Povídání k páté sérii

Tato série se zabývá převážně patrovými mocninami, tedy výrazy typu x^{y^z}, a jejich úpravami. Připomeňme, že konvence uzávorkování patrových mocnin je $x^{y^z} = x^{(y^z)}$, tedy např. $2^{2^3} = 2^8 = 256$. Opačné uzávorkování totiž nemá morální právo nazývat se patrovou mocninou. Platí totiž $(x^y)^z = x^{y \cdot z}$.

Zde bychom vám rádi ukázali některé nástroje, které se vám mohou při řešení hodit.

Máme-li celá čísla a, b a m přirozené, pak řekneme, že číslo a je *kongruentní* s číslem b *podle modulu* m, pokud číslo a dává při dělení číslem m stejný zbytek jako číslo b. Jinými slovy, pokud $m \mid a-b$. Tuto skutečnost zapisujeme ve tvaru $a \equiv b \pmod{m}$, tento zápis pak nazýváme kongruencí.

Snadno si zajisté sám dokážeš (vše plyne přímo z definice), že kongruence mají následující vlastnosti:

(a) Pokud $a \equiv b \pmod{m}$ a $c \equiv d \pmod{m}$, pak $a+c \equiv b+d \pmod{m}$ a $ac \equiv bd \pmod{m}$.
(b) Pokud $a \equiv b \pmod{m}$, $a = a'd$, $b = b'd$ a $(d, m) = 1$, pak $a' \equiv b' \pmod{m}$.

Tyto dvě vlastnosti nám neříkají nic jiného, než že kongruence lze mezi sebou sčítat, násobit a za jistých předpokladů je lze dělit číslem.

V některých úlohách by Ti mohla pomoci následující poměrně známá (a tedy pro úsporu místa zde nedokázaná) věta:

Věta. (Eulerova) *Buďte a, m libovolná nesoudělná čísla. Nechť*[1] *$\varphi(m)$ je počet čísel z množiny $\{1, 2, \dots, m\}$, která jsou s m nesoudělná. Pak*

$$a^{\varphi(m)} \equiv 1 \pmod{m}.$$

Speciálně tedy rovnice $a^l \equiv 1 \pmod{m}$ má řešení.

Jako speciální případ, uvažujeme-li navíc, že m je prvočíslo, dostáváme následující též známou větu:

Věta. (Malá Fermatova) *Nechť p je prvočíslo a a přirozené číslo nedělitelné p. Pak*

$$a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}.$$

Poznámka o zadání 5. série

Stalo se již tradicí, že každoročně jednu ze sérií zadáváme v několika cizích jazycích. Není to jen nějaká hříčka organizátorů semináře. Naším záměrem je dát našim řešitelům možnost, aby si vyzkoušeli porozumět cizojazyčnému odbornému textu – tato schopnost se našim řešitelům bude hodit při jejich dalším studiu. Často k dané problematice neexistuje

[1] Funkce $\varphi(m)$ se nazývá *Eulerova*.

literatura psaná v českém jazyce, a tak musí studentík sáhnout po zahraniční knížce a začít luštit ...

Pro letošní ročník jsme zvolili tři světové jazyky – angličtinu, francouzštinu a němčinu. Podobně jako v loňském roce jsme vyžadovali řešení psaná jedním z těchto jazyků. Jak jsme očekávali, naprostá většina řešitelů (i opravovatelů) se s těmito nástrahami vypořádala bez problémů. Schválně si sám můžeš vyzkoušet nahlédnout nejprve do cizojazyčných zadání, i když Ti hned předkládáme českou verzi (tu naši řešitelé dostali až spolu se vzorovými řešeními).

5th series

Topic:	Small numbers
Date due:	FEBRUARY 25, 2002

PROBLEM 1 (3 points)
Find the largest negative integer n with the following property: multiplying n by 8 gives the same result as shifting the last digit of n to the front (just after the minus sign).

PROBLEM 2 (3 points)
For which natural numbers n the last four digits of the number -8124^{2n} are $8, 1, 2, 4$ (in this order)?

PROBLEM 3 (3 points)
Find the last three digits of the number $-11^{11^{11^{11^{11^{11}}}}}$ written in the base 7.

PROBLEM 4 (5 points)
Find all natural numbers n for which the following inequality holds:

$$-2^{n^{n+1}} > -n^{(n+1)^n}.$$

PROBLEM 5 (5 points)
Find the three digits to the left and the three digits to the right of the decimal point of the number $-\sqrt[3]{27^{729}+9^{729}}$.

PROBLEM 6 (5 points)
Prove that the equation $-4^{7^{8^9}}x^2 - 5^{7^{8^9}}x - 6^{7^{8^9}} = 0$ has exactly two different irrational roots.

PROBLEM 7 (5 points)
Find the number of consecutive zeros at the end of the decimal expression of the number $-2002!$. Find its last three nonzero digits.

PROBLEM 8 (5 points)
Find the two digits to the left and the two digits to the right of the decimal point of the number $-(\sqrt{5}+\sqrt{7})^{2002}$.

La 5. série

Sujet:	Les petits nombres
Date d'expedition:	25. FÉVRIER 2002

PROBLÈME 1 (3 points)
Quel est le plus grand nombre entier negatif n, tel que l'on peut obtenir $8n$ en déplacant le dernier chiffre de n à la première place (tout de suite après le signe de soustraction)?

PROBLÈME 2 (3 points)
Pour quel nombre naturel n le numéro -8124^{2n} a comme quatre derniers chiffres 8124?

PROBLÈME 3 (3 points)
Quels sont les trois derniers chiffres du numéro $-11^{11^{11^{11^{11^{11}}}}}$, s'il est écrit en base de sept?

PROBLÈME 4 (5 points)
Quel nombre naturel n satisfait l'inégalité suivante.

$$-2^{n^{n+1}} > -n^{(n+1)^n}.$$

PROBLÈME 5 (5 points)
Trouvez les trois chiffres avant et les trois chiffres après la virgule du nombre $-\sqrt[3]{27^{729}+9^{729}}$.

PROBLÈME 6 (5 points)
Prouvez que l'équation $-4^{7^{8^9}}x^2 - 5^{7^{8^9}}x - 6^{7^{8^9}} = 0$ a deux racines irrationelles différentes.

PROBLÈME 7 (5 points)
Trouvez par combien de zéros finit le nombre $-2002!$ et trouvez ses trois derniers chiffres non nuls.

PROBLÈME 8 (5 points)
Trouvez les deux chiffres avant et les deux chiffres après la virgule du nombre $-(\sqrt{5}+\sqrt{7})^{2002}$.

Serie N. 5

Thema:	Kleine Nummern
Termin der Absendung:	25. FEBRUAR 2002

AUFGABE N. 1 (3 punkte)
Finde die größte negative Zahl mit folgender Eigenschaft: Wenn wir die letzte Ziffer der Zahl nach vorne verschieben, gleich hinter das Minuszeichen, bekommen wir das Achtfache dieser Zahl.

AUFGABE N. 2 (3 punkte)
Für welche natürlichen Zahlen n endet die Zahl -8124^{2n} mit der Ziffernfolge 8124?

AUFGABE N. 3 (3 punkte)
Finde die letzten drei Ziffern von $-11^{11^{11^{11^{11^{11}}}}}$ im heptalen Zahlensystem (das ist das Zahlensystem unter Verwendung die Ziffern 0, 1, ... , 6).

AUFGABE N. 4 (5 punkte)
Überlege, für welche natürlichen Zahlen n die folgende Ungleichung gilt.

$$-2^{n^{n+1}} > -n^{(n+1)^n}.$$

AUFGABE N. 5 (5 punkte)
Bestimme die 3 Ziffern vor und hinter dem Komma in der Dezimaldarstellung von

$$-\sqrt[3]{27^{729}+9^{729}}.$$

AUFGABE N. 6 (5 punkte)
Beweise, dass die Gleichung $-4^{7^{8^9}}x^2-5^{7^{8^9}}x-6^{7^{8^9}}=0$ zwei verschiedene irrationale Wurzeln besitzt.

AUFGABE N. 7 (5 punkte)
Überlege, auf wie viele Nullen die Zahl $-2002!$ endet und finde die letzten drei Ziffern, die nicht Null sind.

AUFGABE N. 8 (5 punkte)
Bestimme die zwei Ziffern vor und hinter dem Komma in der Dezimaldarstellung von $-(\sqrt{5}+\sqrt{7})^{2002}$.

5. série

Téma:	Malá čísla
Termín odeslání:	25. ÚNORA 2002

1. ÚLOHA
Jaké je největší záporné celé číslo, jehož osminásobek vznikne přesunutím jeho poslední číslice na začátek (hned za znaménko mínus)?

2. ÚLOHA
Pro která přirozená n končí číslo -8124^{2n} na 8124?

3. ÚLOHA
Zjistěte poslední tři číslice čísla $-11^{11^{11^{11^{11^{11}}}}}$, zapíšeme-li ho v sedmičkové soustavě.

4. ÚLOHA
Zjistěte, pro která přirozená n platí následující nerovnost.

$$-2^{n^{n+1}} > -n^{{n+1}^{n}}.$$

5. ÚLOHA
Určete 3 číslice před a 3 číslice za desetinnou čárkou čísla $-\sqrt[3]{27^{729}+9^{729}}$.

6. ÚLOHA
Dokažte, že rovnice $-4^{7^{8^9}}x^2 - 5^{7^{8^9}}x - 6^{7^{8^9}} = 0$ má dva různé iracionální kořeny.

7. ÚLOHA
Zjistěte, na kolik nul končí číslo $-2002!$, a určete jeho poslední tři nenulové číslice.

8. ÚLOHA
Určete dvě číslice před a dvě číslice za desetinnou čárkou čísla $-(\sqrt{5}+\sqrt{7})^{2002}$.

Řešení 5. série

1. úloha
Jaké je největší záporné celé číslo, jehož osminásobek vznikne přesunutím jeho poslední číslice na začátek (hned za znaménko mínus)?

Hledané číslo n musí mít stejný počet číslic jako jeho osminásobek, tudíž první číslice n je 1. Poslední číslice n (první číslice čísla $8n$) je tedy 8 nebo 9. Podle toho rozdělíme řešení na dva případy:

(a) n končí číslicí 8. Známe-li poslední číslici n, můžeme určit poslední číslici čísla $8n$. Ta totiž bude stejná jako poslední číslice čísla $8 \cdot 8 = 64$. Poslední číslice $8n$, a tedy i předposlední číslice n, je 4. Takto můžeme hledané číslo postupně konstruovat od konce (zprava): pokud již známe posledních k číslic čísla n (k-ciferné číslo tvořené těmito číslicemi si označme A_k), lze jednoznačně určit i posledních k číslic čísla $8n$ jako posledních k číslic čísla $8A_k$. Po přidání číslice 8 za tyto číslice máme posledních $k+1$ číslic čísla n. Tento postup ukončíme v případě, že číslo A_k bude mít vlastnost uvedenou v zadání (pokud číslo $8A_k$ bude k-ciferné a bude začínat číslicí 8). Konkrétně postup skončí u čísla $A_{13} = -1012658227848$, které je hledaným číslem pro případ (a).

(b) n končí číslicí 9. Budeme postupovat obdobně jako v předchozím případě (budeme postupně vytvářet čísla B_1, B_2, B_3, $\ldots$) a postup skončí opět u 13-ciferného čísla: $B_{13} = -1139240506329$.

Řešením úlohy je větší z těchto dvou čísel, tedy číslo -1012658227848.

Poznámky opravovatele: Většina řešitelů založila své řešení na podobné myšlence jako autor. Někteří si povšimli, že lze úlohu řešit i jinak, a to hledat největší záporné celé číslo tvaru $-(10^n - 8)$, které je dělitelné 79. Toto řešení lze použít i k důkazu mnohem obecnějšího zadání, a tak bylo po zásluze oceněno $+i$. Většina řešitelů tvrdila, že nalezla všechna, tj. dvě, vhodná čísla. To ovšem není pravda, například $-10126582278481012658227848$ má rovněž vlastnost ze zadání.

2. úloha
Pro která přirozená n končí číslo -8124^{2n} na 8124?

Číslo -8124^{2n} končí číslicemi $8, 1, 2, 4$ právě tehdy, když číslo $(8124^2)^n$ má po dělení 10000 zbytek 8124. Platí $8124^2 \equiv 9376 \pmod{10000}$, $9376^2 \equiv 9376 \pmod{10000}$ a z toho matematickou indukcí plyne $9376^n \equiv 9376 \pmod{10000}$ pro každé přirozené n. Takže $(8124^2)^n \equiv 9376^n \equiv 9376 \pmod{10000}$ a pro žádné přirozené n dané číslo nekončí číslicemi $8, 1, 2, 4$.

Poznámky opravovatele: Podle došlých řešení je znát, že tato úloha řešitelům nedělala žádné problémy. Téměř každý dosáhl plného počtu bodů. Způsobů, jak ukázat, že žádné takové n, které by vyhovovalo požadavkům, neexistuje, se objevilo mnoho a povětšinou byly správné.

Imaginární body jsem uděloval za eleganci toho kterého řešení, neboť ne všechna byla zrovna efektivní. Snadné a jasné bylo ukázat, že druhá mocnina daného čísla není dělitelná šestnácti, jak by plynulo z dělitelnosti jeho první mocniny číslem čtyři. Nejčastěji jste však ukazovali, že sudá mocnina čísla končícího čtyřkou končí vždy číslicí šest. Toto je sice jednoduché, ale alespoň náznak zdůvodnění by se objevit měl. Vzhledem k jednoduchosti jeho provedení jsem za tento nedostatek bod nestrhával, ale příště berte na vědomí, že každé vaše tvrzení je třeba dokázat nebo důkaz alespoň naznačit. Přílišná stručnost mnohdy značně ubírá na pochopitelnosti textu, na druhou stranu zbytečné „okecávání“ také.

3. úloha

Zjistěte poslední tři číslice čísla $-11^{11^{11^{11^{11^{11}}}}}$, zapíšeme-li ho v sedmičkové soustavě.

Zadání této úlohy dávalo možnost v různých jazycích k několika různým interpretacím (více viz *Poznámky opravovatele*). My zde vyřešíme úlohu tak, jak byla původně autory zamýšlena a zformulována v české verzi zadání.[2] Ostatní verze se řeší analogicky, nebo jsou jednodušší.

Podle Eulerovy věty (viz úvod k sérii) je $11^{294} \equiv 1 \pmod{343}$ (11 a 343 jsou nesoudělná, $\varphi(343) = 343(1 - \frac{1}{7}) = 294$). Platí tedy

$$11^{11^{11^{11^{11^{11}}}}} \equiv 11^{Z_{294}} \pmod{343},$$

kde Z_{294} je zbytek čísla $11^{11^{11^{11^{11}}}}$ po dělení 294. Stačí tedy najít číslo Z_{294}.

$$\varphi(294) = 84 \Rightarrow 11^{84} \equiv 1 \pmod{294} \Rightarrow 11^{11^{11^{11^{11}}}} \equiv 11^{Z_{84}} \pmod{294},$$

kde Z_{84} je zbytek čísla $11^{11^{11^{11}}}$ po dělení 84. Nyní podobně hledáme číslo Z_{84}:

$$\varphi(84) = 24 \Rightarrow 11^{24} \equiv 1 \pmod{84} \Rightarrow 11^{11^{11^{11}}} \equiv 11^{Z_{24}} \pmod{84},$$

kde Z_{24} je zbytek čísla $11^{11^{11}}$ po dělení 24.

$$\varphi(24) = 8 \Rightarrow 11^{8} \equiv 1 \pmod{24} \Rightarrow 11^{11^{11}} \equiv 11^{Z_8} \pmod{24},$$

kde Z_8 je zbytek čísla 11^{11} po dělení 8.

$$\varphi(8) = 4 \Rightarrow 11^4 \equiv 1 \pmod{8} \Rightarrow 11^{11} = 11^{2\cdot 4+3} \equiv 11^3 = (8+3)^3 \equiv 3^3 = 27 \equiv 3 \pmod{8}.$$

[2] Ani jsme předem netušili, kolik významů řešitelé vykouzlí. V české verzi je však podle našeho názoru význam jednoznačný (pozn. aut.).

Máme tedy $Z_8 = 3$.

$$11^{Z_8} = 11^3 = 11 \cdot 121 = 11 \cdot (5 \cdot 24 + 1) \equiv 11 \cdot 1 \equiv 11 \pmod{24},$$

takže $Z_{24} = 11$.

$$11^{Z_{24}} = 11^{11} = 11 \cdot 121^5 \equiv 11 \cdot 37^5 = 11 \cdot 37 \cdot 1369^2 = 407 \cdot (16 \cdot 84 + 25)^2 \equiv (5 \cdot 84 - 13) \cdot 25^2 \equiv$$

$$\equiv -13 \cdot 25^2 = -8125 = -97 \cdot 84 + 23 \equiv 23 \pmod{84} \Rightarrow Z_{84} = 23.$$

$$11^{Z_{84}} = 11^{23} = 121 \cdot \left(11^3\right)^7 = 121 \cdot (4 \cdot 294 + 155)^7 \equiv 121 \cdot 155 \cdot \left(155^2\right)^3 = 18755 \cdot 24025^3 =$$

$$= (64 \cdot 294 - 61) \cdot (82 \cdot 294 - 83)^3 \equiv 61 \cdot 83^3 = 61 \cdot 83 \cdot 83^2 = (17 \cdot 294 + 65) \cdot (23 \cdot 294 + 127) \equiv$$

$$\equiv 65 \cdot 127 = 28 \cdot 294 + 23 \equiv 23 \pmod{294} \Rightarrow Z_{294} = 23.$$

Konečně

$$11^{Z_{294}} = 11^{23} = 121 \cdot \left(11^3\right)^7 = 121 \cdot (4 \cdot 343 - 41)^7 \equiv -121 \cdot 41 \cdot \left(41^2\right)^3 =$$

$$= -(14 \cdot 343 + 159) \cdot (5 \cdot 343 - 34)^3 \equiv 159 \cdot 34 \cdot 34^2 = (16 \cdot 343 - 82) \cdot (3 \cdot 343 + 127) \equiv$$

$$\equiv -82 \cdot 127 = -(30 \cdot 343 + 124) \equiv -124 \equiv 219 \pmod{343}.$$

219 je tedy zbytek čísla $11^{11^{11^{11^{11^{11^{11}}}}}}$ po dělení 343. $219 = 4 \cdot 7^2 + 3 \cdot 7^1 + 2 \cdot 7^0$, a tedy poslední 3 číslice daného čísla v sedmičkové soustavě jsou $4, 3, 2$.

Poznámky opravovatele: Ukázalo se, že zadání bylo možné chápat až neskutečným množstvím způsobů. Řešitelé jich objevili zhruba pět, ale možností bylo ještě více v závislosti na jazyku zadání. Nejčastější byly dvě interpretace: „zadaná mocnina je v desítkové soustavě, zjistěte její poslední tři číslice v sedmičkové soustavě“ a „zadaná mocnina je v sedmičkové soustavě, zjistěte její poslední tři číslice v sedmičkové soustavě“, ovšem objevilo se i několik překvapivých (ale jazykově správných) výkladů jako „spočtěte poslední tři cifry v desítkové soustavě a zapište je v sedmičkové“ nebo „zadaná mocnina je v sedmičkové soustavě, zjistěte její poslední tři číslice v desítkové“. Protože chyba byla především na naší straně, správně vyřešené korektní interpretace jsem hodnotil plným počtem bodů, za obzvlášť vychytralé nečekané výklady jsem přidal $+i$. Objevilo se několik řešitelů, kteří se dopustili následující chyby: rozepsali výraz tvaru a^{b^c} jako $a^{b \cdot c}$, což je takřka zločin (byť z neznalosti), protože $a^{b^c} = a^{(b^c)} \neq (a^b)^c = a^{b \cdot c}$. Dále bych chtěl poprosit řešitele, aby méně používali počítače a výkonné kalkulačky, jejich řešení tyto nástroje prospějí jen výjimečně.

4. úloha

Zjistěte, pro která přirozená n platí následující nerovnost.

$$-2^{n^{n+1}} > -n^{n+1^n}.$$

Pro usnadnění zápisu budeme vyšetřovat, kdy platí ekvivalentní nerovnost $2^{n^{n+1}} < n^{(n+1)^n}$. Označme si $a_n = 2^{n^{n+1}}$, $b_n = n^{(n+1)^n}$. Zjistíme nejprve platnost nerovnosti pro několik nejmenších hodnot n:

$$
\begin{aligned}
&a_1 = 2^{1^2} = 2,\ b_1 = 1^{2^1} = 1, \quad a_1 > b_1,\\
&a_2 = 2^{2^3} = 2^8,\ b_2 = 2^{3^2} = 2^9, \quad a_2 < b_2,\\
&a_3 = 2^{3^4} = \left(2^3\right)^{27} = 8^{27},\ b_3 = 3^{4^3} = \left(3^2\right)^{(2^5)} = 9^{32}, \quad a_3 < b_3,\\
&a_4 = 2^{4^5} = 2^{1024},\ b_4 = 4^{5^4} = 4^{625} = 2^{1250}, \quad a_4 < b_4,\\
&a_5 = 2^{5^6} = 2^{15625} = 2 \cdot \left(2^9\right)^{1736} = 2 \cdot 512^{1736},\\
&b_5 = 5^{6^5} = 5^{7776} = 5^{832} \cdot \left(5^4\right)^{1736} > 2 \cdot 625^{1736}, \quad a_5 < b_5,\\
&a_6 = 2^{6^7} = 2^{279936},\ b_6 = 6^{7^6} = (2 \cdot 3)^{117649},\\
&\frac{b_6}{a_6} = \frac{3^{117649}}{2^{162287}} = \frac{3^{9459} \cdot (3^2)^{54095}}{2^2 \cdot (2^3)^{54095}} > \left(\frac{9}{8}\right)^{54095} > 1, \quad a_6 < b_6,\\
&a_7 = 2^{7^8} = 2^{5764801} = 2^7 \cdot \left(2^{14}\right)^{411771} = 2^7 \cdot 16384^{411771},\\
&b_7 = 7^{8^7} = 7^{2097152} = 7^{38297} \cdot \left(7^5\right)^{411771} > 2^7 \cdot 16807^{411771}, \quad a_7 < b_7,\\
&a_8 = 2^{8^9} = 2^{2^{27}},\ b_8 = 8^{9^8} = 2^{3 \cdot 9^8} = 2^{3^{17}}.
\end{aligned}
$$

Protože $2^{27} = 134217728,\ 3^{17} = 129140163$, je $2^{27} > 3^{17}$ a tedy $a_8 > b_8$.

Nerovnost tedy platí pro čísla $n \in \{2,3,4,5,6,7\}$ a neplatí pro $n \in \{1,8\}$. Dokážeme, že pro každé $n \geq 8$ již platí opačná nerovnost

$$2^{n^{n+1}} > n^{(n+1)^n}.$$

Tato nerovnost je ekvivalentní s nerovností

$$n^{n+1} > (n+1)^n \log_2 n,$$

tedy i s nerovností

$$\frac{n^{n+1}}{(n+1)^n} > \log_2 n. \tag{1}$$

Nejprve dokážeme, že pro každé $n \geq 8$ je

$$\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1} > \frac{1}{3}. \tag{2}$$

Z předchozích výpočtů víme, že $2^{27} > 3^{17}$, tedy $8^9 > \frac{1}{3} \cdot 9^9$, takže $\left(\frac{8}{9}\right)^9 > \frac{1}{3}$. Pro $n = 8$ tedy (2) platí. Nyní budeme postupovat matematickou indukcí. Předpokládejme tedy, že pro nějaké $n \geq 8$ platí (2). Potom

$$\frac{\left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{n+2}}{\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1}} = \frac{n+1}{n+2}\left(\frac{(n+1)^2}{n(n+2)}\right)^{n+1} = \frac{n+1}{n+2}\left(\frac{n^2+2n+1}{n^2+2n}\right)^{n+1} =$$
$$= \frac{n+1}{n+2}\left(1+\frac{1}{n^2+2n}\right)^{n+1} \geq \frac{n+1}{n+2}\left(1+\frac{n+1}{n^2+2n}\right) =$$
$$= \frac{n+1}{n+2}\left(\frac{n^2+3n+1}{n^2+2n}\right) = \frac{n^3+4n^2+4n+1}{n^3+4n^2+4n} > 1.$$

To znamená, že

$$\left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{n+2} > \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1} > \frac{1}{3},$$

a tím je indukční krok ukončen. Platí tedy

$$\frac{n^{n+1}}{(n+1)^n} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1}(n+1) > \frac{n+1}{3}.$$

Abychom dokázali nerovnost (1), stačí jen dokázat, že pro každé $n \geq 8$ je $\frac{n+1}{3} \geq \log_2 n$, což je ekvivalentní s nerovností $2^{\frac{n+1}{3}} \geq n$, a tedy i s nerovností

$$2^{n+1} \geq n^3. \tag{3}$$

$2^{8+1} = 2^9$, $8^3 = 2^9$, tedy pro $n = 8$ nerovnost (3) platí. Opět indukcí dokážeme, že platí i pro všechna $n \geq 9$. Předpokládejme, že pro nějaké $n \geq 8$ platí (3). Pak

$$\frac{2^{n+2}}{(n+1)^3} = 2\cdot\frac{2^{n+1}}{n^3}\frac{n^3}{(n+1)^3} \geq 2\cdot\left(\frac{n}{n+1}\right)^3 = 2\cdot\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^3 \geq$$
$$\geq 2\cdot\left(1-\frac{1}{9}\right)^3 = 2\cdot\frac{8^3}{9^3} = \frac{1024}{729} > 1.$$

To znamená, že $2^{n+2} > (n+1)^3$, a tím je důkaz indukcí hotov. Tím jsme už dokázali i nerovnost (1). Daná nerovnost tedy platí jen pro čísla $n = 2, 3, 4, 5, 6$ a 7.

Poznámky opravovatele: Nejdříve bych chtěla znovu připomenout, že

$$2^{n^{n+1}} = 2^{(n^{n+1})} \neq (2^n)^{(n+1)} = 2^{n\cdot(n+1)},$$

což je věc, ve které bohužel dost řešitelů nemá jasno. Takže už jen za úpravu zadání na tvar $n^{n+1} < (n+1)^n \cdot \log_2 n$ jsem dávala jeden bod. Potom přišly na řadu odhady, většinou pomocí binomické věty na $(n+1)^n$. Někteří používali nerovnost $(1+\frac{1}{n})^n < e$, kterou zdůvodňovali faktem $\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n = e$. To ale samozřejmě nestačí, to důležité je, že posloupnost k této limitě konverguje monotónně, tedy že je rostoucí. A to už se zase musí ukázat. Také se vyskytlo použití derivací k dokázání toho, že je nějaká posloupnost rostoucí nebo klesající. V tom případě si ale musíme uvědomit (a také napsat), že např. pomocí derivace ukážu, že rostoucí je funkce f, a z toho plyne, že i posloupnost $f(n)$, $n \in \mathbb{N}$ je rostoucí. Rozhodně v této souvislosti nemohu mluvit o derivaci posloupnosti.

5. úloha

Určete 3 číslice před a 3 číslice za desetinnou čárkou čísla $-\sqrt[3]{27^{729}+9^{729}}$.

Označme si $A=\sqrt[3]{27^{729}+9^{729}}$. Budeme hledat tři číslice před a tři za desetinnou čárkou čísla A (jsou totiž stejné jako u čísla $-A$). Platí

$$3^{729}=\sqrt[3]{27^{729}}<A<\sqrt[3]{27^{729}+3\cdot 9^{729}+3\cdot 3^{729}+1}=3^{729}+1,$$

a proto $\lfloor A\rfloor=3^{729}$. K určení tří číslic před desetinnou čárkou čísla A tedy stačí spočítat zbytek $x=3^{729}$ po dělení 1000. Protože $1000=2^3\cdot 5^3=8\cdot 125$, stačí spočítat zvlášť zbytky po dělení 8 a 125. Upravíme $3^{729}=3\cdot 9^{364}=3\cdot(8+1)^{364}\equiv 3\cdot 1^{364}=3 \pmod 8$.

Protože $\varphi(125)=100$, plyne z Eulerovy věty (viz úvod k sérii) $3^{100}\equiv 1 \pmod{125}$, a tedy

$$3^{729}\equiv 3^{29}\equiv 81\cdot\left(3^5\right)^5=-44\cdot(2\cdot 125-7)^5\equiv 44\cdot 7^5=308\cdot 7^4=$$

$$=(2\cdot 125+58)\cdot(19\cdot 125+26)\equiv 58\cdot 26=1508\equiv 8 \pmod{125}.$$

Pro zbytek x z intervalu $\langle 0,999\rangle$ a pro nějaké celé y z intervalu $\langle 0,7\rangle$ tedy platí

$$x=8+125\cdot y\equiv 3 \pmod 8,\ \text{tedy}\ (15\cdot 8+5)\cdot y\equiv 3 \pmod 8,\ \text{takže}\ 5\cdot y\equiv 3 \pmod 8.$$

Poslední kongruenci vynásobíme pěti a dostaneme $y\equiv 25y\equiv 15\equiv 7 \pmod 8$. Vidíme, že $y=7$, takže $x=8+125\cdot 7=883$ a hledané číslice před desetinnou čárkou daného čísla jsou 8, 8 a 3.

Nyní budeme hledat tři číslice za desetinnou čárkou čísla $b=A-\lfloor A\rfloor$ (b je necelá část čísla A). Platí

$$27^{729}+9^{729}=(3^{729}+b)^3=27^{729}+3\cdot b\cdot 9^{729}+3\cdot b^2\cdot 3^{729}+b^3,$$

$$3\cdot b\cdot 9^{729}+3\cdot b^2\cdot 3^{729}+b^3=9^{729}.$$

Protože $b>0$, dostáváme

$$3\cdot b\cdot 9^{729}<9^{729}\Rightarrow b<\frac{1}{3}<0{,}3334.$$

Protože $b<1$, snadno odhadneme

$$3\cdot b\cdot 9^{729}>9^{729}-3\cdot 3^{729}-1,$$

$$
\begin{aligned}
b &> \frac{1}{3} - \left(\frac{1}{3}\right)^{729} - \frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{9}\right)^{729} > \frac{1}{3} - \left(\frac{1}{27}\right)^{243} - \left(\frac{1}{81}\right)^{243} > \\
&> \frac{1}{3} - \left(\frac{1}{10}\right)^{243} - \left(\frac{1}{10}\right)^{243} > 0{,}3333 - 0{,}0001 - 0{,}0001 > 0{,}333.
\end{aligned}
$$

Hledané 3 číslice za desetinnou čárkou jsou tedy 3, 3 a 3.

Poznámky opravovatele: Většina řešení byla správná. Někteří řešitelé využili binomickou větu a tím si ušetřili spoustu početní práce, a tak obdželi $+i$. Heuristické úvahy typu 1 je strašně moc malé vzhledem k 10000 nejsou důkazy, vždy je potřeba udělat nějaké přesné odhady, takže jsem byl nucen strhávat i body reálné.

6. úloha

Dokažte, že rovnice $-4^{7^{8^9}}x^2 - 5^{7^{8^9}}x - 6^{7^{8^9}} = 0$ má dva různé iracionální kořeny.

Nejprve dokážeme, že diskriminant dané rovnice je kladný.

$$
D = 5^{2\cdot 7^{8^9}} - 4\cdot(4\cdot 6)^{7^{8^9}} = 25^{7^{8^9}} - 4\cdot 24^{7^{8^9}}.
$$

Stačí tedy ověřit nerovnost $25^{7^{8^9}} > 4\cdot 24^{7^{8^9}}$, neboli

$$
\left(\frac{25}{24}\right)^{7^{8^9}} > 4.
$$

Protože

$$
\left(\frac{25}{24}\right)^{7^{8^9}} = \left(1+\frac{1}{24}\right)^{7^{8^9}} > 1 + \frac{7^{8^9}}{24} > 4
$$

(první nerovnost plyne např. z binomické věty nebo Bernoulliho nerovnosti), je $D > 0$. Daná rovnice má tedy dva různé reálné kořeny.

Zbývá dokázat, že tyto kořeny jsou iracionální. K tomu stačí ukázat, že $\sqrt{D}$ je iracionální, tedy že D není druhou mocninou přirozeného čísla. K tomu určíme zbytek čísla D po dělení sedmi. Využijeme Eulerovu větu (viz úvod k sérii). Protože $\varphi(7) = 6$, určíme zbytek exponentu 7^{8^9} po dělení šesti. To je ale jednoduché

$$
7^{8^9} = (1+6)^{8^9} \equiv 1^{8^9} = 1 \pmod 6.
$$

Jelikož čísla 25 a 24 jsou s číslem 7 nesoudělná, dostáváme

$$
\begin{aligned}
25^{7^{8^9}} &\equiv 25^1 \equiv 4 \pmod 7 \\
24^{7^{8^9}} &\equiv 24^1 \equiv 3 \pmod 7
\end{aligned}.
$$

Celkem tedy máme

$$
D \equiv 4 - 4\cdot 3 = -8 \equiv 6 \pmod 7.
$$

Žádná druhá mocnina přirozeného čísla ale nemá zbytek 6 po dělení 7. Pokud k je celé číslo, pak

$$(7k)^2 \equiv 0,\ (7k \pm 1)^2 \equiv 1,\ (7k \pm 2)^2 \equiv 4,\ (7k \pm 3)^2 \equiv 9 \equiv 2 \pmod 7.$$

Druhé mocniny přirozených čísel tedy mohou mít po dělení 7 pouze zbytek 0, 1, 2 nebo 4. Z toho plyne, že D není druhou mocninou přirozeného čísla, a tedy kořeny dané rovnice jsou iracionální.

Poznámky opravovatele: V úloze bylo nejprve potřeba ověřit, že diskriminant rovnice je kladný, a tedy že rovnice má dva různé reálné kořeny. Poté bylo potřeba ukázat, že odmocnina z diskriminantu není racionální číslo (několik řešení přímo ukazovalo, že rovnice nemá racionální kořeny). Jelikož první část byla nepoměrně jednodušší, hodnotil jsem ji pouze jedním bodem. Ještě malá poznámka, dost řešitelů se při různých odhadech odvolávalo na kalkulačku. Je to určitá vada na kráse, kalkulačky jsou nepřesné a v našem případě byly odhady dosti hrubé na to, aby šly odvodit bez kalkulačky. Nicméně body jsem za to nestrhával.

7. úloha

Zjistěte, na kolik nul končí číslo $-2002!$, a určete jeho poslední tři nenulové číslice.

Počet nul na konci desítkového zápisu čísla $-2002!$ je roven nejvyšší mocnině čísla 10, která dělí $2002!$. Tato mocnina je rovna $\min(r_5, r_2)$, kde r_5 (resp. r_2) je mocnina prvočísla 5 (resp. 2) v rozkladu čísla $2002!$ na prvočinitele. Platí

$$r_5 = \left\lfloor \frac{2002}{5} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2002}{5^2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2002}{5^3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2002}{5^4} \right\rfloor + \cdots = 400 + 80 + 16 + 3 + 0 + 0 + \cdots = 499,$$

(každé páté číslo je dělitelné 5, navíc každé dvacáté páté 25, ...), r_2 je větší než r_5 (např. proto, že $r_2 > \left\lfloor \frac{2002}{2} \right\rfloor = 1001 > 499$), takže hledaný počet nul je roven $r_5 = 499$.

V druhé části úlohy najdeme poslední 4 číslice[3] před 499 koncovými nulami čísla $-2002!$. Budeme vlastně hledat zbytek x čísla $\frac{2002!}{10^{499}}$ po dělení 10000. Protože $10000 = 2^4 \cdot 5^4$, stačí určit zvlášť zbytek po dělení $2^4 = 16$ a $5^4 = 625$. Protože 2^{1001} dělí $2002!$, také $2^{1001-499} = 2^{502}$ dělí $\frac{2002!}{10^{499}}$, a tedy $\frac{2002!}{10^{499}} \equiv 0 \pmod{16}$. K určování zbytku čísla $\frac{2002!}{10^{499}}$ po dělení 625 nejprve spočítáme zbytek čísla $\frac{2002!}{5^{499}}$ po dělení 625. K tomu využijeme následující vzorce, které platí

[3]Možná je trochu divné, proč čtyři, když zadání po nás chce tři. Je to proto, že jedna z posledních tří číslic vyjde nulová. To samozřejmě řešitel předem neví a musí to nejdříve vyzkoušet ...

pro všechna celá čísla k:

$$\begin{aligned}
(25k+1)(25k+2)(25k+3)(25k+4) &\equiv 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4 = 24,\\
(25k+6)(25k+7)(25k+8)(25k+9) &\equiv 6\cdot 7\cdot 8\cdot 9 = 3024 = 4\cdot 625+524 \equiv 524,\\
(25k+11)(25k+12)(25k+13)(25k+14) &\equiv 11\cdot 12\cdot 13\cdot 14 = 38\cdot 625+274 \equiv 274,\\
(25k+16)(25k+17)(25k+18)(25k+19) &\equiv (25k-9)(25k-8)(25k-7)(25k-6) \equiv\\
&\equiv 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6 \equiv 524,\\
(25k+21)(25k+22)(25k+23)(25k+24) &\equiv (25k-4)(25k-3)(25k-2)(25k-1) \equiv\\
&\equiv 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1 = 24,\\
\frac{(25k+1)(25k+2)\cdots(25k+24)}{(25k+5)(25k+10)(25k+15)(25k+20)} &\equiv 24^2\cdot 274\cdot 524^2 \equiv 576\cdot 274\cdot(-101)^2 \equiv\\
\equiv -49\cdot 274\cdot 10201 &= -13426\cdot(16\cdot 625+201) \equiv\\
\equiv -(21\cdot 625+301)\cdot 201 &\equiv -60501 \equiv -501 \equiv 124 \pmod{625}.
\end{aligned}$$

V několika následujících úpravách budeme postupně z čitatele vytýkat čísla nedělitelná 5, která upravíme podle uvedených vzorců, a zbylý zlomek potom zkrátíme vhodnou mocninou 5:

$$\frac{2002!}{5^{499}} \equiv 2002\cdot 2001\cdot 124^{80}\cdot\frac{400!}{5^{99}} \equiv 127\cdot 126\cdot 124^{80}\cdot 124^{16}\cdot\frac{80!}{5^{19}} \equiv 16002\cdot 124^{96}\cdot 124^{3}\cdot 24\cdot\frac{16!}{5^{3}} \equiv$$

$$\equiv (25\cdot 625+377)\cdot 124^{99}\cdot 24\cdot 16\cdot 24\cdot 524\cdot 274\cdot 3! \equiv 377\cdot 124^{99}\cdot 24^2\cdot 16\cdot 524\cdot 274\cdot 6 \pmod{625}.$$

Protože

$$124^{99} = (125-1)^{99} \equiv (-1)^{99}+99\cdot 125\cdot(-1)^{98} = -1+100\cdot 125-125 \equiv -126 \equiv 499 \pmod{625},$$

je

$$\begin{aligned}
\frac{2002!}{5^{499}} &\equiv (-248)\cdot(-126)\cdot(625-49)\cdot 16\cdot(-101)\cdot 1644 \equiv\\
&\equiv (50\cdot 625-2)\cdot(-49)\cdot(-3\cdot 625+259)\cdot(3\cdot 625-231) \equiv 98\cdot 259\cdot(-231) =\\
&= (41\cdot 625-243)\cdot(-231) \equiv 243\cdot 231 = 89\cdot 625+508 \equiv 508 \pmod{625}.
\end{aligned}$$

Nyní již spočítáme zbytek čísla $\frac{2002!}{10^{499}}$ po dělení 625. Z Eulerovy věty (viz úvod k sérii) plyne $2^{500} \equiv 1 \pmod{625}$, a tedy

$$\frac{2002!}{10^{499}} \equiv 2^{500}\cdot\frac{2002!}{10^{499}} = 2\cdot\frac{2002!}{5^{499}} \equiv 2\cdot 508 \equiv 391 \pmod{625}.$$

Označme si tedy x, $0 \le x \le 9999$ zbytek čísla $\frac{2002!}{10^{499}}$ po dělení 10000. Víme, že $x \equiv 0 \pmod{16}$ a $x \equiv 391 \pmod{625}$. Je tedy $x = 391 + 625y$ pro nějaké celé číslo y, $0 \le y \le 15$. Víme navíc, že

$$0 \equiv x = 391 + 625y = (24\cdot 16+7) + (39\cdot 16+1)y \equiv 7 + y \pmod{16}.$$

Musí tedy být $y = 9$, takže $x = 391 + 625 \cdot 9 = 6016$.

Poslední čtyři číslice čísla $\frac{2002!}{10^{499}}$ jsou tedy 6, 0, 1 a 6 (nyní je vidět, že k určení posledních tří nenulových číslic by nestačilo počítat zbytek čísla $\frac{2002!}{10^{499}}$ po dělení 1000) a konečně poslední tři nenulové číslice čísla $-2002!$ jsou 6, 1 a 6.

Poznámky opravovatele: Téměř všichni řešitelé měli v pořádku první část úlohy, za což obdrželi jeden bod, neboť tato část byla mnohem snazší než druhá. S tou si zcela neporadil téměř nikdo, nejčastější chybou bylo považování nuly za nenulovou číslici. Řešení spočítaná počítačem jsem ohodnotil nulou, neboť jsme matematický seminář.

8. úloha

Určete dvě číslice před a dvě číslice za desetinnou čárkou čísla $-(\sqrt{5}+\sqrt{7})^{2002}$.

Označme si $B = \left(\sqrt{5}+\sqrt{7}\right)^{2002}$. Budeme hledat dvě číslice před a dvě za desetinnou čárkou čísla B (jsou stejné jako u čísla $-B$). Platí $B = \left(12 + 2\sqrt{35}\right)^{1001}$. Uvažujme posloupnost $c_0, c_1, c_2, \ldots$, kde $c_n = \left(12 + 2\sqrt{35}\right)^n + \left(12 - 2\sqrt{35}\right)^n$. (Posloupnost je zvolena tak, aby jejími členy byla celá čísla a aby pro velká n bylo c_n přibližně rovno $\left(12 + 2\sqrt{35}\right)^n$.) Protože $(12 + 2\sqrt{35}) + (12 - 2\sqrt{35}) = 24$ a $(12 + 2\sqrt{35})(12 - 2\sqrt{35}) = 4$, jsou čísla $\lambda_1 = (12 + 2\sqrt{35})$ a $\lambda_2 = (12-2\sqrt{35})$ kořeny kvadratické rovnice $x^2 = 24x-4$, pro každé celé $n \geq 0$ jsou také kořeny rovnice $x^{n+2} = 24x^{n+1} - 4x^n$. Platí tedy $\lambda_1^{n+2} = 24\lambda_1^{n+1} - 4\lambda_1^n$ a $\lambda_2^{n+2} = 24\lambda_2^{n+1} - 4\lambda_2^n$. Sečtením dostaneme $c_{n+2} = \lambda_1^{n+2} + \lambda_2^{n+2} = 24(\lambda_1^{n+1} + \lambda_2^{n+1}) - 4(\lambda_1^n + \lambda_2^n) = 24c_{n+1} - 4c_n$. Vidíme, že posloupnost $c_0, c_1, c_2, \ldots$ vyhovuje rekurentnímu předpisu

$$c_{n+2} = 24c_{n+1} - 4c_n.$$

Protože $c_0 = 2$ a $c_1 = 24$, můžeme již podle tohoto předpisu určit zbytky d_n čísel c_n po dělení 100. Sestavíme si tabulku pro několik prvních hodnot d_n:

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
d_n	2	24	68	36	92	64	68	76	52	44	48	76
n	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	
d_n	32	64	8	36	32	24	48	56	52	24	68	

Platí $d_1 = d_{21}$ a $d_2 = d_{22}$. Snadno tedy matematickou indukcí dokážeme, že pro všechna přirozená n platí $d_{n+20} = d_n$. Odtud $d_{1001} = d_{50 \cdot 20+1} = d_1 = 24$. Z toho plyne

$$B + (12 - 2\sqrt{35})^{1001} = c_{1001} \equiv 24 \pmod{100}.$$

Protože $(5 + 9/10)^2 = 25 + 9 + (9/10)^2 < 35$, můžeme odhadnout

$$0 < (12 - 2\sqrt{35})^{1001} < (12 - 2 \cdot 5{,}9)^{1001} = 0{,}2^{1001} < 0{,}01.$$

Hledané číslice čísla B před desetinnou čárkou jsou tedy 2 a 3 a za desetinnou čárkou 9 a 9.

Poznámky opravovatele: Řešitelé většinou použili jeden ze dvou následujících myšlenkových postupů (kromě *Martina Tancera*, který popsal oba): buď napsali binomický rozvoj $(\sqrt{5}+\sqrt{7})^{2002}$ a $(\sqrt{5}-\sqrt{7})^{2002}$ nebo $(12+2\sqrt{35})^{1001}$ a $(12-2\sqrt{35})^{1001}$, ze kterého pak různými úpravami a použitím Eulerovy věty vyškrtali většinu členů, až dostali výsledek (téměř vždy správný). Nebo odvodili nějaký rekurentní vzorec, pomocí něhož spočítali spoustu čísel a v nich našli periodicitu či jiný systém. Druhý způsob jsem odměnila $-i$.