Povídání ke čtvrté sérii

V tomto krátkém úvodu shrneme několik vět z rovinné geometrie, které by se Ti mohly při řešení úloh hodit. Některé z nich pravděpodobně znáš ze střední školy, některé mohou být nové.

Věta. (O obvodovém a středovém úhlu) Nechť k je kružnice se středem S a AB její tětiva. Pak velikost úhlu $\sphericalangle AOB$ se nemění, probíhá-li O některý z oblouků kružnice k určených tětivou AB. Navíc je $|\sphericalangle AOB| = \frac{1}{2}\,|\sphericalangle ASB|$, kde úhlem $\sphericalangle ASB$ rozumíme vnější úhel v čtyřúhelníku $AOBS$.

Věta. (Mocnost bodu ke kružnici) Nechť k je kružnice se středem S a M bod. Nechť přímka p prochází bodem M a protíná k v bodech A a B. Pak číslo $|MA| \cdot |MB|$ nezávisí na volbě přímky p a je rovno hodnotě $|m^2 - r^2|$, kde $m = |MS|$ a r je poloměr k. Číslo $m^2 - r^2$ se nazývá mocnost bodu M ke kružnici k.

Věta. (sinová) V trojúhelníku ABC se standardním označením (R je poloměr kružnice opsané) platí

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R.$$

Věta. (Cévova) Nechť ABC je trojúhelník a A_1, B_1, C_1 leží po řadě na úsečkách BC, AC, AB. Pak přímky AA_1, BB_1, CC_1 se protínají v jednom bodě právě tehdy, když $\frac{|BA_1|}{|A_1C|} \cdot \frac{|CB_1|}{|B_1A|} \cdot \frac{|AC_1|}{|C_1B|} = 1$.

Věta. (Van Aubelova) Nechť v trojúhelníku ABC z minulé věty se příčky AA_1, BB_1, CC_1 protínají v bodě K. Pak $\frac{|AK|}{|KA_1|} = \frac{|AB_1|}{|B_1C|} + \frac{|AC_1|}{|C_1B|}$.

Věta. (Ptolemaiova) Nechť $ABCD$ je čtyřúhelník. Pak $|AC|\cdot|BD| \leq |AB|\cdot|CD|+|AD|\cdot|BC|$. Rovnost nastává právě tehdy, když čtyřúhelník $ABCD$ je tětivový.

Definice. (Kruhová inverze) Nechť je dán bod S a poloměr r. *Kruhovou inverzí* o středu S a poloměru r rozumíme zobrazení, které každému bodu $M \neq S$ přiřadí bod M' s vlastnostmi

(1) M' leží na polopřímce SM.
(2) $|SM| \cdot |SM'| = r^2$.

Věta. (Vlastnosti kruhové inverze)

(1) Množina samodružných bodů je kružnice o středu S a poloměru r. Vnějšek této kružnice se zobrazí na vnitřek a naopak (proto název „kruhová inverze").
(2) Dvakrát provedená kruhová inverze je identita (na celé rovině kromě bodu S).
(3) Přímka procházející bodem S se zobrazí sama na sebe. Přímka neprocházející bodem S se zobrazí na kružnici procházející bodem S a naopak. Kružnice neprocházející bodem S se zobrazí na kružnici neprocházející bodem S (ale pozor, příslušné středy kružnic se na sebe nezobrazí!).
(4) Kruhová inverze zachovává úhly, které svírají dvě protínající se křivky (učeně řečeno, kruhová inverze je konformní zobrazení).

4. série

Téma: Geometrie

Termín odeslání: 21. ledna 2002

1. úloha (3 body)
Nechť $ABCDEFGH$ je standardně značená krychle. Nalezněte nejkratší příčku úhlopříček AH a BE.

2. úloha (3 body)
Nazvěme dvojici mnohoúhelníků P, Q zaměnitelnou, pokud lze P rozdělit konečným počtem přímek na menší mnohoúhelníky, z nichž lze seskládat Q. Dokažte, že každý obdélník je zaměnitelný s nějakým čtvercem.

3. úloha (3 body)
V kruhu c_1 se středem O mějme dánu sečnu AB, která není průměrem. Nechť M je střed úsečky AB. Označme c_2 kružnici s průměrem OM. Buď P bod kružnice c_1 a T dotykový bod některé z tečen ke kružnici c_2 procházejících bodem P. Dokažte, že $|PA|^2 + |PB|^2 = 4|PT|^2$.

4. úloha (5 bodů)
Je dán trojúhelník ABC a úsečka délky d. Sestrojte rovnoramenný trojúhelník KLM, který má základnu délky $|KL| = d$ a jehož obsah je stejný jako obsah trojúhelníku ABC.

5. úloha (5 bodů)
Nechť jsou dány dvě soustředné kružnice k a l o poloměrech $r < R$ (k je vnitřní kružnice) a bod $P \in k$. Uvažujme libovolný bod $B \in l$. Přímka BP protíná kružnici l v bodu $C \neq B$ a kolmice k přímce BP procházející bodem P protíná kružnici k v bodě $A \neq P$. Najděte množinu všech možných hodnot výrazu $|AB|^2 + |AC|^2 + |BC|^2$, probíhá-li bod B kružnici l.

6. úloha (5 bodů)
Zkonstruujte pomocí pravítka a kružítka trojúhelník ABC, je-li dána délka strany AB, délka výšky na stranu AB a „délka“ osy úhlu γ (tím rozumíme vzdálenost bodu C od průsečíku osy úhlu γ se stranou AB). Diskutujte počet (neshodných) řešení.

7. úloha (5 bodů)
Nechť je dán rovnostranný trojúhelník ABC s výškou délky 1 a přímka p procházející bodem C rovnoběžná s AB. Kružnice k se středem na přímce p a poloměrem 1 protíná úsečky AC a BC po řadě v bodech K a L. Určete délku úsečky KL v závislosti na poloze středu kružnice k.

8. ÚLOHA (5 BODŮ)

Nechť je dán trojúhelník ABC a kružnice se středem O, která prochází body A, C a protíná úsečky AB a BC po řadě v různých bodech K a N. Nechť se kružnice opsané trojúhelníkům ABC a KBN protínají v různých bodech B a M. Dokažte, že úhel $\sphericalangle OMB$ je pravý.

9. ÚLOHA (5 BODŮ)

Nechť je pevně dán trojúhelník ABC. Uvnitř strany AB uvažujme bod D. Příčka CD dělí trojúhelník ABC na trojúhelníky ACD a BCD. Oběma vepíšeme kružnici a sestrojíme druhou společnou vnitřní tečnu těchto kružnic, která protne příčku CD v bodě E. Jaká je množina všech takto získaných bodů E, probíhá-li bod D vnitřní body úsečky AB?

Řešení 4. série

1. úloha

Nechť $ABCDEFGH$ je standardně značená krychle. Nalezněte nejkratší příčku úhlopříček AH a BE.

Jak známo, nejkratší příčka dvou přímek je na obě dvě kolmá (a existuje právě jedna, jsou-li mimoběžné). Hledaná příčka tedy musí být kolmá na AH i BE, tj. musí to být kolmice k rovině ACH (neboť $CH \parallel BE$). Jinými slovy, hledaná příčka musí být rovnoběžná s tělesovou úhlopříčkou DF.

Veďme bodem A přímku p rovnoběžnou s DF a bodem B přímku q rovnoběžnou s DF. Je jasné, že hledaná příčka leží v rovině AHp (protíná AH, je rovnoběžná s p) i v rovině BEq (protíná BE, je rovnoběžná s q). Sestrojit průsečnici těchto dvou rovin je již triviální úlohou. Poznamenejme, že zvolíme-li souřadný systém tak, že $A = [0,0,0]$, $B = [1,0,0]$, $D = [0,1,0]$ a $E = [0,0,1]$, výsledná příčka bude spojnicí bodů $X \in AH$ a $Y \in BE$, kde $X = [0, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}]$ a $Y = [\frac{1}{3}, 0, \frac{2}{3}]$. Její délka bude $|XY| = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

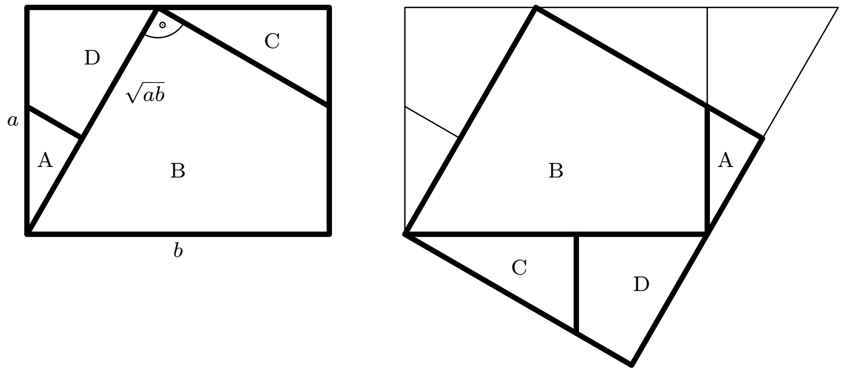
Poznámky opravovatele: Většina správných řešení využívala prostředků analytické geometrie. Tento způsob samozřejmě musel vést jednoznačně k cíli, ale zdaleka není tím nejjednodušším. Opravdu elegantní řešení se podařilo najít pouze *Janu Dočekalovi* a *Barboře Scholleové*, za což byli také náležitě ohodnoceni. Oba dva totiž vhodným pootočením krychle dokázali z jejího průmětu do roviny a na základě vhodných argumentů velmi rychle a efektně vyvodit správný výsledek.

Nejčastější chyby pramenily ze špatného popisu částí krychle. Pravé úhly se objevovaly tam, kde nejsou, apod. Doporučuji všem, kteří se takovýchto chyb dopustili, aby si je pečlivě prostudovali, není obtížné se jich vyvarovat. Někteří z vás si též neuvědomili, že nejkratší příčkou dvou mimoběžek je úsečka kolmá k oběma, to potom vedlo k chybným závěrům i předpokladům.

2. úloha

Nazvěme dvojici mnohoúhelníků P, Q zaměnitelnou, pokud lze P rozdělit konečným počtem přímek na menší mnohoúhelníky, z nichž lze seskládat Q. Dokažte, že každý obdélník je zaměnitelný s nějakým čtvercem.

Nejprve si uvědomme, že nemusíme stříhat podél přímek, ale zadání vyhovuje i stříhání podél lomených čar. To se snadno nahlédne – prostě se některá dělení nevyužijí. Dále si uvědomme, že pokud je geometrický objekt A zaměnitelný s B a B je zaměnitelný s C, je i A zaměnitelný s C. Tuto vlastnost dále využíváme, a tak si ji pořádně rozmyslete. Rozstřihání obdélníku na menší shodné obdélníky a přeskládání na obdélník s poměrem stran menším než 2 je opravdu snadné a přenecháme je na rozmyšlení čtenáři (rozmyslete si také, že lze dokonce rozstříháním obdélníku na menší a přeskládáním docílit přenásobení původního poměru stran libovolným kladným racionálním číslem). Záměna obdélníku se čtvercem se pak provede podle obrázku.



Poznámky opravovatele: Ačkoliv úloha nebyla složitá, zcela správných řešení se nesešlo mnoho. Nejčastějším prohřeškem bylo, že si řešitel neuvědomil, že jeho řešení vede k cíli jen pro vhodně malý poměr stran obdélníka. Za to jsem strhával bod. Velké procento řešení spočívalo v myšlence rozřezání obdélníka na malé čtverečky (či trojúhelníčky). To už je chyba závažnější, tento postup je možno použít jen v případě, že je poměr stran obdélníka racionální. Navíc žádný z těchto řešitelů ani neukázal přeskládání pro obecný racionální poměr stran. Také přeformulování úlohy na problém srovnatelně obtížný jsem neocenil příliš mnoha body.

3. úloha

V kruhu c_1 se středem O mějme dánu sečnu AB, která není průměrem. Nechť M je střed úsečky AB. Označme c_2 kružnici s průměrem OM. Buď P bod kružnice c_1 a T dotykový bod některé z tečen ke kružnici c_2 procházejících bodem P. Dokažte, že $|PA|^2 + |PB|^2 = 4|PT|^2$.

Označme si S střed kružnice c_2, K buď střed (kratšího) oblouku AB. Označme si R poloměr kružnice c_1, r poloměr kružnice c_2. Dále si označme $\alpha = |\sphericalangle AOK|$, $\delta = |\sphericalangle KOP|$. Zjevně $\delta \in \langle 0, \pi \rangle$. Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že $|AP| \leq |BP|$. Vyjádříme si hledané délky pomocí R, r, α a δ. Z věty o mocnosti bodu ke kružnici víme, že $|PT|^2 = |PS|^2 - r^2$. Délky $|AP|$ a $|BP|$ vyjádříme pomocí kosínové věty použité na trojúhelníky AOP a BOP (laskavý čtenář si rozmyslí, že vztahy jsou v platnosti pro každou polohu $P \in c_1$):

$$\begin{aligned} |AP|^2 &= 2R^2(1 - \cos(\alpha - \delta)), \\ |BP|^2 &= 2R^2(1 - \cos(\alpha + \delta)), \\ |AP|^2 + |BP|^2 &= 2R^2(2 - 2\cos\alpha\cos\delta) = 4R^2 - 8Rr\cos\delta. \end{aligned}$$

Pro odvození poslední rovnosti jsme využili vztah $\cos(\alpha-\delta)+\cos(\alpha+\delta) = 2\cos\alpha\cos\delta$ a také vztah $R\cos\alpha = 2r$, který je vidět z pravoúhlého trojúhelníku AMO.

Délku $|PS|^2$ vyjádříme pomocí kosínové věty použité na trojúhelník PSK. Víme totiž, že

$$\begin{aligned} |PK|^2 &= 2R^2(1 - \cos\delta) = 4R^2\frac{1-\cos\delta}{2} = 4R^2\sin^2\frac{\delta}{2}, \\ |KS|^2 &= (R - r)^2, \\ |\sphericalangle PKS| &= |\sphericalangle OPK| = \frac{1}{2}(\pi - \delta). \end{aligned}$$

Dostáváme

$$|PS|^2 = |PK|^2 + |KS|^2 - 2|PK||KS|\cos\left(\frac{\pi-\delta}{2}\right) = |PK|^2 + |KS|^2 - 2|PK||KS|\sin\frac{\delta}{2}.$$

Dosazením a použitím vztahu $|PT|^2 = |PS|^2 - r^2$ dostáváme

$$|PT|^2 = 4R^2\sin^2\frac{\delta}{2} + (R-r)^2 - 4R(R-r)\sin^2\frac{\delta}{2} - r^2.$$

Nyní již tento vztah jenom roznásobíme a s využitím rovnosti $\sin^2\frac{\delta}{2} = \frac{1-\cos\delta}{2}$ upravíme na

$$|PT|^2 = R^2 - 2Rr\cos\delta.$$

Je tedy vidět, že jsme právě dokázali rovnost $|PA|^2+|PB|^2 = 4|PT|^2$, což bylo naším úkolem.

Poznámky opravovatele: Jedinou závažnou chybou, které se někteří řešitelé dopustili, bylo, že si bod T na kružnici c_2 zvolili nějak speciálně, čímž si úlohu značně zjednodušili. Daná rovnost se ale měla dokázat pro libovolný bod T na kružnici c_2. Za tato řešení jsem většinou dával jeden bod.

4. úloha

Je dán trojúhelník ABC a úsečka délky d. Sestrojte rovnoramenný trojúhelník KLM, který má základnu délky $|KL| = d$ a jehož obsah je stejný jako obsah trojúhelníku ABC.

Označme v_c výšku na stranu AB v trojúhelníku ABC a v výšku na stranu KL v trojúhelníku KLM. Podle zadání má platit $S_{ABC} = S_{KLM}$, tedy $\frac{1}{2}|AB|v_c = \frac{1}{2}dv$, nebo-li $\frac{v}{v_c} = \frac{|AB|}{d}$. Známe vše kromě v (výšku v_c snadno sestrojíme – patu této výšky lze nalézt např. jako průsečík přímky AB a kružnice s průměrem BC), není tedy problém tuto výšku sestrojit pomocí konstrukce známé jako „čtvrtá geometrická úměrná“. Narýsujeme si libovolný úhel, vrchol označme V. Na jedno rameno umístíme bod X do vzdálenosti $|AB|$ a Y do vzdálenosti d od V, na druhé rameno bod Z do vzdálenosti v_c od V. Označme W průsečík přímky VZ a rovnoběžky k YZ vedené bodem X. Trojúhelníky VYZ a VXW mají shodné úhly, jsou proto podobné a platí, že poměr stran je shodný, tedy $\frac{|VW|}{|VZ|} = \frac{|VX|}{|VY|}$, jinými slovy $|VW|$ je naše hledaná výška v. Nyní, když máme délku základny i výšky na ni, už není problém hledaný rovnoramenný trojúhelník KLM sestrojit. Je vidět, že úloha má vždy právě jedno řešení.

Poznámky opravovatele: Úloha byla jednoduchá, stačila podobnost. Tím více jsem strhával body za opomenutí nějaké části konstrukční úlohy. Těmi jsou rozbor, popis konstrukce, konstrukce (u parametrické úlohy volíme pro demonstraci konkrétní hodnoty za parametry), důkaz správnosti a diskuse. Za konstrukci výšky v trojúhelníku ABC atp. jsem dával $+i$. Naprosto správně vyřešenou úlohu měl pouze *Vojtěch Novotný*.

5. úloha

Nechť jsou dány dvě soustředné kružnice k a l o poloměrech $r < R$ (k je vnitřní kružnice) a bod $P \in k$. Uvažujme libovolný bod $B \in l$. Přímka BP protíná kružnici l v bodu $C \neq B$ a kolmice k přímce BP procházející bodem P protíná kružnici k v bodě $A \neq P$. Najděte množinu všech možných hodnot výrazu $|AB|^2 + |AC|^2 + |BC|^2$, probíhá-li bod B kružnici l.

Označme si S střed kružnic k a l a dále si označme d vzdálenost bodu S od přímky AP a x vzdálenost bodu S od přímky BC. Pak z Pythagorovy věty zřejmě $r^2 = d^2 + x^2$. Můžeme bez újmy na obecnosti předpokládat, že $|BP| \leq |CP|$. Podle Pythagorovy věty máme $|AB|^2 = |AP|^2 + |BP|^2$, $|AC|^2 = |AP|^2 + |CP|^2$. Snadno vyjádříme $|AP|^2 = 4(r^2 - d^2)$. Dále vidíme, že $\left(\frac{1}{2}|BC|\right)^2 = R^2 - x^2 = R^2 - r^2 + d^2$. Dále si uvědomíme, že $|BP|^2 + |CP|^2 = \left(\frac{1}{2}|BC| - d\right)^2 + \left(\frac{1}{2}|BC| + d\right)^2 = \frac{1}{2}|BC|^2 + 2d^2$. Nyní již můžeme sečíst

$$|AB|^2 + |AC|^2 + |BC|^2 = 2|AP|^2 + |BP|^2 + |CP|^2 + |BC|^2 =$$

$$= 8(r^2 - d^2) + 2(R^2 - r^2 + d^2) + 2d^2 + 4(R^2 - r^2 + d^2) = 6R^2 + 2r^2.$$

Vidíme, že náš součet může nabývat pouze jediné hodnoty $6R^2 + 2r^2$; této hodnoty nabyde pro libovolnou polohu bodu $B \in l$, pro kterou body B, P a Sneleží v jedné přímce.

Poznámky opravovatele: Většina došlých řešení byla až na drobnosti správná. Někteří neúspěšní řešitelé zjistili hodnoty výrazu pouze v krajních bodech a z jejich rovnosti usoudili, že i jinde bude stejná hodnota, což obecně nemusí být pravda.

6. úloha

Zkonstruujte pomocí pravítka a kružítka trojúhelník ABC, je-li dána délka strany AB, délka výšky na stranu AB a „délka“ osy úhlu γ (tím rozumíme vzdálenost bodu C od průsečíku osy úhlu γ se stranou AB). Diskutujte počet (neshodných) řešení.

Začneme, trochu netradičně, diskusí počtu řešení. Až poté ukážeme, jak trojúhelník ABC zkonstruovat. Označme si $c > 0$ délku strany AB, $v_c > 0$ délku výšky na stranu AB a $u_c > 0$ „délku“ osy úhlu γ. V každém trojúhelníku samozřejmě platí $u_c \geq v_c$; není-li tato nerovnost splněna, úloha nemá řešení. Pokud platí $u_c \geq v_c$, můžeme si sestrojit pravoúhlý trojúhelník CUV s přeponou CU délky u_c a odvěsnou CV délky v_c (je-li $u_c = v_c$, pak body U a V splynou). A to tak, že body C, U, V následují za sebou na obvodu proti směru hodinových ručiček (je-li C nahoře a V dole, je U vlevo). Opačná orientace bude odpovídat trojúhelníkům ABC shodným v osové souměrnosti podle CV. Označme p přímku UV, naším úkolem je teď najít body $A, B \in p$ tak, že $|AB| = c$ a CU je osa úhlu ACB. Problém je zřejmě symetrický na přehození bodů A, B, lze tedy předpokládat, že bod A je více vlevo. Je snadné si uvědomit, že vyhovující poloha bodů $A, B \in p$ je právě jedna (stačí nejdříve umístit body $A', B' \in p$, $|A'B'| = c$ hodně vlevo a poté je spojitě posouvat doprava, dokud nebude přímka CU osou úhlu $A'CB'$). Pro $u_c \geq v_c$ má tedy úloha právě jedno neshodné řešení (pokud nebudeme rozlišovat trojúhelníky, které se liší pouze prohozením vrcholů A a B).

Než přistoupíme ke konstrukci trojúhelníku ABC, dokážeme si jedno pomocné lemma:

Lemma. *Nechť $X \neq Y$ jsou body v rovině a $k > 0$, $k \neq 1$. Pak množina bodů Z s vlastností $\frac{|XZ|}{|YZ|} = k$ je (tzv. Appoloniova) kružnice, jejíž střed leží na přímce XY.*

Důkaz. Předvedeme zde důkaz, který šikovně využívá počítání s komplexními čísly. Lemma ale lze dokázat mnoha jinými způsoby; čtenářům, kteří nejsou s komplexními čísly obeznámeni (a nejen jim) proto doporučuji zkusit vymyslet nějaký jiný důkaz.

Představme si body X, Y jako komplexní čísla v rovině, je jasné, že lze bez újmy na obecnosti předpokládat, že $k > 1$, $X = k$, $Y = \frac{1}{k}$ (existuje podobnost, která body X a Y převede na tato čísla). Ukážeme, že pak množina bodů s požadovanou vlastností je přesně jednotková kružnice se středem v 0. Označme si λ libovolné komplexní číslo, pro které $|\lambda| = 1$. Pak

$$\frac{|k-\lambda|}{|\frac{1}{k}-\lambda|} = k\frac{|k-\lambda|}{|1-\lambda k|} = k\frac{|k-\lambda|}{|k-\bar{\lambda}|} = k.$$

Ve druhé rovnosti jsme využili toho, že absolutní hodnota komplexního čísla se nezmění po vynásobení číslem $-\bar{\lambda}$, které má absolutní hodnotu 1. V poslední rovnosti jsme využili toho, že číslo $k - \lambda$ a číslo k němu komplexně sdružené $k - \bar{\lambda}$ mají stejnou absolutní hodnotu. Dokázali jsme tedy, že celá jednotková kružnice se středem v 0 vyhovuje. Nyní již stačí ukázat, že na každé polopřímce s počátečním bodem $Y = \frac{1}{k}$ leží právě jeden vyhovující bod. To již přenechám čtenáři jako cvičení.

Poznámka: Pozornému čtenáři obeznámenému s pojmem kruhové inverze jistě neušlo, že výsledná Appoloniova kružnice má zajímavou vlastnost. Obraz bodu X v kruhové inverzi podle této kružnice je Y a naopak. V tom je skryt návod, jak lze využít vlastností kruhové inverze k jinému důkazu tohoto lemmatu. Detaily však nechám na čtenáři.

Nyní již ke kýžené konstrukci. V případě $u_c = v_c$ je zjevně trojúhelník ABC rovnoramenný a konstrukce je triviální. Pro $u_c > v_c$ si zkonstruujeme pravoúhlý trojúhelník CUV s přeponou CU délky u_c a odvěsnou CV délky v_c, pro představu řekněme, že bod C je nahoře, bod V dole a bod U vlevo (doporučuji kreslit si obrázek). Nyní chceme na přímce $p = UV$ najít bod A vlevo od U a bod B vpravo od U tak, že $|AB| = c$ a CU je osa úhlu ACB. Předpokládejme, že už body A a B sestrojené máme. Pak zřejmě $\frac{|AU|}{|BU|} = \frac{|AC|}{|BC|} \neq 1$. Podle lemmatu je množina bodů Z s vlastností $\frac{|AZ|}{|BZ|} = \frac{|AU|}{|BU|}$ kružnice se středem O ležícím na přímce p. Tuto kružnici umíme určit, protože na ní nutně leží body U a C. Střed O tedy najdeme jako průsečík přímky p a osy úsečky UC. Bod O vyjde zjevně vpravo od bodu U. Sestrojíme si ještě bod $W \in p$, $W \neq U$ s vlastností $|WO| = |UO|$, ten také leží na této kružnici. Označme si $w = |UW|$. Nyní je podle lemmatu jasné, že

$$\frac{|AU|}{|BU|} = \frac{|AW|}{|BW|}. \tag{$\heartsuit$}$$

Označme si hledanou délku $|AU|$ jako x. Podmínka ($\heartsuit$) nám dává pro x kvadratickou rovnici, a nebudeme-li líní ji vyřešit, dostaneme (s přihlédnutím k podmínce $x > 0$) řešení

$$x = \frac{c - w + \sqrt{c^2 + w^2}}{2}.$$

Nyní je již vše jednoduché. Délku c máme zadanou, délku $w = |UW|$ jsme zkonstruovali, délku $\sqrt{c^2 + w^2}$ zkonstruujeme jako délku přepony v pravoúhlém trojúhelníku s odvěsnami délek c a w. Snadno tedy zkonstruujeme i délku $x = |AU|$, a tedy i body A a B. Tím je úloha vyřešena.

Poznámky opravovatele: Všechna správná řešení spočívala, podobně jako autorské řešení, alespoň částečně v tom, že se ze zadaných parametrů spočítala nějaká délka (typicky jako řešení nějaké kvadratické rovnice) a o té se ukázalo, že lze zkonstruovat. Tři řešitelé postupovali podle značně neelegantní konstrukce z knihy J. Švrček, J. Vanžura, *Geometrie trojúhelníka* (přiznal to však pouze jeden z nich) a vysloužili si záporné imaginární body. Všechny pokusy o čistě syntetické řešení byly chybné.

Častá chyba v řešeních spočívala v tom, že mnohdy řešitel jenom odvodil nutné podmínky pro délky stran, z nich tyto strany dopočítal a prohlásil, že je lze zkonstruovat. V některých řešeních ale vůbec nebylo jasné, že takovéto délky stran jsou skutečně řešením a zda vůbec nějaké řešení existuje. Podobně s diskusí počtu řešení se někteří řešitelé moc netrápili. Nestačí jen napsat, že úloha má (např.) 17 řešení, ostatně na konkrétní číselné hodnotě záleží daleko méně než na myšlenkách k ní vedoucích, a ty by v úplném řešení neměly chybět.

Za uvedené nedostatky jsem body nestrhával, pokud šly do řešení snadno doplnit; v některých řešeních ale byly nedostatky dosti závažné.

7. úloha

Nechť je dán rovnostranný trojúhelník ABC s výškou délky 1 a přímka p procházející bodem C rovnoběžná s AB. Kružnice k se středem na přímce p a poloměrem 1 protíná úsečky AC

a BC po řadě v bodech K a L. Určete délku úsečky KL v závislosti na poloze středu kružnice k.

Označme si S střed kružnice k. Poznamenejme, že ze zadání plyne $|SC| \leq 1$ (v opačném případě by kružnice k neprotla obě úsečky AC a BC). Označme si K' průsečík přímky BC s kružnicí k různý od L. Ze symetrie je zřejmé, že body K a K' jsou osově souměrné podle přímky p. Trojúhelník $KK'C$ je tedy rovnoramenný se základnou KK'. Jelikož $|\sphericalangle KCK'| = 120^\circ$, je $|\sphericalangle KK'L| = 30^\circ$. Obvodový úhel příslušný tětivě KL má tedy velikost 30°, středový úhel je dvojnásobný. Dostáváme $|\sphericalangle KSL| = 60^\circ$ a vidíme, že trojúhelník KSL je rovnostranný. Je tedy zřejmě $|KL| = 1$ nezávisle na poloze středu S na přímce p.

Poznámky opravovatele:

8. úloha

Nechť je dán trojúhelník ABC a kružnice se středem O, která prochází body A, C a protíná úsečky AB a BC po řadě v různých bodech K a N. Nechť se kružnice opsané trojúhelníkům ABC a KBN protínají v různých bodech B a M. Dokažte, že úhel $\sphericalangle OMB$ je pravý.

V našem řešení využijeme větu o obvodových úhlech pro orientované úhly, vyhneme se tak složitější diskusi. Orientovaným úhlem (p, q) dvou různoběžek p, q (v tomto pořadí) budeme rozumět úhel, o který je nutno otočit p v kladném směru (tj. proti směru hodinových ručiček), aby splynula s q (pro rovnoběžky definujeme tento úhel nulový). Potom platí tato orientovaná verze věty o obvodovém úhlu:

Věta. Bod $X \neq A, C$ leží na kružnici opsané trojúhelníku ABC právě tehdy, když platí $(AX, XC) = (AB, BC)$.

Důkaz je snadným využitím věty o (neorientovaném) obvodovém úhlu a rozebráním možných poloh bodu X. Dále si uvědomme platnost tvrzení $(p, q) = -(q, p) \pmod{\pi}$ a také $(a, b) = (a, c) + (c, b) \pmod{\pi}$.

Nyní již k naší úloze. Všechny orientované úhly budeme počítat modulo úhel π. Označme si $R \neq K$ průsečík kružnice opsané $AKNC$ a přímky KM (je-li KM tečna, buď $R = K$) a $\alpha = (BA, AC)$. Při odvozování rovností úhlů budeme používat kružnice opsané ABC, AKC a KBN (nakreslete si obrázek). Dostáváme

$$(KM, MB) = (KN, NB) = (KN, NC) = (KA, AC) = (BA, AC) = \alpha, \tag{1}$$

$$(BM, MC) = (BA, AC) = \alpha. \tag{2}$$

S využitím (1) a (2) dostaneme

$$(CM, MR) = (CM, MK) = (CM, MB) + (MB, KM) =$$

$$= -(BM, MC) - (KM, MB) = -2\alpha, \tag{3}$$

$$(MR, RC) = (KR, RC) = (KA, AC) = (BA, AC) = \alpha. \tag{4}$$

Zde by mohl být problém s $K = R$, potom by (KR, RC) nemělo smysl. Ovšem $K = R$ znamená, že KM je tečna ke kružnici opsané $AKNC$, v tom případě lze použít větu o úsekovém úhlu, která platí i pro orientované úhly.

S využitím (1) a (4) je

$$(BM, CR) = (BM, MR) + (MR, RC) = (BM, MK) + (MR, RC) =$$

$$= (MR, RC) - (KM, MB) = 0, \tag{5}$$

tedy BM a CR jsou rovnoběžky. Nakonec pomocí (3) a (4) máme

$$(RC, CM) = (RC, MR) + (MR, CM) = -(MR, RC) - (CM, MR) = \alpha. \tag{6}$$

Nyní vidíme, že $(RC, CM) = (MR, RC)$, tedy trojúhelník CMR je rovnoramenný se základnou CR (úhly (RC, CM) a (MR, RC) jsou buď oba vnitřní nebo oba vnější, přímka RC je jednou otáčena a jednou je na ni otáčeno). Body O a M tedy oba leží na ose úsečky RC. Přímka OM je tedy speciálně kolmá na základnu CR. Jelikož $RC \parallel BM$, dostáváme, že přímky OM a MB jsou kolmé, což jsme měli dokázat.

Poznámky opravovatele:

9. úloha

Nechť je pevně dán trojúhelník ABC. Uvnitř strany AB uvažujme bod D. Příčka CD dělí trojúhelník ABC na trojúhelníky ACD a BCD. Oběma vepíšeme kružnici a sestrojíme druhou společnou vnitřní tečnu těchto kružnic, která protne příčku CD v bodě E. Jaká je množina všech takto získaných bodů E, probíhá-li bod D vnitřní body úsečky AB?

Doporučuji si při čtení kreslit obrázek. Nejprve si připomeňme některá známá tvrzení o bodech dotyku kružnice připsané či opsané. Označme A_0, B_0, C_0 body dotyku kružnice vepsané trojúhelníku ABC s přímkami BC, CA, AB, dále A_p, B_p, C_p body dotyku kružnice připsané (ke straně BC) s přímkami BC, CA, AB, a, b, c délky stran trojúhelníku ABC, S_0 a S_p středy kružnic vepsané a připsané ke straně BC a nechť $s = \frac{a+b+c}{2}$.

Ze shodnosti trojúhelníků AC_0S_0 a AB_0S_0 (mají shodné úhly a společnou přeponu) dostáváme $|AC_0| = |AB_0|$, tuto vzdálenost označme x_1. Analogicky můžeme označit vzdálenosti $x_2 = |BA_0| = |BC_0|$, $x_3 = |CA_0| = |CB_0|$, $y_1 = |AC_p| = |AB_p|$, $y_2 = |BC_p| = |BA_p|$, $y_3 = |CA_P| = |CB_p|$. Dostáváme vztahy

$$x_1 = s - a,\ x_2 = s - b,\ x_3 = s - c,$$

$$y_1 = s,\ y_2 = s - c,\ y_3 = s - b. \tag{$\heartsuit$}$$

Nyní již k samotné úloze. Přeznačme si C_0 na P. Nejdříve popíšeme hledanou množinu bodů a ukážeme, že každý bod E na ní nutně leží, a potom dokážeme, že každý bod této množiny je průsečíkem odpovídajících tečen pro vhodnou volbu bodu D.

(i) Buď tedy D vnitřním bodem úsečky AB. Dále buď k kružnice vepsaná ADC a l kružnice vepsaná BDC. Druhá vnitřní tečna jistě protíná úsečku AB, označme si X tento průsečík. Dokážeme, že $X \equiv P$. Rozlišíme dva případy:

• Pokud $D \equiv P$, chceme vlastně dokázat, že existuje jediná vnitřní tečna kružnic k a l, tedy že kružnice k a l se dotýkají přímky CD v témže bodě. Označme U, resp. V bod dotyku kružnice k, resp. l s přímkou CD. Podle (♡) snadno spočteme

$$|PU| = \frac{1}{2}(|AP| + |CP| - |AC|),$$
$$|PV| = \frac{1}{2}(|BP| + |CP| - |BC|).$$

Podle téhož vzorečku spočteme $|AP| = \frac{1}{2}(|AB| + |AC| - |BC|)$ a $|BP| = \frac{1}{2}(|AB| + |BC| - |AC|)$. Dosadíme-li za $|AP|$ a $|BP|$ výše, zjistíme, že $|PU| = |PV|$, tedy $U \equiv V$, což jsme chtěli dokázat.

• Nechť $D \not\equiv P$. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že bod X náleží úsečce AD (v opačném případě přeznačíme body A a B). Označme si m kružnici připsanou trojúhelníku EDX ke straně DX. Nechť K_1, L_1, M_1, N_1 jsou body dotyku kružnice k po řadě s přímkami AX, XE, EC, CA, nechť K_2, L_2, M_2, N_2 jsou body dotyku kružnice l po řadě s přímkami DB, BC, XE, ED a nechť K_3, L_3, M_3 jsou body dotyku kružnice m po řadě s přímkami XD, DE, EX. Potom podle (♡) můžeme označit

$$\begin{aligned}
&p = |K_1X| = |L_1X| = |M_3E| = |L_3E| = |N_2D| = |K_2D|,\\
&q = |K_3X| = |M_3X| = |L_1E| = |M_1E|,\\
&r = |K_3D| = |L_3D| = |N_2E| = |M_2E|,\\
&s = |K_1A| = |N_1A|,\ t = |M_1C| = |N_1C|,\ u = |K_2B| = |L_2B|,
\end{aligned}$$

navíc z trojúhelníka BDC máme $|CL_2| = |CN_2| = t + q + r$.

K důkazu $X \equiv P$ stačí dokázat $|AP| = |AX|$. Ovšem

$$\begin{aligned}
|AP| &= \frac{-a+b+c}{2} = \frac{-(|CL_2| + |BL_2|) + (|N_1C| + |N_1A|)}{2} +\\
&+ \frac{(|K_1A| + |K_1X| + |K_3X| + |K_3D| + |K_2D| + |K_2B|)}{2} =\\
&= \frac{-(t+q+r+u) + (t+s) + (s+p+q+r+p+u)}{2} =\\
&= s + p = |AK_1| + |K_1X| = |AX|.
\end{aligned}$$

Dokázali jsme tedy i v druhém případě, že $X \equiv P$.

Předpokládejme na chvíli, že bod D leží uvnitř úsečky BP. Protože čtyřúhelník $APEC$ je tečnový, platí $|AP| + |EC| = |AC| + |EP|$, tedy

$$|CE| - |EP| = |AC| - |AP| = b - \left(\frac{-a+b+c}{2}\right) = \frac{a+b-c}{2},$$

což je konstanta nezávislá na poloze bodu D. Čtenář se snadno přesvědčí, že i v případě $D \equiv P$ a v případě, kdy bod D leží uvnitř úsečky AP, vyjde tentýž výsledek.

Bod E tedy náleží hyperbole s ohnisky C a P. Protože je $\frac{a+b-c}{2} > 0$, leží E na rameni blíže ohnisku P. Navíc $|CA|-|AP| = |CB|-|BP| = \frac{a+b-c}{2}$, takže zmíněné rameno hyperboly protíná přímku AB právě v bodech A a B. Protože E leží uvnitř trojúhelníku ABC, náleží E části hyperboly „mezi“ body A a B. Navíc nevyhovují body A a B. V případě $D \equiv P$ existuje pouze jedna vnitřní tečna kružnic k a l (tyto kružnice se vzájemně dotýkají). Domluvíme-li se, že v tomto případě budeme za bod E považovat dotykový bod obou kružnic, bude také ležet na popsané části hyperboly.

(*ii*) Zbývá nám ukázat, že každý bod právě popsané části ramena hyperboly „mezi“ body A a B lze dostat jako bod E pro vhodnou volbu bodu D uvnitř úsečky AB. To je ale téměř zřejmé. Vezměme tedy libovolný bod F ležící na popsané části hyperboly. Přímka CF protíná úsečku AB ve vnitřním bodě; označme ho D. Pro tento bod D musí příslušný bod E ležet zároveň na přímce CD a na popsané části hyperboly. Přímka CD ale popsanou část hyperboly zřejmě protíná v právě jednom bodě, a to v bodě F. Je tedy nutně $F \equiv E$. Pro libovolný bod F popsané části hyperboly jsme našli příslušný bod D uvnitř úsečky AB. Tím je tedy úloha vyřešena.

Poznámky opravovatele: Příliš řešení této úlohy se mi do rukou nedostalo. To svědčí o tom, že úloha byla obtížná. Bez problémů si s ní poradili pouze *Katka Quittnerová* a *Martin Tancer*. *Jaroslav Hájek* správně dokázal, že všechny body T leží na příslušné hyperbole, ale už nepopsal, které body této hyperboly to jsou. Nikdo jiný než tito tři ode mě body nedostal `:-(`.