5. série

Konvexní množiny a funkce

1. ÚLOHA

Vyvraťte nebo dokažte:

(a) Součet dvou konvexních funkcí je konvexní funkce.
(b) Součin dvou konvexních funkcí je konvexní funkce.

2. ÚLOHA

Vyvraťte nebo dokažte:

(a) Průnik konvexních množin je konvexní množina.
(b) Sjednocení dvou konvexních množin je konvexní množina.
(c) Mějme konvexní množiny $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \cdots \subseteq A_n \subseteq \dots$. Potom sjednocení těchto množin je konvexní množina.

3. ÚLOHA

Zaveďme operaci sčítání konvexních množin: $A+B$ označme nejmenší konvexní množinu obsahující sjednocení množin A, B. Vyvraťte nebo dokažte následující tvrzení: Pro každé tři konvexní množiny A, B, C platí

(a) $(A+B) \cap C \subseteq (A \cap B) + (B \cap C)$
(b) $(A+B) \cap C \supseteq (A \cap B) + (B \cap C)$
(c) $(A \cap B) + C \subseteq (A+B) \cap (B+C)$
(d) $(A \cap B) + C \supseteq (A+B) \cap (B+C)$.

4. ÚLOHA

Mějme funkci f definovanou na všech reálných číslech vyhovující podmínkám

(1) $f(x) = -x$ pro $x \leq 0$
(2) $f(x) = x - 1$ pro $x \geq 1$
(3) f je konvexní na celém definičním oboru.

Potom existuje reálné číslo c, že pro všechna reálná x je $f(x) \geq c$ (neboli f je zdola omezená). Dokažte.

5. ÚLOHA

Pro funkci f ze 4.úlohy dokažte, že pro každá dvě různá reálná čísla x, y platí

$$-1 \leq \frac{f(x) - f(y)}{x - y} \leq 1.$$

Řešení 5. série

1. ÚLOHA

(a) Nechť funkce f_1 je definována na $D(f_1)$ a funkce f_2 na $D(f_2)$. Definujme funkci $f = f_1 + f_2$ na $D(f) = D(f_1) \cap D(f_2)$. Potom pro všechna x_1, x_2, x_3 z $D(f)$ taková, že $x_1 < x_2 < x_3$, platí (z definice konvexní funkce)

$$f_1(x_2) \leq \frac{f_1(x_1) - f_1(x_3)}{x_1 - x_3}(x_2 - x_1) + f_1(x_1)$$
$$f_2(x_2) \leq \frac{f_2(x_1) - f_2(x_3)}{x_1 - x_3}(x_2 - x_1) + f_2(x_1)\,.$$

Sečtením těchto dvou nerovností dostáváme

$$f(x_2) \leq \frac{f(x_1) - f(x_3)}{x_1 - x_3}(x_2 - x_1) + f(x_1)\,,$$

tedy i funkce f je konvexní.

(b) Tvrzení snadno vyvrátíme protipříkladem, položme $f_1(x) = x^2$ a $f_2(x) = -1$ (pro x reálné). Protože pro $x_1 < x_2 < x_3$ platí $x_1 + x_2 \leq x_2 + x_3$, tedy $x_2^2 - x_1^2 \leq (x_1 - x_3)(x_2 - x_1)$, z čehož

$$x_2^2 \leq \frac{x_1^2 - x_3^2}{x_1 - x_3}(x_2 - x_1) + x_1^2\,,$$

je f_1 konvexní, f_2 je také zcela jistě konvexní. Ale funkce $f(x) = f_1(x)f_2(x) = -x^2$ není konvexní na $\mathbb{R}$, protože by např. muselo platit

$$0 = f(0) \leq \frac{f(-1) - f(1)}{-1 - 1}(0 - 1) + f(-1) = -1\,.$$

2. ÚLOHA

(a) Nechť A, B jsou konvexní. Jsou-li $X, Y \in A \cap B$, potom úsečka XY je podmnožinou A (z konvexity A) a zároveň je podmnožinou B (z konvexity B), tedy je i částí $A \cap B$ a množina $A \cap B$ je konvexní.

(b) Jednobodová množina je zřejmě konvexní, ale sjednocení dvou různých jednobodových množin není konvexní, takže tvrzení neplatí.

(c) Patří-li body X, Y do nekonečného sjednocení, musí existovat indexy $i, j \in \mathbb{N}$, že $X \in A_i$ a $Y \in A_j$. Protože $A_i \subseteq A_{i+j}$ a $A_j \subseteq A_{i+j}$, jsou X, Y prvky A_{i+j}, což je konvexní množina, tedy i úsečka XY leží v A_{i+j} a tedy leží i v nekonečném sjednocení. Odtud dostáváme požadované tvrzení.

3. Úloha

(a) Položme $A = \{X\}, B = \{Y\}, C = \{Z\}$, kde X, Y, Z jsou navzájem různé body takové, že $Z \in XY$. Potom $(A + B) \cap C = \{Z\}$ a $(A \cap C) + (B \cap C) = \emptyset$, tedy tvrzení neplatí.

(b) Dokážeme platnost uvedeného vztahu. Zřejmě $(A \cap C) \subseteq A, C$ a $(B \cap C) \subseteq B, C$. Z definice součtu dvou množin a z konvexity množin A, B, C plyne $(A \cap C) + (B \cap C) \subseteq C$ a $(A \cap C) + (B \cap C) \subseteq A + B$, což je ekvivalentní s dokazovanou inkluzí.

(c) Tvrzení opět platí. Zřejmě $(A \cap B) \subseteq A, B$, tedy $(A \cap B) + C \subseteq A + C$ a zároveň $(A \cap B) + C \subseteq B + C$, což je ekvivalentní s $(A \cap B) + C \subseteq (A + C) \cap (B + C)$.

(d) Vezměme množiny $A' = A, B' = C, C' = B$, kde A, B, C jsou množiny definované v důkazu části (a). Potom $(A' \cap B') + C' = \{Y\}$, ale $(A' + C') \cap (B' + C') = YZ$, čímž jsme tvrzení vyvrátili.

4. Úloha

Podle definice konvexní funkce musí platit

$$\forall x, y, z \in D(f): \quad x < y < z \Rightarrow \frac{f(x) - f(y)}{x - y} \le \frac{f(y) - f(z)}{y - z}.$$

Položme $x = -1, y = 0$. Potom pro $z > 0$ platí

$$\frac{1 - 0}{-1 - 0} \le \frac{0 - f(z)}{0 - z},$$

tj. $f(z) \ge -z$. Podle definice funkce je f na množině $(-\infty, 0\rangle \cup \langle 1, \infty)$ nezáporná a na intervalu $(0, 1)$ je větší než funkce $g(z) = -z$. Tedy $f(x) \ge -1$ pro všechna x reálná.

5. Úloha

Lemma 1. Pro každou konvexní funkci f platí:

$$\forall x_1, x_2, x_3 \in D(f): \quad x_1 < x_2 < x_3 \Rightarrow f(x_1) \ge \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}(x_1 - x_2) + f(x_2) =$$

$$= \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}(x_1 - x_3) + f(x_3).$$

Důkaz: Předpokládejme pro spor, že existují $x_1 < x_2 < x_3$, pro která platí

$$f(x_1) < \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}(x_1 - x_2) + f(x_2),$$

z definice konvexní funkce ale plyne, že

$$f(x_2) \le \frac{f(x_1) - f(x_3)}{x_1 - x_3}(x_2 - x_1) + f(x_1).$$

Sečtením obou nerovností a vydělením $(x_1 - x_2)$ a vynásobením $(x_2 - x_3)$ resp. naopak dostáváme

$$f(x_2) > \frac{f(x_1) - f(x_3)}{x_1 - x_3}(x_2 - x_3) + f(x_3) = \frac{f(x_1) - f(x_3)}{x_1 - x_3}(x_2 - x_1) + f(x_1)\,,$$

což je spor s konvexitou funkce f.

Lemma 2. Nechť f je konvexní funkce a $x \in D(f)$. Označme

$$g_x(y) = \frac{f(y) - f(x)}{y - x}$$

pro $x \neq y$, $y \in D(f)$. Potom platí: $y_1, y_2 \in D(f)$, $y_1 \neq x \neq y_2$, $y_1 < y_2 \Rightarrow g_x(y_1) \leq g_x(y_2)$.[1]

Důkaz: Mohou nastat tři případy.

(1) $y_1 < y_2 < x$: Protože funkce f je konvexní, platí

$$\frac{f(y_1) - f(y_2)}{y_1 - y_2} \leq \frac{f(y_1) - f(x)}{y_1 - x} \leq \frac{f(y_2) - f(x)}{y_2 - x}\,,$$

což jest $g_{y_1}(y_2) \leq g_x(y_1) \leq g_x(y_2)$.

(2) $y_1 < x < y_2$: Stejným způsobem dostaneme $g_x(y_2) \leq g_{y_1}(y_2) \leq g_x(y_2)$.

(3) $x < y_1 < y_2$: Potom $g_x(y_1) \leq g_x(y_2) \leq g_{y_1}(y_2)$. Tím je lemma dokázáno.

Nyní již tvrzení snadno dokážeme sporem.

(1) Předpokládejme existenci x, y, že $g_x(y) > 1$. Vezměme různá čísla $r > \max(1, x)$, $s > \max(1, y)$. Podle lemmatu 2 a připojené poznámky platí $g_r(s) \geq g_x(y) > 1$, ale protože $r \neq s > 1$, je $g_r(s) = ((r-1) - (s-1))/(r-s) = 1$, což není možné.

(2) Předpokládejme existenci x, y, že $g_x(y) < -1$. Vezměme různá čísla $r < \min(0, x)$, $s < \min(0, y)$, potom $g_r(s) \leq g_x(y) < -1$, zatímco $g_r(s) = -1$, čímž je důkaz ukončen.

[1] Zřejmě $g_x(y) = g_y(x)$, tedy i $g_{y_1}(x) \leq g_{y_2}(x)$