Povídání ke třetí sérii

Při řešení úloh této série se Ti mohou hodit vzorce, které bychom zde chtěli shrnout. Předně jsou to součtové vzorce pro sinus, kosinus a tangens. Funkce tg není definovaná pro $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, kde k je celé. Všechny vzorce zde uvedené pro funkci tg platí jen tehdy, mají-li obě strany příslušné rovnosti smysl.

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta, \quad \sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta,$$

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta, \quad \cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta,$$

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}, \quad \operatorname{tg}(\alpha-\beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}{1 + \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}.$$

Z nich lze snadno odvodit následující vzorce:

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}, \quad \sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2},$$

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}, \quad \cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}.$$

A nakonec vzorce pro funkce dvojnásobného a polovičního argumentů:

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha, \quad \cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha, \quad \operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha},$$

$$\left|\sin\frac{\alpha}{2}\right| = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}, \quad \left|\cos\frac{\alpha}{2}\right| = \sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}, \quad \left|\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\right| = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}$$

Rozšiřme reálná čísla o tzv. imaginární jednotku i, pro kterou platí $i^2 = -1$. Toto rozšíření se nazývá komplexní čísla, která jsou tvaru $a + ib$. Sčítání a násobení je podobné jako u čísel reálných, tedy

$$(a+ib) + (c+id) = (a+c) + i(b+d),$$

$$(a+ib)\cdot(c+id) = (ac-bd) + i(bc+ad).$$

(Druhý vztah dostaneme roznásobením a využitím vztahu $i^2 = -1$.)

Nechť $\alpha = a + ib$, označme $\operatorname{Re}\alpha = a$, $\operatorname{Im}\alpha = b$, $|\alpha| = \sqrt{a^2+b^2}$. Potom lze každé α psát v tzv. goniometrickém tvaru $r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, stačí brát $r = |\alpha|$ a φ volit tak, aby $\cos\varphi = \frac{\operatorname{Re}\alpha}{|\alpha|}$ a $\sin\varphi = \frac{\operatorname{Im}\alpha}{|\alpha|}$.

Komplexní čísla jsme zavedli, abychom mohli uvést následující větu, která by vám mohla při zápolení s úlohami pomoci:

Věta. (Moivreova)

$$(r(\cos\varphi + i\sin\varphi))^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi).$$

3. série

Téma: Goniometrické funkce

Termín odeslání: 7. LEDNA 2002

1. ÚLOHA (3 BODY)
Nechť $|x| \leq 1$ je reálné číslo. Dokažte, že platí $|4x^3 - 3x| \leq 1$.

2. ÚLOHA (3 BODY)
Spočtěte $\sin 36°$. Tj. napište ho jako výraz, ve kterém se vyskytují pouze číselné konstanty, sčítání, odčítání, násobení, dělení a odmocniny.

3. ÚLOHA (3 BODY)
Určete všechna přirozená čísla n, pro která existuje polynom s celočíselnými koeficienty s kořenem $\sin \frac{\pi}{n}$.

4. ÚLOHA (5 BODŮ)
Označme $f(\varphi) = \sin \varphi + \sin 2\varphi + \cdots + \sin 1000\varphi$. Dokažte, že součet kořenů této funkce na intervalu $\langle 0, 2\pi \rangle$ je 2001π.

5. ÚLOHA (5 BODŮ)
Ukažte, že $\operatorname{tg} 20° \operatorname{tg} 40° \operatorname{tg} 60° \operatorname{tg} 80° = 3$.

6. ÚLOHA (5 BODŮ)
Ukažte, že existuje přirozené číslo $n \geq 2$ takové, že součet $\sum_{\substack{j,k=1\\ j\neq k}}^{n} \sin \frac{j\pi}{13} \cos \frac{k\pi}{17}$ je celé číslo.

7. ÚLOHA (5 BODŮ)
Ukažte, že $\frac{\arccos \frac{1}{3}}{\pi}$ je iracionální.

8. ÚLOHA (5 BODŮ)
Ukažte, že $\sum_{k=1}^{n} \operatorname{tg}^2 \frac{k\pi}{2n+1} = n(2n+1)$.

Řešení 3. série

1. úloha
Nechť $|x| \leq 1$ je reálné číslo. Dokažte, že platí $|4x^3 - 3x| \leq 1$.

Jelikož je $|x| \leq 1$, existuje takové φ, že $\cos\varphi = x$ (dokonce jich existuje nekonečně mnoho). Vezměme si jedno takové φ a upravujme:

$$4x^3 - 3x = 4\cos^3\varphi - 3\cos\varphi = \cos\varphi(2\cos^2\varphi - 1) - 2(1 - \cos^2\varphi)\cos\varphi =$$

$$= \cos\varphi(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi) - 2\sin^2\varphi\cos\varphi = \cos\varphi\cos 2\varphi - \sin\varphi\sin 2\varphi = \cos 3\varphi.$$

Nezbývá než podotknout, že je $|4x^3 - 3x| = |\cos 3\varphi| \leq 1$, což jsme měli dokázat.

Poznámky opravovatele: Ti, jejichž řešení podobně jako vzorové využívalo goniometrických vzorců, vpodstatě žádné chyby nedělali.

Úloha však šla řešit i jinými způsoby. Mezi došlými řešeními se často objevovalo vyšetřování průběhu funkce na daném intervalu. K tomu bych měl následující upozornění. Abychom mohli s jistotou tvrdit, že funkce je na intervalu omezená, musíme najít její globální extrémy a musíme také vyšetřit spojitost (o které se nikdo z vás nezmínil). Ti, kteří se spokojili s vyšetřením lokálních extrémů, se budou muset spokojit i s nižším ohodnocením, neboť z těchto omezenost nevyplývá.

Mnoho z vás použilo standardní metodu řešení nerovnic s absolutními hodnotami. Zde je ale třeba dbát na to, že pokud vyjdeme z výsledku a dospějeme k nějakému známému tvrzení, je třeba tento postup provést ještě nazpátek, případně se alespoň zmínit o ekvivalentnosti úprav.

Taktéž důkaz grafem nelze za řešení považovat, zvláště je-li špatně nakreslen.

2. úloha

Spočtěte $\sin 36^\circ$. Tj. napište ho jako výraz, ve kterém se vyskytují pouze číselné konstanty, sčítání, odčítání, násobení, dělení a odmocniny.

Úlohu bylo možné vyřešit několika způsoby, my si zde ukážeme dva z nich.

První řešení: Využijeme Moivreovu větu[1].

Z této věty dostáváme, že

$$\cos 5x + i\sin 5x = (\cos x + i\sin x)^5 = \cos^5 x + 5i\cos^4 x\sin x - 10\cos^3 x\sin^2 x -$$

$$-10i\cos^2 x\sin^3 x + 5\cos x\sin^4 x + i\sin^5 x.$$

Porovnáním imaginárních částí předchozího výrazu a dosazením $1 - \sin^2 x$ za $\cos^2 x$ dostáváme vzorec

$$\sin 5x = 16\sin^5 x - 20\sin^3 x + 5\sin x.$$

Dosaďme $x = 36^\circ$ a označme si $y = \sin x$. Dostáváme rovnici

$$16y^5 - 20y^3 + 5y = 0$$

[1] viz např. J. Herman, R. Kučera, J. Šimša, *Metody řešení matematických úloh I.*

s kořeny $y_1 = 0$, $y_{2,3,4,5} = \pm\frac{1}{2}\sqrt{\frac{5\pm\sqrt{5}}{2}}$. Hledaná hodnota je $0 \le \sin 36° \le \frac{\sqrt{2}}{2} = \sin 45°$, a tak

$$\sin 36° = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}.$$

Druhé řešení: Buď $ABCDE$ nějaký pravidelný pětiúhelník v rovině se stranou délky 1. Označme $x = |AC|$ délku jeho úhlopříčky. Využijeme Ptolemaiovu větu. Jelikož čtyřúhelník $ABCD$ je zjevně tětivový, platí

$$|AB||CD| + |AD||BC| = |AC||BD|,$$

neboli

$$1 + x = x^2.$$

S přihlédnutím k nerovnosti $x > 0$ dostáváme řešení $x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Nyní si stačí uvědomit, že trojúhelník ABD je rovnoramenný se základnou délky 1 a rameny délky x a má u vrcholu D úhel $36°$. Podle kosinové věty je

$$1^2 = x^2 + x^2 - 2x^2\cos 36°.$$

Odtud už snadno dopočítáme $\cos 36° = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$ a s přihlédnutím k nerovnosti $\sin 36° > 0$ dostáváme

$$\sin 36° = \sqrt{1-\cos^2 36°} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}.$$

Poznámka: Úlohu lze také řešit pouhým využíváním součtových vzorců a řešením vztahů mezi sin a cos úhlů $18°$, $36°$ a $72°$.

Poznámky opravovatele: Čtyři řešitelé použili Taylorovu řadu pro sinus a výsledek zapsali pomocí třech teček nebo jako sumu od nuly do nekonečna. Výsledek měl být ale zapsán jen pomocí konstant, sčítaní, odčítání, násobení, dělení a odmocnin, takže tečky ani řecká písmena povoleny nebyly. Kdo si myslí, že řada (nekonečný součet) je definována tak, že se sčítá, sčítá a sčítá, až se dosčítá do nekonečna, ten se mýlí, řada je definována jako limita částečných součtů a limity byly také zakázány. Toto řešení bylo tak triviální, že jsem za něj nedal ani i. Hodně řešitelů zapomínalo při násobení (dělení) rovnice ověřit, jestli násobí (dělí) nenulovým výrazem, a při odmocňování nepsalo absolutní hodnotu ($\sqrt{x^2} = |x|$, zkus si pro x záporné), čímž ztrácelo další kořeny dané rovnice. Při větším počtu těchto chyb jsem strhával i.

3. úloha

Určete všechna přirozená čísla n, pro která existuje polynom s celočíselnými koeficienty s kořenem $\sin\frac{\pi}{n}$.

Ukážeme, že pro každé n takový polynom existuje. V podstatě jde o to formálně vyjádřit fakt, že pomocí čísel $\sin\frac{\pi}{n}$ a $\cos\frac{\pi}{n}$ lze díky součtovým vzorcům násobením a sčítáním vyjádřit číslo $\sin\pi = 0$ a vhodně použít vztahu $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$.

Lemma. *Pro každé přirozené n existují polynomy $p_n(t)$, $q_n(t)$, $p'_n(t)$ a $q'_n(t)$ s celočíselnými koeficienty takové, že platí*

$$\sin(nx) = p_n(\sin x) + \cos x q_n(\sin x)\,,$$

$$\cos(nx) = p'_n(\sin x) + \cos x q'_n(\sin x)\,.$$

Důkaz. Vlastně jde jen o to opakovaně použít součtové vzorce pro sin a cos a vztahu $\cos^2 x = 1-\sin^2 x$. Formálně budeme postupovat matematickou indukcí. Pro $n = 1$ samozřejmě volíme $p_1(t) = t$, $q_1(t) = 0$, $p'_1(t) = 0$ a $q'_1(t) = 1$. Pro druhý indukční krok předpokládejme, že tvrzení lemmatu platí pro $n = k$, a budeme ho dokazovat pro $n = k+1$. Upravujme:

$$\sin((k+1)x) = \sin(kx + x) = \sin(kx)\cos x + \cos(kx)\sin x =$$

$$= \cos x p_k(\sin x) + \cos^2 x q_k(\sin x) + \sin x p'_k(\sin x) + \cos x \sin x q'_k(\sin x) =$$

$$= (1-\sin^2 x)q_k(\sin x) + \sin x p'_k(\sin x) + \cos x(p_k(\sin x) + \sin x q'_k(\sin x)),$$

$$\cos((k+1)x) = \cos(kx + x) = \cos(kx)\cos x - \sin(kx)\sin x =$$

$$= \cos x p'_k(\sin x) + \cos^2 x q'_k(\sin x) - \sin x p_k(\sin x) - \cos x \sin x q_k(\sin x) =$$

$$= (1-\sin^2 x)q'_k(\sin x) - \sin x p_k(\sin x) + \cos x(p'_k(\sin x) - \sin x q_k(\sin x)).$$

Je tedy vidět, že stačí volit

$$p_{k+1}(t) = (1-t^2)q_k(t) + tp'_k(t), \qquad q_{k+1}(t) = p_k(t) + tq'_k(t),$$

$$p'_{k+1}(t) = (1-t^2)q'_k(t) - tp_k(t), \qquad q'_{k+1}(t) = p'_k(t) - tq_k(t),$$

což jsou polynomy s celočíselnými koeficienty. Tím je lemma dokázané.

Poznámka: Jednoduše lze lemma dokázat také z Moivreovy věty.

Nyní již úlohu můžeme poměrně snadno vyřešit. Stačí si uvědomit, že

$$0 = \sin\pi = \sin\left(n\frac{\pi}{n}\right) = p_n\left(\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)\right) + \cos\left(\frac{\pi}{n}\right) q_n\left(\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)\right),$$

a tedy

$$p_n^2\left(\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)\right) = \left(1-\sin^2\left(\frac{\pi}{n}\right)\right) q_n^2\left(\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)\right).$$

Odtud už vidíme, že $\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)$ je kořenem polynomu

$$r_n(t) = p_n^2(t) - (1-t^2)q_n^2(t),$$

který má celočíselné koeficienty.

Poznámky opravovatele: Polovina rešitelů v této úloze vycházela z toho, že pokud koeficienty polynomu mají být celá čísla, pak i kořeny polynomu musí být celá čísla, resp. nějaká snadno zapsatelná, a tudíž vyhovují jen taková n, pro která $\sin(\frac{\pi}{n})$ je nějaké snadno zapsatelné číslo. Tato zcela chybná úvaha vedla jen ke konečnému počtu vhodných n (většinou 1, 2, 6), což zdaleka nestačí. Tito řešitelé dostali 0 bodů. Ve většině správných řešení vycházeli řešitelé z Moivreova vzorce $(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi)$. Levou stranu pak roznásobili podle binomické věty a užitím rovnosti $\cos^2\varphi = 1 - \sin^2\varphi$ a položením $x = \sin\frac{\pi}{n}$ získali požadovaný polynom.

4. úloha

Označme $f(\varphi) = \sin\varphi + \sin 2\varphi + \cdots + \sin 1000\varphi$. Dokažte, že součet kořenů této funkce na intervalu $\langle 0, 2\pi\rangle$ je 2001π.

Lemma. *Nechť* $\sin\frac{\varphi}{2} \neq 0$, *pak je*

$$\sin\varphi + \sin 2\varphi + \cdots + \sin n\varphi = \frac{\sin\frac{n\varphi}{2}\sin\frac{(n+1)\varphi}{2}}{\sin\frac{\varphi}{2}}.$$

Důkaz. Provedeme matematickou indukcí. Pro $n = 1$ vztah zjevně platí. Nyní předpokládejme, že vztah platí pro $n = k$, pak

$$\sin\varphi + \sin 2\varphi + \cdots + \sin(k+1)\varphi = \frac{\sin\frac{k\varphi}{2}\sin\frac{(k+1)\varphi}{2}}{\sin\frac{\varphi}{2}} + \sin(k+1)\varphi =$$

$$= \frac{\sin\frac{k\varphi}{2}\sin\frac{(k+1)\varphi}{2}}{\sin\frac{\varphi}{2}} + 2\sin\frac{(k+1)\varphi}{2}\cos\frac{(k+1)\varphi}{2} =$$

$$= \frac{\sin\frac{(k+1)\varphi}{2}}{\sin\frac{\varphi}{2}}\left(\sin\frac{k\varphi}{2} + 2\cos\frac{(k+1)\varphi}{2}\sin\frac{\varphi}{2}\right) = \frac{\sin\frac{(k+1)\varphi}{2}\sin\frac{(k+2)\varphi}{2}}{\sin\frac{\varphi}{2}},$$

přičemž jsme využili rovnost

$$2\cos x\sin y = \sin(x+y) - \sin(x-y).$$

Pokud ji neznáte, lze ji získat odečtením vzorců pro sinus součtu a rozdílu

$$\sin(x+y) = \sin x\cos y + \cos x\sin y,$$

$$\sin(x-y) = \sin x\cos y - \cos x\sin y.$$

Hodnoty $\varphi = 0$ a $\varphi = 2\pi$ jsou zjevně kořeny funkce $f(\varphi)$, zaměřme se proto na interval $(0, 2\pi)$. Čísla v tomto intervalu splňují předpoklad lemmatu, proto hledáme všechna φ taková, že $\sin\frac{1000\varphi}{2} = 0$ nebo $\sin\frac{1001\varphi}{2} = 0$, neboli $\varphi = \frac{2k\pi}{1000}$ nebo $\varphi = \frac{2l\pi}{1001}$ pro nějaká k, l celá. Protože jsme omezeni na interval $(0, 2\pi)$, volíme $k = 1, 2, \ldots 999$ a $l = 1, 2, \ldots 1000$. Tím jsme našli všechny kořeny $p(\varphi)$ v daném intervalu a je vidět, že jsou po dvou různé. Zbývá je tedy jen sečíst, pro hledaný součet s platí

$$s = 0 + 2\pi + \sum_{k=1}^{999} \frac{2k\pi}{1000} + \sum_{l=1}^{1000} \frac{2l\pi}{1001} = 2\pi + 999\pi + 1000\pi = 2001\pi.$$

Poznámky opravovatele: Většinou řešitelé používali při hledání kořenů vzorec uvedený v autorském řešení, někteří si ale neuvědomili, že neplatí pro čísla 0 a 2π, a používali ho na celém intervalu $\langle 0, 2\pi\rangle$. Někteří řešitelé opomněli ověřit (nebo se aspoň zmínit), že nalezené kořeny jsou po dvou různé, nebo nějak nalezli kořeny a už nedokázali, že další neexistují.

Několik řešení spočívalo v postupném slučování jednotlivých členů dané funkce do dvojic (popř. pětic) a následném převádění na součin pomocí součtových vzorců.

5. úloha

Ukažte, že $\operatorname{tg} 20^\circ \operatorname{tg} 40^\circ \operatorname{tg} 60^\circ \operatorname{tg} 80^\circ = 3$.

Úlohu bylo možné vyřešit pouhým hraním si se součtovými vzorci. Pokud jsou $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{tg} y$ i $\operatorname{tg}(x + y)$ definované, platí

$$\operatorname{tg}(x + y) = \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y}{1 - \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y}.$$

Nyní tento vztah použijeme.

$$\operatorname{tg} 40^\circ \operatorname{tg} 80^\circ = \operatorname{tg}(60^\circ - 20^\circ) \operatorname{tg}(60^\circ + 20^\circ) =$$

$$= \frac{\operatorname{tg} 60^\circ - \operatorname{tg} 20^\circ}{1 + \operatorname{tg} 60^\circ \operatorname{tg} 20^\circ} \cdot \frac{\operatorname{tg} 60^\circ + \operatorname{tg} 20^\circ}{1 - \operatorname{tg} 60^\circ \operatorname{tg} 20^\circ} = \frac{3 - \operatorname{tg}^2 20^\circ}{1 - 3\operatorname{tg}^2 20^\circ}.$$

Dosazením do součtového vzorce snadno odvodíme vztah pro tg trojnásobného úhlu.

$$\operatorname{tg} 3x = \operatorname{tg} x \, \frac{3 - \operatorname{tg}^2 x}{1 - 3\operatorname{tg}^2 x}.$$

Platí tedy

$$\operatorname{tg} 60^\circ = \operatorname{tg}(3 \cdot 20^\circ) = \operatorname{tg} 20^\circ \cdot \frac{3 - \operatorname{tg}^2 20^\circ}{1 - 3\operatorname{tg}^2 20^\circ} = \operatorname{tg} 20^\circ \operatorname{tg} 40^\circ \operatorname{tg} 80^\circ.$$

Nyní je již zřejmé, že platí

$$\operatorname{tg} 20^\circ \operatorname{tg} 40^\circ \operatorname{tg} 60^\circ \operatorname{tg} 80^\circ = \operatorname{tg}^2 60^\circ = 3.$$

Poznámka: Řešení jednoduše plyne i z řešení 8. úlohy. Z Vièteových vztahů dostáváme

$$\operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{2n+1} \cdots \operatorname{tg}^2 \frac{n\pi}{2n+1} = \binom{2n+1}{1}.$$

Po odmocnění a dosazení $n = 4$ dostáváme hledanou rovnost.

Poznámky opravovatele: Většina řešitelů si s touto úlohou poradila dobře. Jediným častějším problémem byl „oblíbený“ způsob důkazu – z dokazovaného tvrzení se odvodí pravda a o tvrzení se prohlásí, že je tím dokázáno.

Ti, kteří si problém uvědomili, na konec poznamenali, že všechny úpravy byly ekvivalentní (což ale nebyla vždy pravda). Doporučuji raději postupovat od známých tvrzení k dokazovanému.

Dva řešitelé si všimli možnosti převedení problému na speciální případ osmé úlohy s $n = 4$. Byli za to odměněni $+2i$.

6. úloha

Ukažte, že existuje přirozené číslo $n \geq 2$ takové, že součet $\sum_{\substack{j,k=1 \\ j\neq k}}^{n} \sin \frac{j\pi}{13} \cos \frac{k\pi}{17}$ je celé číslo.

Ukážeme, že úloha má dokonce nekonečně mnoho řešení $n \geq 2$.

Lemma. *Pro každé přirozené n a přirozené k, které není násobkem n, platí* $\sum_{j=1}^{n} \sin \frac{2kj\pi}{n} = 0.$

Důkaz. Na začátek poznamenejme, že toto tvrzení plyne snadno z lemmatu dokázaného ve čtvrté úloze. My si zde však ukážeme jiný (a elegantní) způsob, jak toto lemma dokázat.

Uvažujme v rovině vektory $v_1, v_2, \ldots, v_n$ o složkách

$$v_j = \left(\cos \frac{2kj\pi}{n}, \sin \frac{2kj\pi}{n} \right).$$

Představme si tyto vektory nakreslené do roviny, začátky budou umístěné v počátku. Všechny vektory jsou zřejmě jednotkové, vycházejí z počátku v úhlech $\frac{2kj\pi}{n}$. Jejich konce zřejmě tvoří vrcholy pravidelného l-úhelníku pro $l = \frac{n}{NSD(n,k)} \geq 2$ (což si není těžké rozmyslet), do každého vrcholu směřuje přesně $NSD(n,k)$ vektorů. Pro vektor $v = \sum_{j=1}^{n} v_j$ tedy musí platit, že se nezmění po otočení o úhel $2\pi/l$ (protože otočením všech vektorů v_j dostaneme zase tytéž vektory, jen v jiném pořadí). To je však možné pouze v případě $v = (0,0)$. Druhá složka vektoru v je ovšem také součtem druhých složek vektorů v_j, čímž dostáváme požadovanou rovnost

$$0 = \sum_{j=1}^{n} \sin \frac{2kj\pi}{n}.$$

Tím je lemma dokázané.

Nyní přejděme k řešení samotné úlohy. Jak jsme již naznačili výše, snažíme se nalézt vhodné $n > 1$ tak, aby součet byl nulový. Použitím známého vzorce

$$\sin x \cos y = \frac{1}{2}\left(\sin\left(x+y\right) + \sin\left(x-y\right)\right)$$

dostáváme

$$\sum_{j=1}^{442} \sin\frac{j\pi}{13}\cos\frac{j\pi}{17} = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{442}\sin\frac{30j\pi}{221} + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{442}\sin\frac{4j\pi}{221}$$

což je podle lemmatu (volíme $n = 442$ a $k = 30$, resp. $k = 4$) nulové.

Zbývá upravit celou sumu pro $n = 442$, ta je rovna

$$\sum_{\substack{j,k=1\\ j\neq k}}^{442} \sin\frac{j\pi}{13}\cos\frac{k\pi}{17} = \sum_{j,k=1}^{442}\sin\frac{j\pi}{13}\cos\frac{k\pi}{17} - \sum_{j=1}^{442}\sin\frac{j\pi}{13}\cos\frac{j\pi}{17} =$$

$$= \sum_{k=1}^{442}\left(\sum_{j=1}^{442}\sin\frac{j\pi}{13}\cos\frac{k\pi}{17}\right) = \sum_{k=1}^{442}\left(\cos\frac{k\pi}{17}\sum_{j=1}^{442}\sin\frac{j\pi}{13}\right) = \sum_{k=1}^{442}\left(\cos\frac{k\pi}{17}\cdot 0\right) = 0,$$

přičemž jsme v předposlední rovnosti opět využili naše lemma. Je vidět, že také vyhovuje libovolné n, které je násobkem[2] 442.

Poznámky opravovatele: Tentokrát jsem byl s velkou většinou došlých řešení spokojen; pouze v jednom případě jsem strhnul jeden bod. Nejčastějším výsledkem bylo (stejně jako ve vzorovém řešení) $n = 442$, ale objevovaly se i jiné výsledky.

7. úloha

Ukažte, že $\frac{\arccos\frac{1}{3}}{\pi}$ je iracionální.

Označme $\alpha = \arccos\frac{1}{3} > 0$. Předpokládejme, že $\frac{\alpha}{\pi}$ je racionální, tedy že existují $k, l \in \mathbb{N}$ taková, že $\frac{\alpha}{\pi} = \frac{k}{l}$, neboli $l\alpha = k\pi$, a když obě strany vynásobíme dvěma a „zkosínujeme“, dostáváme $\cos(m\alpha) = \cos(2k\pi) = 1$, kde $m = 2l > 0$ je nějaké přirozené číslo.

Naším cílem je ukázat, že $\cos(m\alpha)$ se nikdy pro $m > 0$ jedničce rovnat nebude, tak dostaneme spor (a tedy dokážeme, že $\frac{\alpha}{\pi}$ je iracionální). Jak na to?

Podíváme se, čemu se rovná $\cos(m\alpha)$ pro nějaká menší m:

$$\cos(0\alpha) = 1,$$

$$\cos(1\alpha) = \frac{1}{3}$$

[2] Existuje však ještě spousta dalších řešení (pozn. aut.).

a využijeme vzorce:

$$\cos(x+y) = 2\cos x\cos y - \cos(x-y),$$

který, pokud jej neznáte, můžete dostat jako součet vzorců pro kosinus součtu a rozdílu

$$\cos(x+y) = \cos x\cos y - \sin x\sin y,$$

$$\cos(x-y) = \cos x\cos y + \sin x\sin y.$$

Nyní není na škodu spočítat si hodnoty $\cos(m\alpha)$ pro dalších několik m, a pokud to uděláte, zajisté si povšimnete, že jsou tvaru $\frac{s_m}{3^m}$, kde s_m je nějaké celé číslo nedělitelné třemi.

To se snadno dokáže matematickou indukcí podle m. Pro m rovno 0 či 1 toto tvrzení platí (viz výše), a pokud platí pro všechna $m < n$, spočteme podle výše uvedeného vzorce:

$$\cos(n\alpha) = 2\cos((n-1)\alpha)\cos\alpha - \cos((n-2)\cdot\alpha) =$$

$$= 2\frac{s_{n-1}}{3^n} - \frac{s_{n-2}}{3^{n-2}} = \frac{2s_{n-1} - 9s_{n-2}}{3^n},$$

přičemž $s_n = 2s_{n-1} - 9s_{n-2}$ je číslo, které zajisté není dělitelné třemi, výraz má tedy požadovaný tvar.

Dokázali jsme, že pro m přirozené $\cos(m\alpha) = \frac{s_m}{3^m}$, kde s_m není dělitelné třemi, a $\cos(m\alpha)$ je tedy jistě různý od 1 pro $m > 0$.

Poznámky opravovatele: Většina správných řešení využila úvahy podobné vzorovému řešení. Předpokládali racionalitu podílu $\frac{\arccos\frac{1}{3}}{\pi}$ a po několika krocích došli ke sporu. $+2i$ obdržela *Katarína Quittnerová* za důkaz, že pro všechna lichá n je $\frac{\arccos\frac{1}{\sqrt{n}}}{\pi}$ iracionální.

8. úloha

Ukažte, že $\sum\limits_{k=1}^{n} \operatorname{tg}^2 \frac{k\pi}{2n+1} = n(2n+1)$.

Využijeme Moivreovu větu. Jejím použitím dostáváme vztah

$$\sin(2n+1)\alpha = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{2n+1}{2k+1} \cos^{2n-2k}\alpha \sin^{2k+1}\alpha.$$

Dále uvažujme ta α, pro něž $\cos\alpha \neq 0$.

Vydělením $\cos^{2n+1}\alpha$ a dosazením $\alpha_k = \frac{k\pi}{2n+1}$, $k = 1, \ldots, n$ (pro tato α je $\sin(2n+1)\alpha = 0$) dostáváme

$$0 = \binom{2n+1}{1}\operatorname{tg}\alpha_k - \binom{2n+1}{3}\operatorname{tg}^3\alpha_k + \cdots + (-1)^n\binom{2n+1}{2n+1}\operatorname{tg}^{2n+1}\alpha_k.$$

Rovnici můžeme vydělit $\operatorname{tg} \alpha_k$ (pro $k = 1, \ldots, n$ je $\operatorname{tg} \alpha$ nenulové) a dostáváme

$$0 = \binom{2n+1}{1} - \binom{2n+1}{3} \operatorname{tg}^2 \alpha_k + \cdots + (-1)^n \binom{2n+1}{2n+1} \operatorname{tg}^{2n} \alpha_k.$$

Odtud je okamžitě vidět, že po dvou různá čísla $\operatorname{tg}^2 \alpha_k$, $k = 1, \ldots, n$ jsou (všechny) kořeny polynomu

$$x^n \binom{2n+1}{2n+1} - x^{n-1} \binom{2n+1}{2n-1} + \cdots + (-1)^n \binom{2n+1}{1} = 0.$$

Zbývá využít Viètovy vztahy. Pro součet kořenů dostáváme

$$\sum_{k=1}^{n} \operatorname{tg}^2 \frac{k\pi}{2n+1} = \binom{2n+1}{2n-1} = n(2n+1).$$

Poznámky opravovatele: Většina řešitelů poslala řešení podobné vzorovému. *Katarína Quittnerová* se pokusila vyřešit úlohu jiným způsobem, avšak nebyla úspěšná.