Povídání ke čtvrté sérii

Ve čtvrté sérii můžeš s úspěchem použít několik známých nerovností. Pro rozšíření obzorů méně zkušených řešitelů a pro připomenutí těm zkušenějším je zde uvádíme. Všechny uvedené nerovnosti můžeš ve svých řešeních používat bez důkazu.

Upozornění: Tyto nerovnosti lze použít častěji, než se zdá.

Mnoho dalšího o nerovnostech se dozvíš v knížečce *Nerovnosti a odhady, edice Škola mladých matematiků, svazek číslo 39.*

Nechť $x_1, \dots, x_n$ jsou kladná reálná čísla (n je libovolné přirozené číslo). Pak platí nerovnosti

$$\min\{x_i\} \leq \sqrt[n]{x_1 \cdots x_n} \leq \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n} \leq \sqrt{\frac{x_1^2 + \cdots + x_n^2}{n}} \leq \max\{x_i\}\,.$$

Přitom rovnost v každé z těchto nerovností nastává právě tehdy, když $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$. Druhá z těchto nerovností je tzv. nerovnost mezi aritmetickým a geometrickým průměrem (zkráceně *AG-nerovnost*), třetí nerovnost mezi aritmetickým a kvadratickým průměrem (*AK-nerovnost*).

Nechť $a_1, \dots, a_n, b_1 \dots, b_n$ jsou reálná čísla. Pak platí tzv. *Cauchy–Schwarzova nerovnost*:

$$(a_1 b_1 + \cdots + a_n b_n)^2 \leq (a_1^2 + \cdots + a_n^2) \cdot (b_1^2 + \cdots + b_n^2)\,.$$

Přitom rovnost nastává právě tehdy, když existuje c reálné tak, že pro všechna i je $a_i = cb_i$ nebo pro všechna i je $b_i = ca_i$. (Vektory $(a_1, \dots, a_n)$ a $(b_1, \dots, b_n)$ jsou lineárně závislé, pokud ses již s tímto pojmem setkal ...)

Nechť $a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n$ a $b_1 \leq b_2 \leq \cdots \leq b_n$ jsou reálná čísla. Pak platí tzv. *Čebyševova nerovnost*

$$a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \cdots + a_n b_1 \leq \frac{1}{n}(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)(b_1 + b_2 + \cdots + b_n) \leq a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n\,.$$

Rovnost nastává právě tehdy, když $a_1 = \cdots = a_n$ nebo $b_1 = \cdots = b_n$.

4. série

Téma:	Nerovnosti
Termín odeslání:	8. LEDNA 2001

1. ÚLOHA (3 BODY)

Máme reálné kladné číslo a. Je větší $a^2 + a$ nebo $\sqrt{4a^3}$?

2. ÚLOHA (3 BODY)

Nechť a, b jsou reálná čísla taková, že ab a $a+b$ jsou nenulová čísla mající stejné znaménko. Dokažte, že pak platí

$$(a+b)(a^4+b^4) \geq (a^2+b^2)(a^3+b^3).$$

3. ÚLOHA (3 BODY)

Nechť pro reálná čísla x, y, z platí $x^2+y^2+z^2+2xyz=1$. Dokažte, že pak

$$x^2+y^2+z^2 \geq 3/4.$$

4. ÚLOHA (5 BODŮ)

Nechť y, z jsou reálná čísla. Dokažte, že pokud $(x+y+z)^2 > 1+x$ pro všechna reálná x, pak $y+z>1$.

5. ÚLOHA (5 BODŮ)

Nechť $a,\ b,\ c$ jsou strany trojúhelníka. Dokažte, že pak platí

$$\frac{a}{b+c-a} + \frac{b}{a+c-b} + \frac{c}{a+b-c} \geq 3.$$

6. ÚLOHA (5 BODŮ)

Nechť $a, b, c > 0$. Dokažte, že pak platí

$$abc(a+b+c) \leq a^3b + b^3c + c^3a.$$

7. ÚLOHA (5 BODŮ)

Nechť $0 \leq a, b, c \leq 1$. Dokažte, že pak platí

$$\frac{a}{1+bc} + \frac{b}{1+ac} + \frac{c}{1+ab} \leq 2.$$

8. ÚLOHA (5 BODŮ)

V závislosti na přirozeném čísle n zjistěte, které z následujících čísel je větší:

$$2^{3^{\cdots^{n}}}, \qquad n^{(n-1)^{\cdots^{2}}}.$$

Uzávorkování v patrových mocninách se řídí podle konvence $a^{b^c} = a^{(b^c)}$.

Řešení 4. série

1. úloha
Máme reálné kladné číslo a. Je větší $a^2 + a$ nebo $\sqrt{4a^3}$?

Nechť a je kladné reálné číslo. Jelikož druhá mocnina libovolného reálného čísla je nezáporná, platí

$$(a^2 - a)^2 \geq 0, \text{ tedy po roznásobení: } a^4 - 2a^3 + a^2 \geq 0.$$

Přičteme-li k oběma stranám poslední nerovnosti číslo $4a^3$, dostaneme

$$a^4 + 2a^3 + a^2 \geq 4a^3, \quad \text{tj. po úpravě } (a^2 + a)^2 \geq 4a^3.$$

Jelikož a je dle předpokladu kladné reálné číslo, můžeme poslední nerovnost odmocnit a dostáváme, že pro libovolné $a \in (0, \infty)$ je číslo $a^2 + a$ větší nebo rovno číslu $\sqrt{4a^3}$. Dále je z postupu vidět, že rovnost nastane právě tehdy, když $(a^2 - a) = 0$, tedy $a^2 = a$, což nastane jen pro $a = 1$.

Poznámky opravovatele: Vymysleli ste štyry rôzne správne postupy na vyriešenie úlohy. A okrem dvoch mali všetky riešenia správnu ideu, chyby sa dajú zhrnúť jediným slovom: „podmienky". Chýbali všade od AG nerovnosti až po úpravy nerovníc. Úložka bola ľahká, takže $+i$ si odniesli tí, ktorí ju napísali pekne a stručne.

2. úloha
Nechť a, b jsou reálná čísla taková, že ab a $a + b$ jsou nenulová čísla mající stejné znaménko. Dokažte, že pak platí

$$(a + b)(a^4 + b^4) \geq (a^2 + b^2)(a^3 + b^3).$$

Nerovnost převedeme ekvivalentními úpravami na tvar, ve kterém bude jednodušší ji ověřit. Nejdříve upravíme pravou stranu:

$$(a^2 + b^2)(a^3 + b^3) = (a^2 + b^2)(a + b)(a^2 - ab + b^2) =$$

$$= (a + b)(a^4 + b^4 + 2a^2b^2 - a^3b - ab^3) = (a + b)(a^4 + b^4 - ab(a - b)^2).$$

Naše nerovnost je tedy ekvivalentní nerovnosti

$$(a + b)(a^4 + b^4) \geq (a + b)(a^4 + b^4) - (a + b)ab(a - b)^2$$

a tedy i nerovnosti

$$(a + b)ab(a - b)^2 \geq 0.$$

Vzhledem k tomu, že ab a $a+b$ mají dle zadání stejné znaménko, tato nerovnost platí a tedy platí i nerovnost zadaná. Rovnost nastává právě tehdy, když $a = b$.

Poznámky opravovatele: Za naprostou většinu chyb mohlo nepozorné čtení zadání. Chválím (a $+i$ jsem hodnotil) ty, kteří si uvědomili, že nestačí jen tak upravovat nějakou rovnost či nerovnost a dostat něco, co evidentně platí. Neboť z toho, že z tvrzení A plyne pravda, nelze vyvodit, že tvrzení A je pravdivé (např. $-1 \neq 1$, ale umocněte obě strany na druhou a dostanete pravdivé tvrzení).

3. úloha

Nechť pro reálná čísla x, y, z platí $x^2 + y^2 + z^2 + 2xyz = 1$. Dokažte, že pak

$$x^2 + y^2 + z^2 \geq 3/4.$$

Pro spor předpokládejme, že $x^2 + y^2 + z^2 < 3/4$. Pak je ovšem $2xyz > 1 - 3/4 = 1/4$, tedy $xyz > 1/8$. Avšak podle nerovnosti mezi kvadratickým a geometrickým průměrem je

$$1/2 < \sqrt[3]{xyz} \leq \sqrt{\frac{x^2 + y^2 + z^2}{3}} < \sqrt{\frac{1}{4}} = 1/2.$$

Dostali jsme, že $1/2 < 1/2$, což jistě neplatí. To znamená, že náš předpoklad $x^2+y^2+z^2 < 3/4$ nebyl správný. Jinými slovy, právě jsme sporem dokázali, že $x^2 + y^2 + z^2 \geq 3/4$.

Poznámky opravovatele: Na to, že táto úloha bola pomerne ľahká, ste v nej urobili pomerne dosť chýb. Predovšetkým nerovnosti medzi priemermi sa vždy používajú pre kladné čísla a ak pre záporné platí nerovnosť triviálne, tak to treba napísať. Ďalšou závažnou chybou bolo to, že z predpokladu platnosti dokazovanej nerovnosti, niektorí dokázali známu nerovnosť medzi kvadratickým a geometrickým priemerom a prehlásili, že dokazovaná nerovnosť práve preto musí platiť. To nie je pravda, ak si vezmete dĺžky strán trojuholníka, tak zistíte, že takéto tri kladné čísla spĺňajú trojuholníkovú nerovnosť, ale ľubovolné tri kladné čísla túto vlastnosť nemajú, preto takýto postup nie je korektný a mali ste dokázať presne opačnú implikáciu, t.j., ak $K \geq G$, potom platí dokazovaná nerovnosť.

4. úloha

Nechť y, z jsou reálná čísla. Dokažte, že pokud $(x + y + z)^2 > 1 + x$ pro všechna reálná x, pak $y + z > 1$.

Nerovnost $(x + y + z) > 1 + x$ platí pro všechna x, tedy i pro $x = -(y + z)$, což nám dává $0 > 1 - (y + z)$, což je po triviální úpravě to, co jsme chtěli.

Poznámka: Mírně rafinovanějším postupem lze dokázat dokonce nerovnost $y + z > \frac{5}{4}$, více se Ti už ale nepodaří.

5. úloha

Nechť $a,\ b,\ c$ jsou strany trojúhelníka. Dokažte, že pak platí

$$\frac{a}{b+c-a}+\frac{b}{a+c-b}+\frac{c}{a+b-c}\geq 3.$$

Povšimněme si následujícího užitečného faktu (jak si laskavý čtenář rozmyslí, plyne snadno z trojúhelníkové nerovnosti):

Reálná čísla $a,\ b,\ c$ jsou strany nějakého trojúhelníka právě tehdy, když existují kladná reálná čísla $x,\ y,\ z$ tak, že $a=x+y,\ b=y+z,\ c=z+x$.

Můžeme tedy položit $a=x+y,\ b=y+z,\ c=z+x$. Chceme dokázat, že

$$\frac{x+y}{2z}+\frac{y+z}{2x}+\frac{z+x}{2y}\geq 3\ .$$

To je ovšem snadné, když si vzpomeneme na nerovnost $t+1/t\geq 2$, která platí pro všechna kladná reálná t (laskavý čtenář si ji snadno dokáže např. pomocí AG nerovnosti). Použijeme ji pro $t=x/z$, $t=y/x$ a $t=z/y$, sečteme a důkaz je hotov.

Poznámky opravovatele: Řešení měla správně většina řešitelů. Cest k cíli bylo několik. Bylo možné použít (a také řešitelé použili) známé nerovnosti mezi průměrem aritmetickým a harmonickým, aritmetickým a geometrickým, Čebyševovy nerovnosti, nerovnosti $x+1/x\geq 2$. Když se tyto metody použijí správně, vedou k elegantnímu řešení na několik řádek. Mnozí však nehledali elegantní řešení a stačilo jim vynásobit nerovnici součinem jmenovatelů a po velmi dlouhých a pracných úpravách se někteří dostali ke správnému konci. Množství provedených úprav se dalo redukovat a podle míry této redukce jsem odečítal jeden až dva imaginární body.

6. úloha

Nechť $a,b,c>0$. Dokažte, že pak platí

$$abc(a+b+c)\leq a^3b+b^3c+c^3a.$$

Nerovnost vydělme abc. Dostáváme ekvivalentní nerovnost

$$a+b+c\leq\frac{a^2}{c}+\frac{b^2}{a}+\frac{c^2}{b}\ .$$

Tu snadno dokážeme pomocí Čebyševovy nerovnosti. Posloupnosti $a^2,\ b^2,\ c^2$ a $1/a,\ 1/b,\ 1/c$ jsou opačně uspořádány, tj. jejich „skalární součin“ $a^2\frac{1}{a}+b^2\frac{1}{b}+c^2\frac{1}{c}=a+b+c$ je nejmenší ze všech součinů po přeuspořádání, tj. je i menší nebo roven součinu $a^2\frac{1}{c}+b^2\frac{1}{a}+c^2\frac{1}{b}$.

Zde jsme využili **Čebyševovu nerovnost** v silnější podobě, než byla uvedena v úvodu k této sérii. Mějme reálná čísla $a_1 \le a_2 \le \cdots \le a_n$ a $b_1, b_2, \ldots, b_n$. Jako $c_1, c_2, \ldots, c_n$ si označíme nějak zpřeházená čísla $b_1, b_2, \ldots, b_n$. Potom součin

$$a_1c_1 + a_2c_2 + \cdots + a_nc_n \tag{$*$}$$

je největší, pokud $c_1 \le c_2 \le \cdots \le c_n$, a nejmenší, pokud $c_1 \ge c_2 \ge \cdots \ge c_n$. Tato nerovnost formálně zapsána vypadá možná komplikovaně, ve skutečnosti ji zná každé malé dítě: Představme si, že můžeme dostat a tisícikorun, b stokorun a c desetikorun. Přitom a, b, c jsou v nějakém pořadí 1, 2, 3. Každému je jasné, že nejvíce můžeme dostat $3 \cdot 1000 + 2 \cdot 100 + 1 \cdot 10$, nejméně $1 \cdot 1000 + 2 \cdot 100 + 3 \cdot 10$. Formální důkaz není o mnoho těžší, zkuste si o něm popřemýšlet. Vhodnou volbou $c_1, \ldots, c_n$ v $(*)$ dostaneme Čebyševovu nerovnost tak, jak byla uvedena v úvodu k této sérii.

Druhé řešení: Pokud Čebyševově nerovnosti nevěříme, stačí nahlédnout, že

$$ab(a-c)^2 + bc(b-a)^2 + ca(c-b)^2 \ge 0$$

je ekvivalentní zadané nerovnosti.

Poznámky opravovatele: Mnozí řešitelé tvrdili, že nerovnost je symetrická a že tedy mohou předpokládat, že platí $a \le b \le c$. Avšak pravá strana nerovnosti se prohozením dvou proměnných změní! Beze změny zůstane jen po tzv. cyklické záměně (písmeno a nahradíme b, to c a konečně místo c napíšeme a). Můžeme tedy např. předpokládat, že a je nejmenší, ale nemůžeme už zařídit, aby současně bylo c největší. Naštěstí všechny použité metody fungovaly i pro $a \le c \le b$, čili stačilo vyřešit druhou možnost zcela analogicky; proto jsem za tuto chybu strhával jen jeden bod.

Použité metody byly skutečně různorodé (dvě z nich naleznete ve vzorovém řešení). Nejelegantnější řešení (*Ondřej Kreml*, *Patrik Hudec*) bylo asi pomocí AG-nerovnosti dokázat $a^2/c \ge 2a - c$ a sečíst to se dvěma analogickými nerovnostmi.

7. úloha

Nechť $0 \le a, b, c \le 1$. Dokažte, že pak platí

$$\frac{a}{1+bc} + \frac{b}{1+ac} + \frac{c}{1+ab} \le 2.$$

Předpokládejme (bez újmy na obecnosti, protože nerovnost je symetrická), že $a \ge b \ge c$. Pak platí

$$\frac{1}{1+ab} \le \frac{1}{1+ac} \le \frac{1}{1+bc}\ .$$

Přidáme-li triviální nerovnost $a/(1+bc) \le a \le 1$, zjišťujeme, že

$$\frac{a}{1+bc} + \frac{b}{1+ac} + \frac{c}{1+ab} \le 1 + \frac{b+c}{1+bc}\ .$$

Stačí nám tedy dokázat, že $b + c \leq 1 + bc$, neboli $0 \leq (1 - b)(1 - c)$. To zjevně platí, protože $b, c \in \langle 0, 1\rangle$.

Poznámky opravovatele: Čebyševovu nerovnost použila v řešení jen *Alice Mašková*. Ostatní nerovnost dokazovali různými algebraickými úpravami, které však důkaz o mnoho neprodloužily. Poměrně dost řešitelů se snažilo postavit důkaz na vyšetření „okrajových“ či „nejhorších“ případů. O tomto nešvaru už (mimo jiné) psal Robert Šámal v poznámce k 5. úloze 3. série – odkazuji vás na ni.

8. úloha
V závislosti na přirozeném číslu n zjistěte, které z následujících čísel je větší:

$$2^{3^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{n}}}}}, \qquad n^{(n-1)^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{2}}}}}.$$

Uzávorkování v patrových mocninách se řídí podle konvence $a^{b^c} = a^{(b^c)}$.

Výrazy v zadání mají smysl pro $n \geq 2$. Pro $n = 2$ jsou obě čísla stejná. Pro $n = 3$ je větší druhé z čísel. Dokážeme, že pro $n > 3$ je vždy větší první číslo. Důkaz provedeme indukcí podle n. Pro $n = 4$ tvrzení platí, neboť

$$4^{3^2} = \left(2^2\right)^{3^2} = 2^{2\cdot 3^2} < 2^{3\cdot 3^2} = 2^{3^3} < 2^{3^4}.$$

Indukční krok provedeme takto ($n > 4$):

$$n^{(n-1)^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{2}}}}} < n^{2^{3^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{n-1}}}}}} \leq \left(2^{n-1}\right)^{2^{3^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{n-1}}}}}} = 2^{(n-1).2^{3^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{n-1}}}}}} < 2^{2^{3^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{(n-3)^{(n-1)^n}}}}}}} < 2^{3^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{n}}}}}.$$

První nerovnost plyne z indukčního předpokladu. Druhá nerovnost plyne z nerovnosti $n \leq 2^{n-1}$, kde n je přirozené číslo (důkaz je snadné cvičení na matematickou indukci). Čtvrtá nerovnost je zřejmá. Zbývá nahlédnout třetí nerovnost. Uvědomme si nejprve, že pro $a,\ b \geq 2$ platí $a + b \leq a \cdot b$. Máme-li čísla $a,\ b,\ c,\ d \geq 2$, pro něž $a \cdot b < c$, pak $a \cdot d^b < d^c$, protože

$$a \cdot d^b < d^a \cdot d^b = d^{a+b} \leq d^{ab} < d^c.$$

Nyní již přistupme k důkazu třetí nerovnosti:

$$(n-1) \cdot (n-2)^{n-1} < (n-1)^n,$$

$$(n-1) \cdot (n-3)^{(n-2)^{n-1}} < (n-3)^{(n-1)^n},$$

$$\vdots$$

$$(n-1) \cdot 2^{3^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{n-1}}}}} < 2^{3^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{(n-3)^{(n-1)^n}}}}}},$$

$$2^{(n-1).2^{3^{\cdots^{n-1}}}} < 2^{2^{3^{\cdots^{(n-3)^{(n-1)^n}}}}}.$$

Poznámky opravovatele: Klíčem k řešení této úlohy bylo uvědomit si, že číslo

$$2^{3^{\cdots^{n}}}$$

je, řečeno velice vágně, pro velká n mnohonásobně větší než druhé zkoumané číslo. Pak již ovšem stačily velice hrubé odhady k dokázání požadovaného výsledku. Všechna správná řešení sledovala tuto ideu.