2. série

Matematická indukce

1. ÚLOHA

V rovině je dáno $n > 4$ bodů. Dokažte, že je možné je spojit orientovanými úsečkami tak, že z každého bodu do každého je možné přejít přes jednu nebo dvě orientované úsečky. (Každé dva body je možné spojit jen jednou orientovanou úsečkou, po každé úsečce je možné se pohybovat pouze ve směru orientace.)

2. ÚLOHA

Nechť $b_1, b_2, \ldots, b_n$ je nějaká permutace kladných čísel $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Dokažte, že

$$\frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2} + \cdots + \frac{a_n}{b_n} \geq n.$$

3. ÚLOHA

Dokažte, že druhá odmocnina z lichého čísla $p \geq 3$ je pro každé p menší, než podíl součinu všech sudých čísel menších než p a součinu všech lichých čísel menších než p. Zjistěte, pro která sudá čísla p toto tvrzení neplatí, dokažte.

4. ÚLOHA

Dokažte, že jestliže x, y, z jsou různá celá čísla, n přirozené číslo, potom

$$\frac{x^n}{(x-y)(x-z)} + \frac{y^n}{(y-x)(y-z)} + \frac{z^n}{(z-x)(z-y)} \qquad \text{je celé číslo.}$$

5. ÚLOHA

Najděte všechna přirozená čísla n, pro která platí $3^n(n+1) > 4^n$.

Řešení 2. série

1. ÚLOHA

Pro $n = 5$ tvrzení platí: Označme si body $1, 2, 3, 4, 5$. Z bodu i nechť vychází úsečka do bodů $i + 1$ a $i - 1$ (vše $\mod 5$) a do bodu i vede úsečka z $i \pm 2$. Tato orientace splňuje požadavky. Mějme tedy orientaci na $n-1$ bodech a přidejme n-tý bod (označme ho z). Vyberme si nyní jeden z původních $n - 1$ bodů, do kterého vchází aspoň 2 úsečky, a označme ho y. Úsečku $y - z$ orientujeme ve směru z y do z. Nyní si vezmeme jeden nebo dva body, ze kterých vedou úsečky do y a úsečky spojující je s bodem z orientujeme ve směru ze z (tím máme zajištěno spojení mezi těmito body a z a mezi y a z. Ostatní vrcholy rozdělíme do dvojic, pro každou dvojici x_1, x_2, uděláme následující: je-li úsečka x_1x_2 orientována $x_1 \to x_2$ (to můžeme bez újmy na obecnosti předpokládat), zorientujeme úsečky $z \to x_1$, $x_2 \to z$, tím máme zaručeno spojení mezi x_1, x_2 a z. Spojení mezi původními body je zaručeno z indukčního předpokladu.

2. ÚLOHA

Součin zlomků je jistě roven 1, tedy i jeho n-tá odmocnina, dle AG nerovnosti je jejich aritmetický průměr větší nebo roven 1, přenásobením n získáme požadované.

3. ÚLOHA

Pro $p = 3$ tvrzení jistě platí. Provedeme indukční krok (dokazujeme jen pro lichá čísla): dle indukčního předpokladu platí

$$\sqrt{p+2} = \sqrt{p}\frac{\sqrt{p+2}}{\sqrt{p}} < \frac{2 \cdot \ldots \cdot (p-1)}{3 \cdot \ldots \cdot (p-2)} \frac{\sqrt{p+2}}{\sqrt{p}} \ ,$$

my potřebujeme dokázat

$$\sqrt{p+2} < \frac{2 \cdot \ldots \cdot (p-1) \cdot (p+1)}{3 \cdot \ldots \cdot (p-2) \cdot p} \ ,$$

stačí tedy dokázat

$$\frac{\sqrt{p+2}}{\sqrt{p}} < \frac{p+1}{p},$$

k čemuž stačí umocnit nerovnost na druhou a levou stranu rozšířit p. Pro p sudá je zřejmě podíl číslo menší než jedna a nerovnost tedy neplatí pro žádné p sudé.

4. ÚLOHA

Tvrzení dokážeme matematickou indukcí podle n. Nejprve však výraz upravíme na vhodnější tvar:

$$\frac{x^n(z-y) + y^n(x-z) + z^n(y-x)}{(x-y)(y-z)(z-y)}.$$

Pro $n = 1$ tvrzení zřejmě platí, neboť výraz je roven nule. Nyní provedeme indukční krok. Čitatel výrazu s $n+1$ upravujeme:

$$
\begin{aligned}
&x \cdot x^n(z-y) + y \cdot y^n(x-z) + z \cdot z^n(y-x) = \\
&\quad = y[x^n(z-y) + y^n(x-z) + z^n(y-x)] + (z-y)z^n(y-x) + (x-y)x^n(z-y) = \\
&\qquad = y[x^n(z-y) + y^n(x-z) + z^n(y-x)] + (x-y)(z-y)(x^n - z^n)\,.
\end{aligned}
$$

Uvědomíme-li si, že první sčítanec je dělitelný jmenovatelem dle indukčního předpokladu a druhý využitím vzorce pro rozdíl n-tých mocnin, máme dokázán indukční krok a tím i celé tvrzení.

5. ÚLOHA

Pro $n \le 7$ nerovnost platí, pro $n = 8$ neplatí. Dokážeme dále indukcí, že pro žádná další čísla už neplatí.

$$
3^n(n+1) = 3 \cdot 3^{n-1} \cdot n + 3 \cdot 3^{n-1} < 3 \cdot 4^{n-1} + 3 \cdot 4^{n-1}\frac{1}{n} = 4^{n-1} \cdot 3\left(1 + \frac{1}{n}\right) < 4^n \ ,
$$

kde první nerovnost plyne z indukčního předpokladu a druhá z toho, že $n > 3$.