových-Cotesových kvadraturních vzorců.

Nejprve odvodíme analogii vzorce (%) pro sudé n. Pro chybu v případě otevřených Newtonových-Cotesových vzorců platí (srovnej se vzorcem ze seriálu pro chybu uzavřených vzorců)

$$E(f) = \int_a^b (x-x_1)\cdot(x-x_2)\cdot\ldots\cdot(x-x_{n-1})\frac{f^{(n-1)}(\xi)}{(n-1)!}\,\mathrm{d}x$$

(připomeňme, že ξ je závislé na x, tj. $\xi \equiv \xi(x)$). Provedeme-li integraci per partes, dostáváme

$$E(f) = -\frac{1}{(n-1)!}\int_a^b \left(\int_a^x (t-x_1)\cdot(t-x_2)\cdot\ldots\cdot(t-x_{n-1})\,\mathrm{d}t\right)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(f^{(n-1)}(\xi)\right)\,\mathrm{d}x.$$

Z vlastností Lagrangeova integračního polynomu (stačí ho uvažovat pro $n-1$ a pro n) můžeme odvodit, že existuje $\eta \in (a, b)$ (η je opět funkcí x, tj. $\eta \equiv \eta(x)$) takové, že

$$\frac{1}{(n-1)!} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f^{(n-1)}(\xi) = \frac{1}{n!} f^{(n)}(\eta),$$

tj.

$$E(f) = -\frac{1}{n!} \int_a^b \left(\int_a^x (t - x_1) \cdot (t - x_2) \cdot \ldots \cdot (t - x_{n-1}) \, \mathrm{d}t \right) \left(f^{(n)}(\eta) \right) \, \mathrm{d}x.$$

Dále můžeme nahlédnout, že funkce $\int_a^x (t - x_1) \cdot (t - x_2) \cdot \ldots \cdot (t - x_{n-1}) \, \mathrm{d}t$ nemění znaménko v intervalu $\langle a, b \rangle$, tj. můžeme použít druhou větu o střední hodnotě a celkem máme (opět využijeme integraci per partes)

$$\begin{aligned} E(f) &= -\frac{f^{(n)}(\omega)}{n!} \int_a^b \int_a^x (t - x_1) \cdot (t - x_2) \cdot \ldots \cdot (t - x_{n-1}) \, \mathrm{d}t \, \mathrm{d}x = \\ &= \frac{f^{(n)}(\omega)}{n!} \int_a^b x(x - x_1) \cdot (x - x_2) \cdot \ldots \cdot (x - x_{n-1}) \, \mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Tím jsme odvodili vzorec pro chybu otevřeného Newtonova-Cotesova vzorce pro n sudé. Pro n liché je postup komplikovanější, nebudeme ho zde provádět. Pokud by Tě tento postup nebo cokoliv jiného o numerické matematice zajímalo, doporučujeme další studium literatury. Z běžných česky psaných učebnic můžeme doporučit: *A. Ralston: Základy numerické matematiky, Academia, Praha, 1973.* V této knize můžeš dohledat i odkazy na další specializovanou literaturu.