Povídání k šesté sérii

Při řešení úloh 6. série lze většinou elegantně využít tzv. *kruhovou inverzi* (což neznamená, že by tyto úlohy nešly řešit jinak, většinou ale budou postupy složitější). Účelem tohoto textíku je s kruhovou inverzí Tě seznámit, vyložit zde její nejdůležitější vlastnosti a ukázat některá typická použití. Doporučuji kreslit si při čtení tohoto textu obrázky.

Co to tedy je kruhová inverze? Je to geometrické zobrazení – předpis, který bodům (v našem případě bodům v rovině) přiřazuje body. K jejímu určení potřebujeme bod S – tzv. střed kruhové inverze – a kladné reálné číslo r – tzv. poloměr kruhové inverze. Bod X zobrazíme na bod X' takto:

(1) X' leží na polopřímce $\mapsto SX$.
(2) $|SX'| = \frac{r^2}{|SX|}$.

Zbývá vyřešit, jak zobrazit bod S – při jeho zobrazování právě popsaným postupem bychom totiž dělili nulou, bod S' vychází „nekonečně daleko". Přidejme proto k rovině jeden „bod v nekonečnu" – tzv. nevlastní bod. Upozorňuji, že je jen jeden – leží ve všech směrech, takže jím prochází například každá přímka. Kruhová inverze zobrazuje bod S na nevlastní bod, nevlastní bod na S.

Pro objasnění, proč se nevlastní bod zavádí právě takto, následuje malá motivační vsuvka. Uvažme v prostoru sféru (povrch koule) nad průměrem AB a rovinu ϱ dotýkající se sféry v bodě B. Uvažme dále středový průmět (se středem A) ϱ na sféru. Pokud bereme v rovině jen vlastní (tj. nikoli nevlastní) body, pak se žádný bod nezobrazí na A. Bodu A odpovídá právě ten nevlastní bod. Rozmyslete si, jak v průmětu na sféru vypadají přímky a kružnice, jak se na průmětu projeví provedení kruhové inverze. Tím myslím toto: Provedeme kruhovou inverzi a pak rovinu promítneme na sféru. Jaký je vztah tohoto průmětu a průmětu „původní", tj. nezinvertované roviny?

Vlastnosti kruhové inverze

Při řešení můžete využívat dále uvedených vlastností kruhové inverze. Zkuste se zamyslet nad tím, jak byste je dokazovali. Pokud některý důkaz nevymyslíte a bude vás zajímat, napište nám o tom – bude-li vás více, může se příslušný důkaz objevit ve vzorovém řešení této série. A teď už slíbené vlastnosti:

(1) Dvojím provedením téže kruhové inverze dostaneme identitu.
(2) Kružnice se středem v S se zobrazí na kružnici se středem v S. Speciálně – kružnice se středem v S a poloměrem r je samodružná (tj. zobrazí se sama na sebe).
(3) Vnitřek samodružné kružnice se zobrazí na její vnějšek a naopak. To znamená, že rovina se jaksi obrátí na ruby kolem samodružné kružnice – odtud získala kruhová inverze své jméno.
(4) Přímka procházející středem (tj. bodem S) je samodružná.
(5) Přímka neprocházející středem se zobrazí na kružnici procházející středem a naopak.
(6) Kružnice neprocházející středem se zobrazí na kružnici neprocházející středem.
(7) Úhel mezi dvěma křivkami v jejich průsečíku se zachovává, pokud tento průsečík není bod S.

Použití kruhové inverze

A konečně se dostáváme k tomu nejzajímavějšímu – jak lze kruhovou inverzi využít. Poměrně známým užitím jsou tzv. Appoloniovy úlohy. Tak se nazývají úkoly sestrojit kružnici vyhovující třem podmínkám. Každá z podmínek říká buď, že se hledaná kružnice dotýká dané přímky či kružnice, anebo, že prochází daným bodem. Některé Appoloniovy úlohy lze šikovně vyřešit užitím kruhové inverze. Zkusme například sestrojit kružnici dotýkající se dvou daných kružnic a procházející daným bodem (neležícím na žádné z kružnic). Provedeme kruhovou inverzi se středem v daném bodě. Při ní přejdou dané kružnice v kružnice (neboť neprocházejí středem kruhové inverze), hledaná kružnice přejde v přímku, jejich společnou tečnu. A tu už není problém zkonstruovat. Všimněte si, že nezáleží na poloměru, s nímž inverzi provádíme. To je poměrně častý případ – jde nám jen o to, zda obraz bude přímka či kružnice, na jejich poloze a velikosti nezáleží.

Dále vyřešíme pomocí inverze ještě jeden příklad, jehož řešení klasickými prostředky by bylo poměrně obtížné a zdlouhavé. Je dána kružnice k a dva různé body L, M ležící na k. Kružnice l (resp. m) se dotýká k v bodě L (resp. M), navíc se l a m dotýkají v bodě B. Jsou-li kružnice k a body L, M pevné, jaká je množina všech bodů B?

Možná vám není příliš jasné, co znamená pojem množina všech bodů B. Míní se tím toto: sestrojíme kružnice l, m všemi způsoby (podle uvedených podmínek). Útvar vytvořený všemi takto získanými body B budeme nazývat množina všech bodů B. Úloha po nás žádá popsat nějaký útvar v rovině a dokázat o něm, že je to množina všech bodů B. Důkaz by se měl skládat ze dvou kroků – je třeba dokázat jednak, že každý přípustný bod B leží v nalezeném útvaru, jednak, že každý bod nalezeného útvaru je bod B pro nějakou volbu kružnic l, m.

Nyní už přistupme k řešení úlohy. Doporučuji kreslit si při čtení obrázek. Proveďme kruhovou inverzi se středem L a s libovolným poloměrem. Zinvertované útvary budeme značit čárkovaně. Zvolme si nějakou dvojici kružnic l, m. Kruhovou inverzí dostaneme k', l' – rovnoběžné přímky (rozmyslete si, proč jsou rovnoběžné) a m' – kružnici, která se dotýká k' v M', l' v B'. Snadno si představíte (a určitě také snadno dokážete), že je $k' \perp B'M'$. Tudíž množina všech B' je částí přímky p' kolmé na k' a procházející M'. To ovšem znamená, že množina všech B je částí kružnice p procházející L a M, kolmé na k v bodě M (neboť úhly se zachovávají). Stejnou úvahou, kde provádíme kruhovou inverzi se středem M, zjistíme, že tato kružnice je kolmá na k i v bodě L.[1]

Zbývá provést druhou část důkazu – zjistit, zda každý bod této kružnice je bodem B pro nějakou volbu l a m. Zvolíme-li na přímce p' libovolně vlastní bod B' různý od M', můžeme evidentně sestrojit přímku l' ($B' \in l'$) rovnoběžnou s k' a kružnici m' nad průměrem $B'M'$ (ta se bude dotýkat k' i l', neboť tečna je kolmá na spojnici středu s dotykovým bodem). Provedením kruhové inverze získáme kružnice k, l a m, které mají požadované vlastnosti.

Zvolíme-li $B' = M'$ či B' nevlastní (tj. $B' = L'$), měla by m' mít poloměr nulový, resp. nekonečný. Zejména druhý případ je trochu těžký na představu (navíc takové kružnice nemáme definovány), proto postupujme jinak. Tyto možnosti odpovídají tomu, že bod B splývá s jedním z bodů L, M a tedy jedna z kružnic l, m má nulový poloměr, druhá splývá s k. Pokud povolujeme i kružnice degenerované v bod a považujeme dvě shodné kružnice za

[1] to je ostatně vidět i ze symetrie kružnice

dotýkající se (dohodněme se, že obojí budeme činit), budou i body L, M možnou polohou bodu B.

V souhrnu jsme tedy zjistili, že množina všech bodů B je kružnice, která prochází body L, M a je na kružnici k v těchto bodech kolmá. Z této kolmosti je patrná i poloha středu této kružnice – je to průsečík tečen ke k v L a v M.

Upozornění: V právě skončeném řešení je jedna malá chyba. Odhalíte ji?

6. série

Téma:	Kruhová inverze
Termín odeslání:	5. BŘEZNA 2001

1. ÚLOHA (3 BODY)

Nechť je dán bod B, bod S a poloměr r. Najděte množinu všech bodů A s vlastností $|A'B'| = |AB|$, kde A' (resp. B') je obraz bodu A (resp. B) v kruhové inverzi se středem v bodě S a poloměrem r.

2. ÚLOHA (3 BODY)

Mějme dvě protínající se kružnice k_1 a k_2, jejichž tečny v průsečících jsou na sebe kolmé, a kružnici l, která prochází středem kružnice k_2. Nechť průsečíky kružnice l s k_1 a k_2 jsou čtyři různé body ($k_1 \cap l = \{A, B\}$, $k_2 \cap l = \{C, D\}$). Nechť (přímka) $AB \cap k_2 = \{P, Q\}$, $CD \cap k_1 = \{R, S\}$. Ukažte, že $PRQS$ je tětivový čtyřúhelník.

3. ÚLOHA (3 BODY)

Nechť kružnice k, l se středy S, T se protínají ve dvou různých bodech A, B. Nechť přímka AS protíná kružnici l v bodě $C \neq A$, nechť přímka AT protíná kružnici k v bodě $D \neq A$. Dokažte, že přímka AB prochází středem kružnice opsané trojúhelníku ACD.

4. ÚLOHA (5 BODŮ)

Jsou dány tři různé body A, B, C. Uvažme všechny dvojice kružnic k, l takové, že k prochází body A, B, dále l prochází body B, C a tečny kružnic k a l v bodě B jsou na sebe kolmé. Najděte množinu průsečíků (různých od B) všech možných takových dvojic k a l.

5. ÚLOHA (5 BODŮ)

Nechť je pevně daná kružnice k se středem S a poloměrem r a nechť je dále pevně dán libovolný bod U. Uvažujme libovolnou kružnici l, která prochází body S a U a protíná k ve dvou bodech A_l, B_l. Jakých hodnot může nabývat součin $|UA_l| \cdot |UB_l|$?

6. ÚLOHA (5 BODŮ)

Zobrazte daný bod v kruhové inverzi jen pomocí kružítka. Přesněji řečeno: na papíře jsou vyznačeny bod X, bod S a kružnice $k(S, r)$. Popište konstrukci bodu X', obrazu bodu X v kruhové inverzi se středem S a poloměrem r, jen pomocí kružítka.

7. ÚLOHA (5 BODŮ)

Nechť kružnice k_1 a k_2 se protínají ve dvou bodech U a V. P buď libovolný bod na k_1 uvnitř k_2 a Q libovolný bod na k_2 uvnitř k_1. Přímka UP protíná k_2 v bodě $R \neq U$ a UQ protíná k_1 v bodě $S \neq U$. Buď $T \neq U$ průsečík přímky UV s kružnicí opsanou trojúhelníku UPQ. Dokažte, že pak $|PR| \cdot |QT| = |PT| \cdot |QS|$.

8. ÚLOHA (5 BODŮ)

Nechť je dán trojúhelník ABC. Označme S střed jemu vepsané kružnice l a označme P, Q, R dotykové body kružnice l po řadě se stranami BC, AC, AB. Buď k kružnice opsaná středům stran trojúhelníku PQR. Buď $X \neq C$ průsečík přímky CS a kružnice opsané trojúhelníku ABC, buď Y průsečík úsečky SX a kružnice k. Buď Z jeden z průsečíků kružnice l a kolmice k přímce CX vedené bodem Y. Dokažte, že přímka XZ se dotýká kružnice l.

Řešení 6. série

1. úloha

Nechť je dán bod B, bod S a poloměr r. Najděte množinu všech bodů A s vlastností $|A'B'| = |AB|$, kde A' (resp. B') je obraz bodu A (resp. B) v kruhové inverzi se středem v bodě S a poloměrem r.

Budeme předpokládat, že $B \neq S$, jinak úloha zřejmě nemá smysl. Stejně tak je jasné, že stačí hledat body $A \neq S$. Nejprve dokážeme pomocné lemma, které se nám bude hodit i při řešení dalších úloh:

Lemma: Pro vzdálenost obrazů A', B' bodů $A \neq S$, $B \neq S$ v kruhové inverzi podle kružnice o poloměru r a středu S platí

$$|A'B'| = |AB| \frac{r^2}{|AS| \cdot |BS|}.$$

Důkaz: Jelikož $|SA||SA'| = r^2 = |SB||SB'|$, jsou trojúhelníky $SA'B'$ a SBA podobné[2] s koeficientem podobnosti

$$\alpha := \frac{|SB'|}{|SA|} = \frac{r^2}{|SA||SB|}.$$

[2]Mohlo by se stát, že body S, A a B leží na jedné přímce a netvoří tedy trojúhelník, následující úvahy o podobnosti však zůstávají v platnosti i v tomto případě.

Takže $|A'B'| = \alpha|AB|$, což jsme měli dokázat.

Jistě $|AB| = |A'B'|$, právě když $\alpha = 1$ nebo $|AB| = 0$, tj. $|SA||SB| = r^2$ nebo $A = B$. Množina všech bodů A je tedy kružnice se středem S a poloměrem $r^2/|SB|$, ke které je přidán navíc bod B.

Poznámky opravovatele: Většina řešitelů zapomněla na bod $A = B$. Za toto pochybení jsem strhával jeden bod. Hodně řešitelů si také neuvědomilo, že úloha má dvě části. Je potřeba ukázat nejen, že všechny body na kružnici (a bod B) splňují rovnost $|AB| = |A'B'|$, ale také, že ostatní body tuto rovnost nesplňují. A tak přestože šlo o velice jednoduchou úlohu, plný počet bodů získal jen málokdo. Za diskutování případu $B = S$ jsem dával $+i$.

2. úloha

Mějme dvě protínající se kružnice k_1 a k_2, jejichž tečny v průsečících jsou na sebe kolmé, a kružnici l, která prochází středem kružnice k_2. Nechť průsečíky kružnice l s k_1 a k_2 jsou čtyři různé body ($k_1 \cap l = \{A, B\}$, $k_2 \cap l = \{C, D\}$). Nechť (přímka) $AB \cap k_2 = \{P, Q\}$, $CD \cap k_1 = \{R, S\}$. Ukažte, že $PRQS$ je tětivový čtyřúhelník.

Uvažujme kruhovou inverzi podle kružnice k_2. Kružnice k_2 je zřejmě samodružná, kružnice k_1 se zřejmě zobrazí na nějakou kružnici (nebo přímku), která podle vlastnosti zachovávání úhlů v průsečících protíná kolmo kružnici k_2 ve stejných bodech jako k_1. Odtud už je vidět, že kružnice k_1 se zobrazí sama na sebe (ovšem body z vnějšku k_2 se zobrazí na body z vnitřku a naopak). Kružnice l se zřejmě zobrazí na přímku CD. Zjistíme obrazy bodů P, Q, R a S. Body P a Q se zobrazí samy na sebe. Body R a S – průsečíky kružnice k_1 a přímky CD – se musí (díky zachování incidence při zobrazení kruhovou inverzí) zobrazit na body A a B – průsečíky kružnice k_1 (která je svým vlastním obrazem) a kružnice l (obraz přímky CD). Zjistili jsme, že obrazy bodů P, Q, R a S jsou body P, Q, A a B, které leží na jedné přímce (která zřejmě neprochází bodem S, to by totiž protínala kružnici l ve třech různých bodech, což není možné). Odtud je zřejmé, že body P, Q, R a S leží na jedné kružnici (pořadí těchto bodů, jak snadno nahlédneme z obrázku, je správné).

Poznámka: Poznamenejme, že vlastnost zformulovanou v zadání má libovolná trojice kružnic k_1, k_2 a l (pokud se každé dvě z nich protínají). Předpoklad kolmosti k_1 a k_2 a toho, že l prochází bodem S byl zadán jen proto, aby bylo možné velmi elegantně využít kruhovou inverzi.

Obecná varianta má celkem elegantní řešení, využívající mocnosti bodu ke kružnici a pojmu chordály. Větu o mocnosti bodu ke kružnici již známe ze seriálu (viz Věta 19), připomeneme tedy ještě pojem chordály:

Definice: Buď k a l dvojice kružnic. Pak jejich *chordálou* rozumíme množinu bodů v rovině, jejichž mocnosti ke kružnicím k a l jsou stejné.

Zajímavé je, že chordála každé dvojice kružnic je přímka (dokazovat to zde však pro úsporu místa nebudeme, přenecháváme to tedy zvídavému čtenáři). Pokud se tyto dvě kružnice protínají, pak je to zjevně přímka procházející jejich průsečíky (ty mají totiž mocnosti k oběma kružnicím nulové, tedy shodné).

Nyní se již můžeme pustit do alternativního řešení. Přímka AB je chordálou dvojice kružnic k_1 a l, přímka CD je chordálou dvojice kružnic k_2 a l. Průsečík těchto dvou přímek (označme ho Z) má tedy stejnou mocnost (označme ji m) ke všem třem kružnicím k_1, k_2 a l, takže zřejmě platí $|ZP| \cdot |ZQ| = m = |ZR| \cdot |ZS|$. Odtud je již z věty o mocnosti bodu ke kružnici jasné, že kružnice opsaná bodům P, Q a R prochází bodem S. Tato kružnice totiž protíná přímku CD v nějakém bodě S', pro který platí $m = |ZR| \cdot |ZS'|$. Bod S tuto vlastnost má, navíc vidíme, že S' je jednoznačně určen poslední rovností a tedy musí být roven S.

3. úloha

Nechť kružnice k, l se středy S, T se protínají ve dvou různých bodech A, B. Nechť přímka AS protíná kružnici l v bodě $C \neq A$, nechť přímka AT protíná kružnici k v bodě $D \neq A$. Dokažte, že přímka AB prochází středem kružnice opsané trojúhelníku ACD.

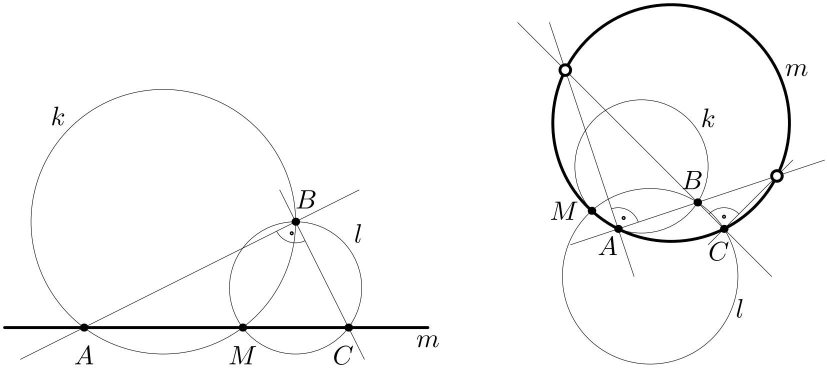
Doporučuji kreslit si při čtení obrázek. Označme m kružnici opsanou trojúhelníku ACD a označme U její střed. Potřebujeme ukázat, že přímka AB prochází bodem U, což zřejmě nastane právě tehdy, když bude přímka AB kolmá na tečny ke kružnici m v příslušných průsečících. Abychom toto ukázali, provedeme kruhovou inverzi se středem v bodě A a s libovolným poloměrem $r > 0$. Obrazy bodů a kružnic budeme značit „čárkovaně“. Kružnice k, l a m přejdou v kruhové inverzi na přímky $k' = B'D'$, $l' = B'C'$ a $m' = C'D'$. Přímka AC přejde v kruhové inverzi v přímku AC', která je kolmá na $B'D'$ (podle úvodu k této sérii se úhly mezi křivkami zachovávají). Podobně přímka AD přejde na přímku AD' kolmou na $B'C'$. Je tedy jasné, že bod A (průsečík přímek AC' a AD') je průsečík výšek trojúhelníku $B'C'D'$. Je tedy zřejmé, že přímka AB' je kolmá na přímku $m' = C'D'$, a opětovným provedením kruhové inverze znovu podle vlastnosti zachovávání úhlů v průsečících dostaneme, že přímka AB je kolmá na tečnu ke kružnici m v jejich průsečíku (různém od A). Tedy přímka AB prochází bodem U, což jsme měli dokázat.

4. úloha

Jsou dány tři různé body A, B, C. Uvažme všechny dvojice kružnic k, l takové, že k prochází body A, B, dále l prochází body B, C a tečny kružnic k a l v bodě B jsou na sebe kolmé. Najděte množinu průsečíků (různých od B) všech možných takových dvojic k a l.

Označme m hledanou množinu bodů, M nějaký bod m. Uvažujme na chvíli tu dvojici kružnic k a l, které vyhovují podmínkám zadání a protínají se v bodě M. Proveďme kruhovou inverzi se středem v bodě B a libovolným poloměrem. Obrazy bodů a kružnic v této kruhové inverzi budeme značit „čárkovaně“. Podle vlastností uvedených v úvodu k této sérii bude k' přímka procházející bodem A', l' bude přímka procházející bodem C' a M' bude jejich průsečík. Navíc přímky k' a l' jsou na sebe kolmé (jelikož tečny kružnic k a l byly v bodě M na sebe také kolmé). Bod M' tedy leží podle Thaletovy věty na kružnici s průměrem $A'C'$. Opětovným provedením téže kruhové inverze tedy dostáváme, že bod M leží na obrazu této kružnice, což je kružnice nebo přímka, která prochází body A a C. Snadno nahlédneme, že je to přímka právě tehdy, když bod B (střed kruhové inverze) leží na kružnici s průměrem

$A'C'$, tedy právě tehdy, když úhel $\sphericalangle ABC = \sphericalangle A'BC'$ je pravý. Zjistili jsme, že m je částí jisté kružnice nebo přímky, musíme nyní zjistit, zda na ní nebudou „chybět“ nějaké body. Uvažujme libovolný bod M' (různý od B) na kružnici nad průměrem $A'C'$. Označme k' přímku $A'M'$, l' přímku $C'M'$. Pokud ani jedna z těchto přímek neprochází bodem B, jejich obrazy v kruhové inverzi budou vyhovující kružnice k a l a bod M bude do množiny m patřit. Pokud však bod B leží např. na přímce k', její obraz je *přímka* k, takže odpovídající bod M do množiny m nebude patřit – nedostaneme ho jako průsečík dvou kružnic[3]. Snadno zjistíme, že v případě, že úhel $\sphericalangle ABC$ je pravýi, toto nikdy nenastane a tedy m bude *celá* přímka AC (viz obrázek). V případě, že $\sphericalangle ABC$ není pravý, budou na hledané kružnici chybět dva body (viz obrázek). Ty snadno najdeme jako průsečík přímky $k = AB$ (resp. $l = BC$) s odpovídající „kolmou“ kružnicí l (resp. k). Tyto body lze snadno zkonstruovat, např. jako průsečík kolmice k přímce AB (resp. BC) v bodě A (resp. C) s přímkou BC (resp. AB), detaily si čtenář rozmyslí.[4] Nalezením těchto bodů jsme zároveň určili hledanou kružnici (bez dvou bodů) m, jelikož jsme našli čtyři body, kterými prochází. Výjimkou je případ, kdy body A, B a C leží na jedné přímce, pak totiž „chybějící“ body splynou s body A a C a k určení hledané kružnice je potřeba využít například symetrie hledané kružnice vůči přímce AC.



Poznámky opravovatele: Nejčastější chybou řešení byla následující úvaha: Nechť M je některý z hledaných bodů. Pak ho zinvertujeme podle středu B a zjistíme, že M' leží na Thaletově kružnici nad průměrem $A'C'$. Tedy množina všech hledaných bodů M je **celá** kružnice (nebo přímka) – obraz zmíněné Thaletovy kružnice.

Tato úvaha je zjevně chybná, nikdo nám nezaručí, že body M' nám vyčerpají celou Thaletovu kružnici nad průměrem $A'C'$. To bychom mohli analogicky argumentovat tím, že M' leží určitě někde v rovině, takže množina hledaných bodů M je **celá** rovina.

---

[3]Pokud bychom se však dohodli, že budeme i tento „degenerovaný“ případ přímky považovat za kružnici, bude i tento odpovídající bod do m patřit.

[4]Taky si zkus rozmyslet, že spojnice těchto dvou chybějících bodů tvoří průměr hledané kružnice.

Několik řešení se spokojilo se zjištěním, že hledaná množina bodů je kružnice (resp. část kružnice či přímka), někteří navíc konstatovali, že prochází body A a C, to však není zrovna přesná charakterizace – v rovině existuje nekonečně mnoho takových kružnic. Jako drobnou vadu na kráse (strhnutí *i*-ček) jsem hodnotil, když řešitel tuto kružnici charakterizoval tak, že zkonstruoval jeden nebo několik pomocných bodů pomocí kruhové inverze. Takováto charakterizace nám totiž nedává přesnou představu o tom, jak zmíněná kružnice vypadá, dokud pomocné body nezkonstruujeme …

5. úloha

Nechť je pevně daná kružnice k se středem S a poloměrem r a nechť je dále pevně dán libovolný bod U. Uvažujme libovolnou kružnici l, která prochází body S a U a protíná k ve dvou bodech A_l, B_l. Jakých hodnot může nabývat součin $|UA_l| \cdot |UB_l|$?

Pokud $U = S$, pak součin $|UA_l| \cdot |UB_l|$ může nabývat jediné hodnoty r^2. Dále předpokládejme $U \neq S$. Uvažujme kružnici l, která prochází body S a U a protíná danou kružnici k v bodech A_l a B_l. Proveďme kruhovou inverzi se středem v bodě S a poloměrem r (podle dané kružnice k). Označme všechny obrazy „čárkovaně“. Kružnice k je samodružná. Kružnice l se zobrazí na přímku l' procházející bodem U'. Podle věty o mocnosti bodu ke kružnici (viz Věta 19 ze seriálu) velikost součinu $|U'A_l'| \cdot |U'B_l'|$ nezávisí na zvolené přímce l (a je rovna číslu $||U'S|^2 - r^2|$). Podle lemmatu z první úlohy je $|U'A_l'| = |UA_l| \cdot r/|US|$ a $|U'B_l'| = |UB_l| \cdot r/|US|$. Tedy $|UA_l| \cdot |UB_l| = |U'A_l'| \cdot |U'B_l| \cdot |US|^2/r^2 = (||U'S|^2 - r^2)|US|^2/r^2 = |r^2 - |US|^2|$. Hledaný součin tedy může nabývat jediné hodnoty, je vždy roven číslu $|r^2 - |US|^2|$. Dostali jsme tedy zajímavou analogii věty o mocnosti bodu ke kružnici.

Poznámky opravovatele: Téměř všichni řešitelé použili kruhovou inverzi obdobně jako ve vzorovém řešení a převedli úlohu na větu o mocnosti bodu ke kružnici. Většina z nich si zvolila libovolné umístění bodu U vně kružnice k, a tak zbytečně přišla o dva body.

6. úloha

Zobrazte daný bod v kruhové inverzi jen pomocí kružítka. Přesněji řečeno: na papíře jsou vyznačeny bod X, bod S a kružnice $k(S, r)$. Popište konstrukci bodu X', obrazu bodu X v kruhové inverzi se středem S a poloměrem r, jen pomocí kružítka.

Symbolem $k(A, a)$ budeme označovat kružnici se středem A a poloměrem a, symbolem $s(AB)$ střed úsečky AB a kružnici $k(S, r)$ označíme k. Nejprve popíšeme tři pomocné konstrukce.

(K1) Jsou dány body A, B, jejichž vzdálenost je x. Sestrojte bod C takový, že $B = s(AC)$.

Sestrojíme body E_1, E_2 jako vrcholy rovnostranných trojúhelníků se základnou AB. Poté sestrojíme bod C jako vrchol rovnostranného trojúhelníku se základnou E_1E_2 tak, že C leží na polopřímce AB. Body A, B, C leží na ose úsečky E_1E_2, vzdálenost $|E_1E_2| = \sqrt{3}x$, vzdálenost $|AC| = \frac{x}{2} + \sqrt{3}x\frac{\sqrt{3}}{2} = 2x$.

(K2) Jsou dány body A, B, jejichž vzdálenost je x. Sestrojte bod $D = s(AB)$.

Nejprve konstrukcí (K1) sestrojíme bod C. Nechť $\{F_1, F_2\} = k(C, 2x) \cap k(A, x)$, $D \in k(F_1, x) \cap k(F_2, x)$, $D \neq A$. Nyní dokážeme správnost postupu. Body A, B, D leží na ose úsečky F_1F_2. Nechť $G = s(AD), H = s(AF_1)$, pak $F_1G \perp AB, CH \perp AF_1$, a proto $\triangle AF_1G \sim \triangle ACH$. Z poměru stran dostaneme $|AG| = \frac{|AH|}{|AC|}|AF_1| = \frac{x}{4}$, tedy $|AD| = 2|AG| = \frac{x}{2}$.

(K3) Jsou dány body A, B, jejichž vzdálenost je x. Sestrojte bod X, který leží na polopřímce AB a jehož vzdálenost od A je nx, kde $n \in \mathbb{N}, n > 2$.

Stačí vhodně opakovat konstrukci (K1) ...

Nyní k vlastní konstrukci. Podle polohy zobrazovaného bodu X vůči kružnici k rozlišíme dva případy:

(i) $|SX| > r$. Nechť $P = s(SX)$, $t = k(P, |SP|)$, $\{T_1, T_2\} = t \cap k$. Potom $X' = s(T_1T_2)$ (tento bod umíme sestrojit podle (K2)). Zjevně bod X' leží na polopřímce SX. Jelikož t je Thaletova kružnice, je úhel ST_1X pravý, a protože X' je středem základny rovnoramenného trojúhelníku SPT_1, je T_1X' výškou tohoto trojúhelníka. Podle Eukleidova vztahu je $|SX'||SX| = |ST_1|^2 = r^2$.

(ii) $|SX| \leq r$. Tento případ převedeme na případ (i) takto: Určitě existuje n takové, že bod Y na polopřímce SX, který splňuje $|SY| = n|SX|$, leží vně kružnice k (umíme ho sestrojit podle (K3) – postupně budeme sestrojovat příslušné body ve vzdálenostech $2|SX|$, $3|SX|$, ... tak dlouho, až se dostaneme vně kružnice k). Obraz Y' bodu Y v kruhové inverzi podle k již umíme sestrojit podle (i). Obraz X' bodu X sestrojíme na polopřímce SY' podle (K3) tak, aby $|SX'| = n|SY'|$.

Poznámky opravovatele: Úloha se skládala ze dvou konstrukcí. Jedna zobrazovala body vzdálené od středu kružnice více než $r/2$ (resp. r) a druhá vhodně převedla ostatní případy na tento. Jak už to tak někdy bývá, přijde se po zveřejnění autorského řešení na řešení jednodušší. Tak tedy první konstrukce může být následující: Sestrojíme kružnici $k(X, |SX|)$. Ta protne kružnici $k(S, r)$ ve dvou bodech A_1,A_2 a $X' = k(A_1, r) \cap k(A_2, r)$, $X' \neq S$. Toto řešení i se správným důkazem poslalo několik řešitelů. Jiní řešitelé konstruovali úsečky různých délek, s jejichž pomocí pak sestrojili hledaný bod, nebo postupovali podobně jako autorské řešení.

Za správnou první konstrukci i s korektním důkazem jsem dával 3 body, za druhou 2 body. Za velmi krátké a elegantní řešení jsem *Daně Chromíkové* dal $+i$ a některým řešitelům jsem za zdlouhavé či chaotické řešení imaginární body strhával.

7. úloha

Nechť kružnice k_1 a k_2 se protínají ve dvou bodech U a V. P buď libovolný bod na k_1 uvnitř k_2 a Q libovolný bod na k_2 uvnitř k_1. Přímka UP protíná k_2 v bodě $R \neq U$ a UQ protíná k_1 v bodě $S \neq U$. Buď $T \neq U$ průsečík přímky UV s kružnicí opsanou trojúhelníku UPQ. Dokažte, že pak $|PR| \cdot |QT| = |PT| \cdot |QS|$.

Označme si k_3 kružnici opsanou bodům U, P, Q (a T). Proveďme kruhovou inverzi se středem v U a libovolným poloměrem $r > 0$. Obrazy v kruhové inverzi budeme značit „čárkovaně“. Snadno nahlédneme, že všechny tři kružnice k_1, k_2 a k_3 přejdou v přímky, navíc přímky UQ, UV a UP zůstanou přímkami. Odtud je vidět, že po provedení zmíněné kruhové inverze dostaneme trojúhelník $UP'Q'$ a v něm příčky UT', $P'S'$ a $Q'R'$, které se protínají v jediném bodě V'. Podle Cèvovy věty (kterou známe z prvního dílu seriálu) platí

$$\frac{|UR'|}{|R'P'|} \cdot \frac{|P'T'|}{|T'Q'|} \cdot \frac{|Q'S'|}{|S'U|} = 1. \qquad (\heartsuit)$$

Máme dokázat, že $|PR| \cdot |QT| = |PT| \cdot |QS|$, stačí tedy dokázat $\frac{|PT|}{|PR|} \cdot \frac{|QS|}{|QT|} = 1$. Abychom k tomu mohli využít rovnost ($\heartsuit$), stačí si vyjádřit „nečárkované“ vzdálenosti pomocí „čárkovaných“. K tomu užijeme lemma z první úlohy. Podle něj platí (uvědomme si, že dvojí provedení téže kruhové inverze je identita, takže lze „nečárkované“ body považovat za obrazy „čárkovaných“)

$$|PT| = |P'T'| \cdot \frac{r^2}{|P'U| \cdot |T'U|}.$$

$$|PR| = |P'R'| \cdot \frac{r^2}{|P'U| \cdot |R'U|}.$$

$$|QS| = |Q'S'| \cdot \frac{r^2}{|Q'U| \cdot |S'U|}.$$

$$|QT| = |Q'T'| \cdot \frac{r^2}{|Q'U| \cdot |T'U|}.$$

Dosazením těchto 4 vztahů a drobnou úpravou nám skutečně vyjde (s využitím vztahu ($\heartsuit$))

$$\frac{|PT|}{|PR|} \cdot \frac{|QS|}{|QT|} = \frac{|UR'|}{|R'P'|} \cdot \frac{|P'T'|}{|T'Q'|} \cdot \frac{|Q'S'|}{|S'U|} = 1.$$

Tím je úloha dokázána.

Poznámky opravovatele: Většina řešitelů používala postup uvedený v autorském řešení, tedy nejprve provedli kruhovou inverzi, při které se oblouky kružnic převedly na přímky, a poté užili Cèvovu větu pro trojúhelníky. Jen několik výjimek si tento postup zkomplikovalo tím, že nepoužily kruhovou inverzi hned na počátku celého řešení a pracovaly tudíž s kruhovými oblouky. Po dosti úmorných výpočtech (několikanásobné využití kosinové věty) se ovšem také dostaly k cíli. Použití kruhové inverze bylo v tomto případě elegantnější než postup bez ní.

8. úloha

Nechť je dán trojúhelník ABC. Označme S střed jemu vepsané kružnice l a označme P, Q, R dotykové body kružnice l po řadě se stranami BC, AC, AB. Buď k kružnice opsaná středům stran trojúhelníku PQR. Buď $X \neq C$ průsečík přímky CS a kružnice opsané trojúhelníku ABC, buď Y průsečík úsečky SX a kružnice k. Buď Z jeden z průsečíků kružnice l a kolmice k přímce CX vedené bodem Y. Dokažte, že přímka XZ se dotýká kružnice l.

Označme D střed strany QR. Ze symetrie QR podle přímky AS plyne, že D leží na přímce AS a úhel $\sphericalangle ADQ$ je pravý. Podle Eukleidovy věty o odvěsně pro pravoúhlý trojúhelník AQS dostáváme $|SD| \cdot |SA| = |SQ|^2$ a tedy bod D je obraz bodu A v kruhové inverzi podle kružnice l. Analogicky lze postupovat pro ostatní středy stran v trojúhelníku PQR a nakonec dostaneme, že kružnice k je obrazem kružnice opsané trojúhelníku ABC v kruhové inverzi podle kružnice l. Pak je ale jasné z definice bodů X a Y (leží na stejné polopřímce vycházející z bodu S, X leží na kružnici opsané trojúhelníku ABC, Y leží na k), že Y je obrazem bodu X ve zmíněné kruhové inverzi a tedy (podle definice kruhové inverze) platí $|SX| \cdot |SY| = r^2 = |SZ|^2$. Znovu podle Eukleidovy věty o odvěsně pro trojúhelník SZX dostáváme, že musí být pravoúhlý, tedy přímka XZ je kolmá na SZ a je tedy tečnou kružnice l v bodě Z.