4. série

Shodná zobrazení

1. ÚLOHA

Mějme rovinu ρ a zobrazení $f : \rho \to \rho$. Potom řekneme, že f je shodné zobrazení, jestliže $\forall A, B \in \rho : \quad |f(A)f(B)| = |AB|$. Dokažte, že každé shodné zobrazení je na, tj. že ke každému bodu $X \in \rho$ existuje bod $Y \in \rho$ takový, že $f(Y) = X$.

2. ÚLOHA

Mějme shodné zobrazení f. Dokažte, že existují osové souměrnosti f_1, f_2, f_3 tak, že $f = f_1 \circ f_2$ nebo $f = f_1 \circ f_2 \circ f_3$. (Jinak řečeno: každé shodné zobrazení lze dostat jako složení nejvýše tří osových souměrností.)

3. ÚLOHA

Mějme body A, B, C, které neleží na jedné přímce. V $\triangle ABC$ mějme bod X. Potom platí: Pro každý bod $Y \in \triangle ABC$, jestliže $|AY| \leq |AX|$ a $|BY| \leq |BX|$ a $|CY| \leq |CX|$, pak $X = Y$.

(a) Dokažte.
(b) Platí stejné tvrzení, jestliže vynecháme předpoklad $Y \in \triangle ABC$? Dokažte.
(c) Platí tvrzení, jestliže v (b) vynecháme ještě předpoklad $X \in \triangle ABC$?
(d) Předpokládejme, že A, B, C leží v jedné přímce. Najděte množinu všech bodů X takových, aby platilo $\forall Y : \ (|AY| \leq |AX| \& |BY| \leq |BX| \& |CY| \leq |CX|) \Rightarrow X = Y$
(e) Jsou dané body $A_1, A_2, \ldots, A_7$. Najděte množinu všech bodů X, pro které platí $\forall Y, \forall i \in \{1, 2 \ldots, 7\} \, |A_iY| = |A_iX| \Rightarrow X = Y$.

4. ÚLOHA

Každý bod roviny je obarven jednou ze tří barev. Dokažte, že pro každé kladné d existuje dvojice stejně obarvených bodů o vzdálenosti d.

Řešení 4. série

1. ÚLOHA

Mějme libovolný bod $X \in \rho$. Vezměme bod A a jeho obraz $f(A)$. Je-li $f(A) = X$, je $Y = A$. V opačném případě sestrojme kružnici $k_1(A, |Xf(A)|)$, která se zobrazí do kružnice $k_1'(f(A), |Xf(A)|)$. Vezměme libovolný bod $B \in k_1$ a jeho obraz $f(B) \in k_1'$. Je-li $f(B) = X$, je opět $Y = B$, jinak sestrojme kružnici $k_2(B, |Xf(B)|)$, která se zobrazí do kružnice $k_2'(f(B), |Xf(B)|)$. Dále rozlišíme dva případy:

V případě $|Xf(B)| = 2|Xf(A)|$ se kružnice k_1, k_2 protnou v právě jednom bodě, označme jej Y. Kružnice k_1', k_2' se protnou také v právě jednom bodě a to v bodě X. Bod Y se tedy musí zobrazit do bodu X.

Pokud $|Xf(B)| < 2|Xf(A)|$, pak se kružnice k_1, k_2 protnou právě ve dvou bodech Y, Y'. Kružnice k_1', k_2' se protnou také právě ve dvou bodech, jedním z nich je X, druhý označme X'. Body Y, Y' se nutně zobrazí do bodů X, X' tzn. (f je prosté), že buď Y nebo Y' se zobrazí do bodu X.

2. ÚLOHA

Uvažme, že shodné zobrazení f je jednoznačně dáno dvojicí trojúhelníků — vzorem a jeho obrazem. Zkoumejme všechny polohy shodných trojúhelníků ABC a KLM, kde $K = f(A), L = f(B), M = f(C)$.

(a) Trojúhelníky mají aspoň jeden společný vrchol. Nechť tedy např. $A = K$. Pokud $\triangle ABC$ lze otočit na $\triangle KLM$, tak užijeme faktu, že každé otočení lze složit z právě dvou osových souměrností. Pokud $\triangle ABC$ takto otočit nelze (tj. trojúhelníky jsou nepřímo shodné), potom položme $f = f_o \circ (f_o \circ f_o)$, kde f_o je osová souměrnost podle osy úhlu LKB.

(b) Trojúhelníky nemají žádný společný vrchol. Převedeme na předchozí případ tak, že $\triangle ABC$ zobrazíme v osové souměrnosti podle osy úsečky AK do $\triangle A'B'C'$. Výsledné zobrazení potom složíme s touto osovou souměrností, kde ve druhém případě bereme $f = f_o$.

3. ÚLOHA

Hledejme množinu

$$M = \left\{ X \in \rho | \forall Y : \bigwedge_{i=1}^{n} |A_i Y| \leq |A_i X| \Rightarrow X = Y \right\}.$$

Označme N konvexní obal množiny $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ (N je průnik všech polorovin, ve kterých leží všechny body $A_1, A_2, \ldots, A_n$). Chceme dokázat $M = N$. Nejprve uveďme lemma, které snad není potřeba dokazovat:

Lemma 1. Mějme bod A a dva různé body X, Y. Označme o osu úsečky XY, potom $|AX| \leq |AY|$ právě když A leží v polorovině určené osou o a bodem X (označme ji oX).

Lemma 2. Platí

$$\forall X, Y : \bigwedge_{i=1}^{n} (|A_iY| \leq |A_iX|) \Rightarrow d(N, X) \geq \frac{|XY|}{2},$$

kde $d(N, X)$ je vzdálenost bodu X od množiny N, která se definuje jako $\min\{|ZX| : Z \in N\}$ (obecněji jako $\inf\{|ZX| : Z \in N\}$).

Důkaz: Je-li $X = Y$, je tvrzení zřejmé. Pokud $X \neq Y$, označme o osu úsečky XY. Potom dle lemmatu 1 je $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\} \subset oY$ a z toho plyne, že $d(N, X) \geq d(oY, X) = \frac{1}{2}|XY|$.

Důsledkem lemmatu 2 je, že $N \subseteq M$ (Kdyby bylo $X \in N$ a $X \notin M$, je $d(N, X) > 0$, což je spor.) Naopak dokážeme, že $M \subseteq N$. Mějme $X \notin N$ tzn., že existuje přímka p taková, že v jedné z polorovin jí danými leží všechny body $A_1, A_2, \ldots, A_n$ a neleží bod X. Zobrazme bod X v osové souměrnosti podle p do bodu X', který je různý od X. Podle lemmatu 1 ale platí

$$\bigwedge_{i=1}^{n} |A_iX'| \leq |A_iX|$$

tedy $X \notin M$. Z toho, co jsme dokázali, plynou body (a), (b), (c), (d) i (e) úlohy 3.

4. ÚLOHA

Důkaz provedeme sporem. Nechť existuje takové kladné d, pro které tvrzení neplatí. Vezměme libovolný bod X roviny, který je obarvený barvou A. Každý bod kružnice k_1 se středem v X a poloměrem d je obarven barvou B nebo C. Body kružnice k_2 se středem v X a poloměrem $\sqrt{3} \cdot d$ musí být obarveny barvou A. Kdyby totiž nějaký bod X' kružnice k_2 nebyl obarven barvou A, sestrojili bychom body Y, Z jako průniky osy úsečky XX' a kružnice k_1. Protože X, Y, Z tvoří rovnostranný trojúhelník o straně d musí mít Y a Z barvy B a C, ale jednu z těch barev má i X', což je spor.

Protože $\sqrt{3} \cdot d > \frac{d}{2}$, existují na kružnici k_2 dva body ve vzdálenosti d a to je opět spor.