3. série
Rovnosti a nerovnosti

1. ÚLOHA
Pro dané přirozené číslo n řešte soustavu n rovnic o n neznámých

$$\begin{aligned} 1 &= \binom{1}{1}x_1 \\ 3 &= \binom{2}{1}x_1 + \binom{2}{2}x_2 \\ &\dots \\ 3^{n-1} &= \binom{n}{1}x_1 + \binom{n}{2}x_2 + \dots + \binom{n}{n}x_n \end{aligned} .$$

2. ÚLOHA
Dokažte, že pro každé přirozené číslo n platí

$$\binom{n+1}{2}1 + \binom{n}{2}2 + \binom{n-1}{2}3 + \dots + \binom{2}{2}n = \binom{n+3}{4}.$$

3. ÚLOHA
Dokažte, že pro nezáporná čísla $a_1, a_2, \dots, a_n$ a přirozené číslo p platí

(a)

$$\frac{a_1 + a_2 + a_3}{3} \geq (a_1 a_2 a_3)^{\frac{1}{3}}$$

(b)

$$\left(\frac{a_1^p + a_2^p + \dots + a_n^p}{n}\right)^{\frac{1}{p}} \geq (a_1 a_2 \dots a_n)^{\frac{1}{n}}.$$

4. ÚLOHA
Dokažte, že pro nezáporná reálná čísla x, y a přirozená čísla p, q $(p \geq q)$ platí

$$\left(\frac{x^p + y^p}{2}\right)^{\frac{1}{p}} \geq \left(\frac{x^q + y^q}{2}\right)^{\frac{1}{q}}.$$

5. ÚLOHA
Řešte rovnici $(a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3)^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$, kde a_1, a_2, a_3 jsou parametry, pro které platí $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = 1$.

Řešení 3. série

1. ÚLOHA

Z tvaru soustavy je okamžitě vidět, že má právě jedno řešení. Stačí tedy jedno řešení odhadnout a dokázat že soustavu opravdu řeší. Takovým řešením je $x_i = \frac{1}{3}\left(2^i - (-1)^i\right)$. Po dosazení a rozšíření soustavy třemi, teď vypadá k-tý řádek takto:

$$3^k = 3 \cdot 3^{k-1} = \binom{k}{1}(2-(-1)) + \binom{k}{2}\left(2^2 - (-1)^2\right) + \cdots + \binom{k}{k}\left(2^k - (-1)^k\right) =$$

$$= 1 + \binom{k}{1}2 + \binom{k}{2}2^2 + \cdots + \binom{k}{k}2^k - 1 - \binom{k}{1}(-1) - \binom{k}{2}(-1)^2 - \cdots + \binom{k}{k}(-1)^k =$$

$$= (1+2)^k - (1-1)^k$$

Pokud někoho zajímá, jak jsme k tomuto řešení došli, uvádíme, že jsme od soustavy rozšířené třemi odečetli binomické rozvoje $(1+2)^k$ a ve výsledku nalezli binomický rozvoj $(1-1)^k$.

2. ÚLOHA

Využijeme identity $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$. Protože $\binom{2}{2} = \binom{3}{3}$, je

$$\binom{2}{2} + \binom{3}{2} + \binom{4}{2} + \cdots + \binom{k}{2} = \binom{3}{3} + \binom{3}{2} + \binom{4}{2} + \cdots + \binom{k}{2} =$$

$$= \binom{4}{3} + \binom{4}{2} + \cdots + \binom{k}{2} = \binom{5}{3} + \cdots + \binom{k}{2} = \cdots = \binom{k+1}{3}$$

Můžeme psát

$$\sum_{k=1}^{n} (n+1-k) \cdot \binom{k+1}{2} = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{j} \binom{k+1}{2} .$$

Součet vnitřní sumy je dle předchozího $\binom{j+2}{3}$ a součet vnější tedy (použitím stejné identity) $\binom{n+3}{4}$.

3. ÚLOHA

Část (a) je zřejmě speciálním případem (b). Využijeme Jensenovy nerovnosti, která říká: Je-li $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ konvexní, pak pro libovolná $x_1, \ldots, x_n$ platí

$$f\left(\frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}\right) \leq \frac{f(x_1) + \cdots + f(x_n)}{n} ,$$

pro f konkávní platí obrácená nerovnost (toto tvrzení se dá poměrně snadno dokázat indukcí).

Vezmeme nejprve za funkci f p-tou mocninu, dostáváme

$$\left(\frac{(a_1)^p + \cdots + (a_n)^p}{n}\right)^{\frac{1}{p}} \geq \left(\left(\frac{a_1 + \cdots + a_n}{n}\right)^p\right)^{\frac{1}{p}} ,$$

potom vezmeme za funkci f logaritmus

$$\frac{1}{n}\log\left(a_1 \cdot \ldots \cdot a_n\right) = \frac{\log a_1 + \cdots + \log a_n}{n} \leq \log\left(\frac{a_1 + \cdots + a_n}{n}\right) ,$$

z čehož plyne dokazovaná nerovnost.

4. Úloha

Využijeme Jensenovy nerovnosti podobně jako v minulé úloze, za funkci f vezmeme

$$f(x) = x^{\frac{p}{q}} ,$$

což je pro $p \geq q$ konvexní funkce. Pak platí

$$\left(\frac{x^q + y^q}{2}\right)^{\frac{p}{q}} \leq \frac{(x^q)^{\frac{p}{q}} + (y^q)^{\frac{p}{q}}}{2} ,$$

což je přesně to, co jsme potřebovali.

5. Úloha

Platí

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = \left(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2\right)\left(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2\right) .$$

Rozepsáním a využitím nerovnosti

$$x_1^2 a_2^2 + x_2^2 a_1^2 \geq 2a_1 a_2 x_1 x_2 \tag{1}$$

dostáváme, že pravá strana zadané rovnice je větší nebo rovna levé, přičemž rovnost zřejmě nastává, právě když nastane rovnost v nerovnosti (1) (pro všechny dvojice proměnných), tj. $a_1x_2 = a_2x_1$, $a_1x_3 = a_3x_1$ a $a_2x_3 = a_3x_2$, což nastane právě když

$$\frac{x_1}{a_1} = \frac{x_2}{a_2} = \frac{x_3}{a_3} .$$