Povídání k sedmé sérii

Smyslem tohoto úvodu jistě nebude definovat pojem rovnice, ten by měl být každému čtenáři jasný (alespoň intuitivně). Připomeneme si však několik pojmů, které se mohou při řešení úloh této série hodit.

Polynomem rozumíme libovolnou funkci $p(x)$ proměnné x tvaru

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,$$

kde n je celé nezáporné číslo a $a_0, a_1, \ldots, a_n$ jsou koeficienty, $a_n \neq 0$ (navíc připouštíme též případ $p(x) \equiv 0$). Koeficienty jsou většinou reálná (případně komplexní) čísla. Číslo n nazýváme *stupněm* polynomu $p(x)$. Platí základní věta:

Věta. *Nechť $p(x)$ je nenulový polynom stupně $n \geq 1$. Pak existuje alespoň jedno řešení rovnice*

$$p(x) = 0$$

v oboru komplexních čísel. Navíc existuje posloupnost $x_1, x_2, \ldots, x_n$ (ne nutně různých) komplexních čísel (až na pořadí je jednoznačně určená) takových, že

$$p(x) = a_n (x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_n).$$

Tuto rovnost je nutno chápat nejen jako rovnost dvou funkcí, na pravé a levé straně budou po roznásobení polynomy se stejnými koeficienty u jednotlivých mocnin x.

Čísla $x_1, x_2, \ldots, x_n$ z předchozí věty se nazývají *kořeny* polynomu $p(x)$ (přesvěčte se, že všechny řeší rovnici $p(x) = 0$). Jako důsledek dostáváme známé Viètovy vztahy:

$$\begin{aligned} -\frac{a_{n-1}}{a_n} &= x_1 + x_2 + \cdots + x_n, \\ \frac{a_{n-2}}{a_n} &= x_1 x_2 + x_1 x_3 + \cdots + x_{n-1} x_n, \\ &\vdots \\ (-1)^n \frac{a_0}{a_n} &= x_1 x_2 \cdots x_n. \end{aligned}$$

Nyní se budeme trochu věnovat tzv. *symetrickým* polynomům.[1] Polynom více proměnných $p(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ nazveme symetrickým, pokud se nezmění při záměně pořadí proměnných. Tedy je-li π libovolná permutace čísel $1, 2, \ldots, n$, pak platí

$$p(x_{\pi(1)}, x_{\pi(2)}, \ldots, x_{\pi(n)}) = p(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

[1] Jde však jen o stručný úvod. Pokud se chceš o symetrických polynomech dozvědět více, zkus nahlédnout např. do knížečky Alois Kufner: *Symetrické funkce*, Škola mladých matematiků 52, Mladá Fronta, Praha 1982.

Např. funkce dvou proměnných $q(x,y) = x + y + 3xy + 2x^3 + 2y^3$ je symetrický polynom. Uvažujme nyní symetrické polynomy n proměnných a označme

$$\begin{aligned} s_1 &= x_1 + x_2 + \cdots + x_n, \\ s_2 &= x_1x_2 + x_1x_3 + \cdots + x_{n-1}x_n, \\ &\vdots \\ s_n &= x_1x_2\cdots x_n \end{aligned}$$

takzvané *elementární* symetrické polynomy. Označme dále

$$\begin{aligned} v_1 &= x_1 + x_2 + \cdots + x_n, \\ v_2 &= x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2, \\ &\vdots \\ v_n &= x_1^n + x_2^n + \cdots + x_n^n. \end{aligned}$$

Pak platí následující věta o symetrických polynomech:

Věta. *Nechť p je symetrický polynom v proměnných $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Pak existuje jednoznačně určený polynom n proměnných r takový, že platí*[2]

$$p(x_1, x_2, \ldots, x_n) = r(s_1, s_2, \ldots, s_n).$$

Poznámka: Stejná věta zůstane v platnosti nahradíme-li polynomy $s_1, s_2, \ldots, s_n$ polynomy $v_1, v_2, \ldots, v_n$.

Na ukázku zde vyjádříme náš polynom $q(x,y)$ dvou proměnných:

$$q(x,y) = x + y + 3xy + 2x^3 + 2y^3 = s_1 + 3s_2 + 2s_1^3 - 6s_1s_2 = v_1 + \frac{3}{2}v_1^2 - \frac{3}{2}v_2 - v_1^3 + 3v_1v_2,$$

kde

$$\begin{aligned} s_1 &= x + y, \\ s_2 &= xy, \\ v_1 &= x + y, \\ v_2 &= x^2 + y^2. \end{aligned}$$

Platnost těchto vztahů si laskavý čtenář ověří přímym roznásobením.

[2] Věta netvrdí nic jiného, než že každý symetrický polynom lze právě jedním způsobem vyjádřit pomocí elementárních symetrických polynomů, sčítání a násobení.

7. série

Téma: Rovnice

Termín odeslání: 17. DUBNA 2001

1. ÚLOHA (3 BODY)

Má soustava

$$\begin{aligned} x + y &= 1 \\ x^2 + y^2 &= 2 \\ x^3 + y^3 &= 3 \end{aligned}$$

řešení v oboru reálných čísel?

2. ÚLOHA (3 BODY)

Kolik řešení má rovnice

$$\sin(2\sin(3\sin(4\sin(\dots\sin(2001\sin x)\dots)))) = 1\,?$$

Úhly měříme v radiánech, tj. např. $\sin\frac{\pi}{2} = 1$.

3. ÚLOHA (3 BODY)

Nalezněte všechny dvojice čísel $x, y \in \mathbb{R}$ splňující rovnost

$$x^6 + 2x^5y - 3x^4y^2 - 3x^3y^3 - 3x^2y^4 + 2xy^5 + y^6 = 0.$$

4. ÚLOHA (5 BODŮ)

Nechť x je reálné číslo. Zjistěte, pro která přirozená k má rovnice $x^2 + 1 = k\lfloor x\rfloor$ řešení. Symbolem $\lfloor y\rfloor$ rozumíme dolní celou část reálného čísla y.

5. ÚLOHA (5 BODŮ)

Pro která přirozená n má polynom $x^n - 2x^{n-1} + 3x^{n-2} - \cdots + (-1)^n(n+1)$ všechny kořeny reálné?

6. ÚLOHA (5 BODŮ)

Nalezněte všechna řešení rovnice

$$\sqrt[3]{x^2 + 2x + 4} + \sqrt[3]{31 - 2x - x^2} = 5\,.$$

7. ÚLOHA (5 BODŮ)

Nalezněte všechna reálná řešení rovnice

$$x^6 - x^5 - 4x^4 + 5x^3 - 41x^2 + 36x - 36 = 0.$$

8. ÚLOHA (5 BODŮ)

Rovnice $(x - a_1)(x - a_2)\cdots(x - a_n) = 1$ (všechna a_i jsou reálná) má n (různých) reálných řešení $r_1, r_2, \ldots, r_n$. Jaký je minimální počet reálných řešení (v závislosti na n) rovnice $(x - r_1)(x - r_2)\cdots(x - r_n) = -1$?

Řešení 7. série

1. úloha

Má soustava

$$\begin{aligned} x + y &= 1 \\ x^2 + y^2 &= 2 \\ x^3 + y^3 &= 3 \end{aligned}$$

řešení v oboru reálných čísel?

Tato soustava řešení nemá. Nejpřímočařejší řešení by asi vypadalo takto: z první rovnice vyjádříme y, dosadíme do druhé, vyřešíme kvadratickou rovnici pro x a po dosazení do třetí rovnice zjistíme, že žádná ze dvou dvojic $[x, y]$ vyhovujících prvním dvěma rovnicím nevyhovuje rovnici třetí. My si zde ukážeme elegantnější řešení využívající poznatků o symetrických polynomech (viz úvod k této sérii). Snadno ověříme, že pro každé x a y platí následující dvě rovnosti

$$\begin{aligned} xy &= \frac{1}{2}\left((x + y)^2 - (x^2 + y^2)\right), \\ x^3 + y^3 &= (x^2 + y^2) \cdot (x + y) - xy \cdot (x + y)\,. \end{aligned}$$

Předpokládejme nyní, že naši soustavu řeší nějaká čísla x, y. Dosadíme-li do první z výše uvedených rovností, zjistíme, že $xy = \frac{1}{2}(1^2 - 2) = -\frac{1}{2}$. Po dosazení do druhé rovnosti dostaneme $x^3 + y^3 = 2 \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{5}{2}$. To je však spor, protože má platit $x^3 + y^3 = 3$. To ukazuje, že x, y nebyla řešení naší soustavy, čímž je důkaz hotov.

Poznámky opravovatele: Většina z vás vyřešila úlohu správně. Ten, kdo nepotřeboval určovat kořeny kvadratické rovnice pomocí známého vzorce, dostal $+i$.

2. úloha
Kolik řešení má rovnice

$$\sin(2\sin(3\sin(4\sin(\ldots\sin(2001\sin x)\ldots)))) = 1\,?$$

Úhly měříme v radiánech, tj. např. $\sin\frac{\pi}{2} = 1$.

Nejprve si uvědomíme, že má-li rovnice jedno řešení, pak už jich má nekonečně mnoho. Je-li totiž x řešení rovnice

$$\sin(2\sin(3\sin(4\sin(\ldots\sin(2001\sin x)\ldots)))) = 1,$$

pak také $x + 2k\pi$ je řešení pro každé k celé.

Nyní dokážeme, že řešení existuje. Řešme nejprve rovnici $\sin(2y) = 1$. Jistě $y = \pi/4$ je řešení a navíc $\pi/4 < 1$. Zbývá ukázat, že rovnice

$$\sin(3\sin(4\sin(\ldots\sin(2001\sin x)\ldots))) = \pi/4$$

má řešení. Protože funkce sinus nabývá na intervalu $\langle 0, \pi/2\rangle$ všech hodnot mezi nulou a jedničkou, má rovnice $\sin(kx) = y$ pro libovolné $y \in \langle 0, 1\rangle$ a pro libovolné k přirozené nějaké řešení v intervalu $\langle 0, \frac{\pi}{2k}\rangle$. Odtud tedy plyne, že rovnice $\sin(3x) = \pi/4$ má řešení $x = y_3 < 1$ a rovnice $\sin(4x) = y_3$ má řešení $x = y_4 < 1, \ldots$ a rovnice $\sin(2001x) = y_{2000}$ má řešení y_{2001}. Je zřejmé, že $x = \arcsin y_{2001}$ je řešením zadané rovnice.

Poznámky opravovatele: Většinou jsem uděloval jeden bod za zdůvodnění, že pokud má úloha jedno řešení, tak už jich má nekonečně mnoho, a dva body za důkaz existence řešení. Někteří řešitelé se vůbec nestarali o to, zda je příslušné číslo v definičním oboru funkce arcsin, někteří se postupně zbavovali sinů, aniž by si uvědomovali, že se jim tím ztrácejí některá řešení. Na konci jim pak zbylo jen jedno nebo (např.) 2^{2000} řešení, zapomínali totiž na $2k\pi$. Někteří řešili úlohu pomocí kalkulačky a „objevili“, že pro malá x platí $x = \sin x$. Tak to samozřejmě neplatí[3] a je to krásný příklad, proč se kalkulačky nemají (bezhlavě) používat a že nemáte věřit všemu, co vaše kalkulačka napíše.

3. úloha
Nalezněte všechny dvojice čísel $x, y \in \mathbb{R}$ splňující rovnost

$$x^6 + 2x^5y - 3x^4y^2 - 3x^3y^3 - 3x^2y^4 + 2xy^5 + y^6 = 0.$$

Pro symetrickou rovnici

$$x^6 + 2x^5y - 3x^4y^2 - 3x^3y^3 - 3x^2y^4 + 2xy^5 + y^6 = 0 \tag{1}$$

[3] Platí to však přibližně, pro malá x docela přesně. Ve fyzice se toto zanedbání používá na každém rohu.

bude užitečné zavést substituci $a := x + y$, $b := x \cdot y$. Z binomické věty plyne

$$a^6 = x^6 + 6x^5y + 15x^4y^2 + 20x^3y^3 + 15x^2y^4 + 6xy^5 + y^6.$$

Po dosazení do rovnice (1) dostáváme

$$a^6 - 4x^5y - 18x^4y^2 - 23x^3y^3 - 18x^2y^4 - 4xy^5 = 0.$$

Ze všech členů této rovnice kromě prvního můžeme vytknout $xy = b$ a dostaneme

$$a^6 - b(4x^4 + 18x^3y + 23x^2y^2 + 18xy^3 + 4y^4) = 0. \tag{2}$$

A opět použijeme binomickou větu a vyjádříme si

$$4a^4 = 4x^4 + 16x^3y + 24x^2y^2 + 16xy^3 + 4y^4,$$

takže rovnice (2) přejde v

$$0 = a^6 - b(4a^4 + 2x^3y - x^2y^2 + 2xy^3) = a^6 - b(4a^4 + b(2a^2 - 5b)),$$

neboli

$$0 = a^6 - 4a^4b - 2a^2b^2 + 5b^3. \tag{3}$$

Protože proměnná a se zde vyskytuje pouze v sudých mocninách, označíme si $c := a^2$. Navíc vidíme, že $c = b$ je řešení, vytkneme tedy z pravé strany poslední rovnice $(c - b)$ a dostaneme

$$0 = c^3 - 4c^2b - 2cb^2 + 5b^3 = (c - b)(c^2 - 3cb - 5b^2).$$

Rozložíme kvadratický trojčlen

$$c^2 - 3cb - 5b^2 = (c - k \cdot b)(c - l \cdot b),$$

tedy $kl = -5$ a $k + l = 3$, což vede na kvadratickou rovnici $k(3 - k) = -5$. Jejím řešením jsou čísla $\frac{3 \pm \sqrt{29}}{2}$. Převedli jsme tedy rovnici (1) na rovnici

$$(c - b)\left(c - \frac{3 + \sqrt{29}}{2}b\right)\left(c - \frac{3 - \sqrt{29}}{2}b\right) = 0, \tag{4}$$

tj. platí: Je-li (x, y) řešení rovnice (1), pak $(c, b) = ((x + y)^2, xy)$ je řešením rovnice (4). To znamená, že nutná podmínka je, aby platila jedna z následujících rovností:

$$c = b \quad \text{nebo} \quad c = \frac{3 + \sqrt{29}}{2}b \quad \text{nebo} \quad c = \frac{3 - \sqrt{29}}{2}b. \tag{5}$$

Nyní budeme chtít vyjádřit x a y v závislosti na $a = x+y$ a $b = xy$. Jistě platí $x(a-x) = b$, což vede na kvadratickou rovnici, která má řešení

$$x_{1,2} = \frac{a \pm \sqrt{a^2 - 4b}}{2}. \tag{6}$$

Bude tedy buď $x = x_1$ a $y = x_2$, nebo naopak. Protože však $c = a^2$ musí být nezáporné, rozlišíme následující případy.

(a) $b > 0$. Pak $a^2 = b$ je sice nezáporné, ale výraz pod odmocninou v (6) je záporný. Dále může být $a^2 = \frac{3+\sqrt{29}}{2}b$. Protože $\sqrt{29} > 5$, je $a^2 > 4b$ a tedy odmocnina v (6) má smysl. Odtud dostáváme (dosadíme-li do (6) za a)

$$(x,y) = \left(\frac{\pm\sqrt{\frac{3+\sqrt{29}}{2}b} \pm \sqrt{\frac{3+\sqrt{29}-8}{2}b}}{2}, \frac{\pm\sqrt{\frac{3+\sqrt{29}}{2}b} \mp \sqrt{\frac{3+\sqrt{29}-8}{2}b}}{2} \right). \tag{A}$$

Z třetí rovnosti v (5) neplyne žádné řešení, neboť $c < 0$.

(b) $b < 0$. Pro první a druhou rovnost v (5) vyjde $c < 0$. Ze třetí nerovnosti pak máme

$$(x,y) = \left(\frac{\pm\sqrt{\frac{3-\sqrt{29}}{2}b} \pm \sqrt{\frac{3-\sqrt{29}-8}{2}b}}{2}, \frac{\pm\sqrt{\frac{3-\sqrt{29}}{2}b} \mp \sqrt{\frac{3-\sqrt{29}-8}{2}b}}{2} \right). \tag{B}$$

(c) $b = 0$. Odtud plyne $a = 0$ a $(x,y) = (0,0)$.

Nyní zbývá ověřit, že tyto dvojice skutečně řeší rovnici (1). To je ale snadné, neboť a, b splňují (3) a platí $a = x + y$ a $b = xy$. Můžeme tedy (3) rozepsat pomocí x a y a odvodit platnost (1), tj. stačí provést úpravy ze začátku řešení pozpátku.

Závěr: (x,y) je řešení zadané rovnice právě tehdy, když platí (A) pro nějaké $b > 0$, nebo platí (B) pro nějaké $b < 0$, nebo $(x,y) = (0,0)$.

Poznámky opravovatele: Nikdo z úspěšných řešitelů nepoužil ideu vzorového řešení, všichni jste místo toho vhodnou substitucí převedli úlohu na reciprokou rovnici 6. stupně. Tím se řešení značně zmechanizovalo, ale hodně z vás před první substitucí dělilo rovnici výrazem x^6 nebo x^3y^3, aniž byste vyšetřovali případy, kdy je roven nule. V tomto případě vyjde jediné řešení $(0,0)$. Přestože jste je nakonec zahrnuli ve výsledných předpisech pro řešení, je nutné je vyšetřit zvlášť, protože ono počáteční dělení není ekvivalentní úpravou.

Jelikož tříbodový rozsah byl v této úloze příliš hrubý, vypomáhal jsem si i na imaginární ose.

4. úloha

Nechť x je reálné číslo. Zjistěte, pro která přirozená k má rovnice $x^2 + 1 = k\lfloor x \rfloor$ řešení. Symbolem $\lfloor y \rfloor$ rozumíme dolní celou část reálného čísla y.

Pro $k = 1$ snadno vidíme např. z AG nerovnosti, že platí $x^2 + 1 \geq 2|x| \geq |x| \geq x \geq \lfloor x \rfloor$, přičemž rovnost nikdy nenastane (první nerovnost je neostrá jen pro $x = \pm 1$, druhá jen pro $x = 0$). Ukážeme, že pro $k \geq 2$ už má rovnice řešení vždy. Uvažujme funkci $f(x) = x^2 + 1 - k\lfloor x \rfloor$. Ta je na každém z intervalů $\langle n, n+1)$ rostoucí a spojitá a v každém bodě $n \in \mathbb{N}$ klesne o jedničku. Jelikož je navíc $f(1) = 2 - k \leq 0$ a $f(k) = 1 > 0$, snadno vidíme, že graf funkce f musí někde protnout osu x (nakresli si obrázek). Je tedy jasné, že rovnice v zadání (ekvivalentní rovnici $f(x) = 0$) má alespoň jedno řešení.

Poznámka: Alternativním řešením pro $k \geq 2$ je postřeh a ověření skutečnosti, že $x = \sqrt{k^2 - k - 1}$ je řešením zadané rovnice.

Poznámky opravovatele: Najjednoduchšie bolo asi nájsť explicitné riešenie v závislosti na k, kde stačilo nezabudnúť overiť obidve nerovnosti v definícii celej časti. Elegentnejšie existenčné riešenie (pozri vzorák) je iba trošku zložitejšie. Pozor na fakt, že načrtnutý graf bez popisu priebehu nie je riešením. No a $+i$ som dal za rozbor počtu riešení v závislosti na k.

5. úloha

Pro která přirozená n má polynom $x^n - 2x^{n-1} + 3x^{n-2} - \cdots + (-1)^n(n+1)$ všechny kořeny reálné?

Pro $n = 1$ má zadaný polynom tvar $x - 2$, má tedy jediný kořen 2 a tedy všechny kořeny reálné. Pro $n \geq 2$ ukážeme, že existuje alespoň jeden komplexní kořen. Předpokládejme pro spor, že všechny kořeny jsou reálné, a označme si je po řadě $x_1, \ldots, x_n$. Podle Viètových vztahů platí

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = 2,$$

$$\sum_{1 \leq i < j \leq n} x_i x_j = 3.$$

Jednoduchým výpočtem dostáváme

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i \right)^2 - 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} x_i x_j = 4 - 6 = -2,$$

což je spor s předpokladem, že všechny kořeny jsou reálné.

Poznámky opravovatele: Nejčastější přístup k řešení úlohy využíval Viètovy vztahy. Většinou jste volili vztahy $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 2$ a $x_1 x_2 \cdots x_n = n+1$, ukázali jste, že rovnice nemá záporné kořeny, neboť pro záporná x jsou všechny sčítance kladné (nebo všechny záporné, podle parity n). Pak už se dala využít AG nerovnost. Objevila se i řešení využívající odhadů průběhu polynomu; pokud byla příliš těžkopádná, tak jsem strhával i.

Další odstavec nechť přeskočí lidé, kteří se zatím nesetkali s pojmem derivace. Označme si $p(x)$ polynom ze zadání. Počet extrémů polymonu lze dobře odhadnout derivací polynomu $(1 + x)^2 p(x)$, kde vypadne spousta členů. Nejhezčí řešení bylo dle *Kataríny Quittnerové*: Podle Rolleovy věty mezi dvěma různými kořeny polynomu existuje kořen derivace polynomu. Derivací polynomu s kořenem s násobností $k \geq 1$ se ukáže, že derivace polynomu má tento kořen s násobností $k-1$. Dále pro spor předpokládejme, že všechny kořeny jsou reálné, potom dle výše ukázaného má $(n-2)$. derivace polynomu oba své kořeny reálné.[4] Výsledný polynom $\frac{n!}{2}x^2 - 2(n-1)!x + 3(n-2)!$ však nemá pro $n \geq 2$ kořeny reálné.

6. úloha

Nalezněte všechna řešení rovnice

$$\sqrt[3]{x^2+2x+4} + \sqrt[3]{31-2x-x^2} = 5\,.$$

Označme si

$$a := \sqrt[3]{x^2+2x+4}, \quad b := \sqrt[3]{31-2x-x^2}.$$

Ze zadání dostaneme

$$a+b=5, \quad a^3+b^3=35.$$

Toto je soustava symetrických rovnic, na jejíž řešení použijeme obvyklou metodu: označíme $c := a+b, d := ab$. Na základě identity $a^3+b^3 = (a+b)^3 - 3(a+b)ab$ vypočteme $c=5$, $d=6$. Čísla a, b jsou proto kořeny kvadratické rovnice $y^2-5y+6=0$ – máme dvě možnosti: $a=2$, $b=3$ a $a=3$, $b=2$.

Z $a=2$ nám vyjdou řešení $x_1 = -1-\sqrt{5}$, $x_2 = -1+\sqrt{5}$. Z $b=3$ nám vyjdou tatáž dvě řešení. Tato dvě čísla jsou tedy řešením původní rovnice (první odmocnina je totiž rovna 2 a druhá je rovna 3).

Z $a=3$ nám vyjdou řešení $x_1 = -1-2\sqrt{6}, x_2 = -1+2\sqrt{6}$. Z $b=2$ nám opět vyjdou tatáž dvě řešení. Tato dvě čísla jsou tedy rovněž řešením původní rovnice.

Závěr: rovnice má právě 4 řešení, a to $-1-\sqrt{5}$, $-1+\sqrt{5}$, $-1-2\sqrt{6}$, $-1+2\sqrt{6}$.

Poznámky opravovatele: Většina řešitelů měla příklad správně. Téměř všichni provedli substituci a podle toho, jakou substituci zvolili, bylo řešení více či méně elegantní. Jelikož příklad byl na úlohu za pět bodů docela jednoduchý, strhával jsem za méně elegantní řešení (tj. za zbytečné umocňování, za výskyt příliš velkých čísel či za derivování) jeden až dva imaginární body. Vyskytlo se i několik řešitelů, kteří se při úpravách spletli a ke správnému řešení nedošli. Pokud byl jejich postup správný, dostali čtyři body, když se chyba vyskytla na konci řešení, nebo tři body, když šlo o chybu na začátku, která však neovlivnila postup, ale pouze výsledek.

7. úloha

Nalezněte všechna reálná řešení rovnice

$$x^6 - x^5 - 4x^4 + 5x^3 - 41x^2 + 36x - 36 = 0.$$

[4] Místo Rolleovy věty lze k odvození této skutečnosti použít zajímavé tvrzení: Nechť p je nekonstantní polynom s komplexními koeficienty. Pak všechny kořeny jeho derivace leží v konvexním obalu jeho kořenů (komplexní čísla zde interpretujeme jako body v Gaussově rovině).

Dosazením snadno ověříme, že ± 3, $\pm 2i$ a $\frac{1\pm\sqrt{3}i}{2}$ řeší naši rovnici. Polynom šestého stupně má přesně šest komplexních řešení, takže toto jsou všechna řešení, jedinými reálnými řešeními jsou tedy ± 3.

Tak a teď jak se na to přijde. Vyzkoušíme-li pár celočíselných kořenů (mimochodem: všechna racionální řešení naší rovnice jsou celá čísla dělící číslo 36, rozmyslete si proč, zobecněte a zapamatujte si!), najdeme snadno řešení ± 3. Zadaný polynom je tedy dělitelný polynomem $(x+3)(x-3) = x^2 - 9$. Vydělíme:

$$x^6 - x^5 - 4x^4 + 5x^3 - 41x^2 + 36x - 36 = (x^2 - 9)(x^4 - x^3 + 5x^2 - 4x + 4)\,.$$

Pokud si koeficient 5 u x^2 ve druhé závorce představíme jako $1+4$, nalezneme snadno rozklad

$$x^4 - x^3 + 5x^2 - 4x + 4 = (x^2 - x + 1)(x^2 + 4)\,.$$

Zbývá vyřešit dvě kvadratické rovnice.

8. úloha

Rovnice $(x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_n) = 1$ (všechna a_i jsou reálná) má n (různých) reálných řešení r_1, r_2, ... , r_n. Jaký je minimální počet reálných řešení (v závislosti na n) rovnice $(x-r_1)(x-r_2)\cdots(x-r_n) = -1$?

Tento počet je $\lceil n/2 \rceil$. Polynom $P(x) = (x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_n)-1$ má u x^n koeficient 1, a každé z navzájem různých čísel r_1, r_2, ... , r_n je jeho kořenem. Platí tedy

$$(x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_n) - 1 = (x-r_1)(x-r_2)\cdots(x-r_n)\,.$$

Rovnici $(x-r_1)(x-r_2)\cdots(x-r_n) = -1$ proto řeší každé z čísel a_1, a_2, ... , a_n a žádné jiné. Tato rovnice může mít maximálně n různých kořenů, ovšem může jich mít méně, pokud některá z a-ček jsou stejná, budeme se snažit, abych jich stejných bylo co nejvíce; přitom však musíme dodržet podmínku, že $P(x)$ má n různých reálných kořenů. Předpokládejme búno, že $a_1 \le a_2 \le \cdots \le a_n$ a rozlišme dva případy.

Číslo n je liché. Označme $n = 2k+1$. Snadno nahlédneme, že platí

- Žádné z čísel a_i není kořenem $P(x)$.
- $P(x)$ nemá žádný kořen v intervalu $(-\infty, a_1)$.
- $P(x)$ má přesně jeden kořen v intervalu (a_n, ∞).
- $P(x)$ nemá žádný kořen v intervalech (a_2, a_3), (a_4, a_5), ... , (a_{n-1}, a_n).
- $P(x)$ má nejvýše dva kořeny v každém z intervalů (a_1, a_2), (a_3, a_4), ... , (a_{n-2}, a_{n-1}). Přitom má-li příslušný interval délku větší než dva, pak na něm $P(x)$ opravdu dva kořeny má. Odtud vidíme, že $P(x)$ má nejvýše $2k+1 = n$ kořenů (to je ostatně jasné z toho, že je to polynom n-tého stupně) a že aby měl tolik kořenů je třeba, aby $a_1 < a_2$, $a_3 < a_4$, ... , $a_{n-2} < a_{n-1}$. Chceme-li, aby mezi a_i bylo co nejméně různých čísel, budeme tedy volit

$$a_1 < a_2 = a_3 < a_4 = a_5 < a_6 \ldots a_{n-2} < a_{n-1} = a_n$$

(a to tak, aby každý „skok“ měl délku větší než dva). Takto dostaneme čísla r_i, pro která bude mít zadaná rovnice $k+1=\lceil n/2\rceil$ řešení. Z předchozího je zároveň jasné, že lépe to nejde, neboli méně než $\lceil n/2\rceil$ řešení daná rovnice mít nemůže.

Číslo n je sudé. Postupujeme zcela analogicky, dojdeme k tomu, že minimální možný počet řešení je $n/2$.

Poznámky opravovatele: Drtivá většina těch, kteří úlohu vyřešili, správně našla všechna řešení vyšetřované rovnice. Za taková řešení jsem uděloval plný počet bodů. Několik řešitelů navíc diskutovalo, nakolik musí být kořeny různé, a přišli na to, že pro splnění podmínek zadání nemohou být žádná tři čísla a_i, a_j, a_k sobě rovná, z čehož již snadno vyvodili minimální počet různých řešení dané rovnice. Tato řešení jsem po zásluze odměnil ohodnocením $5+2i$.