Povídání k šesté sérii

Připomeneme si zde několik pojmů, které se Ti mohou při řešení úloh této série hodit. *Polynomem* rozumíme libovolnou funkci $p(x)$ proměnné x tvaru

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,$$

kde n je celé nezáporné číslo a $a_0, a_1, \ldots, a_n$ jsou koeficienty, $a_n \neq 0$ (navíc připouštíme též případ $p(x) \equiv 0$). Koeficienty jsou většinou reálná (případně komplexní) čísla. Číslo n nazýváme *stupněm* polynomu $p(x)$. Platí základní věta:

Věta. *Nechť $p(x)$ je nenulový polynom stupně $n \geq 1$. Pak existuje alespoň jedno řešení rovnice*

$$p(x) = 0$$

v oboru komplexních čísel. Navíc existuje posloupnost $x_1, x_2, \ldots, x_n$ (ne nutně různých) komplexních čísel (až na pořadí je jednoznačně určená) takových, že

$$p(x) = a_n(x - x_1)(x - x_2)\cdots(x - x_n).$$

Tuto rovnost je nutno chápat nejen jako rovnost dvou funkcí, na pravé a levé straně budou po roznásobení polynomy se stejnými koeficienty u jednotlivých mocnin x.

Čísla $x_1, x_2, \ldots, x_n$ z předchozí věty se nazývají *kořeny* polynomu $p(x)$ (přesvěčte se, že právě čísla $x_1, x_2, \ldots, x_n$ řeší rovnici $p(x) = 0$).[1] Jako důsledek dostáváme známé Viètovy vztahy:

$$\begin{aligned}
-\frac{a_{n-1}}{a_n} &= x_1 + x_2 + \cdots + x_n,\\
\frac{a_{n-2}}{a_n} &= x_1x_2 + x_1x_3 + \cdots + x_{n-1}x_n,\\
&\vdots\\
(-1)^n\frac{a_0}{a_n} &= x_1x_2\cdots x_n.
\end{aligned}$$

Nyní se budeme trochu věnovat tzv. *symetrickým* polynomům.[2] Polynom více proměnných $p(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ nazveme symetrickým, pokud se nezmění při záměně pořadí proměnných. Tedy je-li π libovolná permutace čísel $1, 2, \ldots, n$, pak platí

$$p(x_{\pi(1)}, x_{\pi(2)}, \ldots, x_{\pi(n)}) = p(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

---

[1] Poznamenejme snadný důsledek, že pro každý polynom p stupně n existuje nejvýše n (různých) řešení rovnice $p(x) = 0$.

[2] Jde však jen o velmi stručný úvod. Pokud se chceš o symetrických polynomech dozvědět více, zkus nahlédnout např. do knížečky Alois Kufner: *Symetrické funkce*, Škola mladých matematiků 52, Mladá Fronta, Praha 1982.

Např. funkce dvou proměnných $q(x, y) = x + y + 3xy + 2x^3 + 2y^3$ je symetrický polynom. Uvažujme nyní symetrické polynomy n proměnných a označme

$$\begin{aligned} s_1 &= x_1 + x_2 + \cdots + x_n, \\ s_2 &= x_1x_2 + x_1x_3 + \cdots + x_{n-1}x_n, \\ &\vdots \\ s_n &= x_1x_2 \cdots x_n \end{aligned}$$

takzvané *elementární* symetrické polynomy. Označme dále

$$\begin{aligned} v_1 &= x_1 + x_2 + \cdots + x_n, \\ v_2 &= x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2, \\ &\vdots \\ v_n &= x_1^n + x_2^n + \cdots + x_n^n. \end{aligned}$$

Pak platí následující věta o symetrických polynomech:

Věta. *Nechť p je symetrický polynom v proměnných $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Pak existuje jednoznačně určený polynom n proměnných r takový, že platí*[3]

$$p(x_1, x_2, \ldots, x_n) = r(s_1, s_2, \ldots, s_n).$$

Poznámka: Stejná věta zůstane v platnosti budeme-li psát místo polynomů $s_1, s_2, \ldots, s_n$ polynomy $v_1, v_2, \ldots, v_n$.

Na ukázku zde vyjádříme náš polynom $q(x, y)$ dvou proměnných:

$$q(x, y) = x + y + 3xy + 2x^3 + 2y^3 = s_1 + 3s_2 + 2s_1^3 - 6s_1s_2 = v_1 + \frac{3}{2}v_1^2 - \frac{3}{2}v_2 - v_1^3 + 3v_1v_2,$$

kde

$$\begin{aligned} s_1 &= x + y, \\ s_2 &= xy, \\ v_1 &= x + y, \\ v_2 &= x^2 + y^2. \end{aligned}$$

Platnost těchto vztahů si laskavý čtenář ověří přímym roznásobením.

[3] Věta netvrdí nic jiného, než že každý symetrický polynom lze právě jedním způsobem vyjádřit pomocí elementárních symetrických polynomů, sčítání a násobení.

6. série

Téma: Polynomy

Termín odeslání: 11. března 2002

1. úloha (3 body)

Najděte všechny polynomy $P(x)$ s celočíselnými koeficienty takové, že

$$P(1) = 2001 \text{ a } P(2001) = 2002.$$

2. úloha (3 body)

Pro která $\alpha \in \mathbb{R}$ existuje právě jeden polynom $P(x)$ splňující $P(x)^2 + 2x^2 P(x) = 8x^4 + \alpha x^2 + 1$ pro všechna $x \in \mathbb{N}$?

3. úloha (3 body)

Najděte všechny polynomy $P(x)$ splňující rovnici

$$(x^2 + 2002x + 2001)P(x-3) = (x^2 + 4x + 3)P(x+3).$$

4. úloha (5 bodů)

Mějme pravidelný n-úhelník vepsaný jednotkové kružnici. Určete hodnotu součinu vzdáleností jednoho vrcholu od ostatních.

5. úloha (5 bodů)

Buď $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_0$ a $Q(x) = b_{n+1}x^{n+1} + b_n x^n + \dots + b_0$, přičemž platí $Q(x) = (x-r)P(x)$ pro nějaké $r \in \mathbb{R}$. Označme $a = \max(|a_0|, \dots, |a_n|)$ a $b = \max(|b_0|, \dots, |b_{n+1}|)$. Dokažte, že platí nerovnost $\frac{a}{b} \leq n+1$.

6. úloha (5 bodů)

Koeficienty polynomu $P(x)$ jsou celá čísla. Pro každé přirozené číslo n označme a_n součet cifer v desítkovém zápisu čísla $P(n)$. Dokažte, že existuje číslo, které se v posloupnosti a_1, $a_2, \dots$ vyskytuje nekonečněkrát.

7. úloha (5 bodů)

Najděte největší konstantu $k \in \mathbb{R}$ takovou, že k libovolnému polynomu $P(x)$ s komplexními koeficienty najdeme $z \in \mathbb{C}$, $|z| \leq 1$, že $|P(z) - \overline{z}| \geq k$.

8. ÚLOHA (5 BODŮ)

Buď $P(x)$ polynom s komplexními koeficienty stupně n takový, že $|P(x)| < 1$ pro každé komplexní číslo $|x| < 1$. Dokažte, že $|P(2)| < 4^n$.

Řešení 6. série

1. úloha

Najděte všechny polynomy $P(x)$ s celočíselnými koeficienty takové, že

$$P(1) = 2001 \text{ a } P(2001) = 2002.$$

Nechť $P(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$, kde $a_i \in \mathbb{Z}$ pro $1 \le i \le n$. Podle zadání má tedy platit

$$P(1) = \sum_{i=0}^{n} a_i 1^i = 2001,$$

$$P(2001) = \sum_{i=0}^{n} a_i 2001^i = 2002.$$

Odečtením dostaneme

$$1 = 2002 - 2001 = P(2001) - P(1) = \sum_{i=0}^{n} a_i 2001^i - \sum_{i=0}^{n} a_i 1^i =$$

$$= \sum_{i=0}^{n} a_i (2001^i - 1^i) = \sum_{i=0}^{n} a_i (2001 - 1) \sum_{j=0}^{i-1} 2001^j 1^{i-1-j} = 2000 \sum_{i=0}^{n} a_i \sum_{j=0}^{i-1} 2001^j.$$

Protože koeficienty polynomu jsou celá čísla, máme na pravé straně číslo dělitelné 2000 a to má být rovno 1. To je ovšem spor, a proto žádný polynom vyhovující zadání neexistuje.

2. úloha

Pro která $\alpha \in \mathbb{R}$ existuje právě jeden polynom $P(x)$ splňující $P(x)^2 + 2x^2 P(x) = 8x^4 + \alpha x^2 + 1$ pro všechna $x \in \mathbb{N}$?

Nejdříve si uvědomíme, že rovnají-li se dva polynomy $U(x)$ a $V(x)$ pro každé $x \in \mathbb{N}$, mají už nutně stejné koeficienty. Skutečnte, kdyby tomu tak nebylo, pak polynom $W(x) = U(x) - V(x)$ by měl alespoň jeden nenulový koeficient a tudíž podle věty v úvodu k této sérii má nejvýše n kořenů, kde n je stupeň polynomu $W(x)$. My však víme, že $W(x) = 0$, kdykoliv x je přirozené číslo. Našli jsme tedy nekonečně mnoho různých x, pro které $W(x) = 0$ a to je spor.

Nyní k úloze. Polynomy na obou stranách rovnosti mají tedy stejné koeficienty. Při pohledu na levou stranu rovnice se nabízí doplnění na čtverec. Touto úpravou dostáváme rovnici $\left(P(x) + x^2\right)^2 = 9x^4 + \alpha x^2 + 1$. Vzniklý výraz napravo musí být tedy mocninou polynomu a protože je tento polynomem čtvrtého stupně, jeho odmocnina bude polynom druhého stupně. Hledáme tedy polynom $Q(x) = ax^2 + bx + c$ takový, že $Q(x)^2 = 9x^4 + \alpha x^2 + 1$ pro nějaké $\alpha \in \mathbb{R}$. Je tedy

$$9x^4 + 0x^3 + \alpha x^2 + 0x + 1 = Q(x)^2 = a^2x^4 + 2abx^3 + (b^2 + 2ac)x^2 + 2bcx + c^2.$$

Z toho vidíme, že $a \in \{3, -3\}$ a $c \in \{1, -1\}$, z čehož dále (kvůli koeficientu u x) $b = 0$. Nabízejí se nám tedy čtyři polynomy podle znamének u koeficientů a a c. Nyní si všimněme, že pro danou dvojici a, c (b je vždy 0) je $\alpha = 2ac$ a $P(x) = Q(x) - x^2$. Kombinací možností pro a a c dostaneme dvakrát $\alpha = 6$ a dvakrát $\alpha = -6$, přičemž pro každou kombinaci zjevně dostaneme jiný polynom $P(x)$. Z toho plyne, že pro libovolné $\alpha \in \mathbb{R}$ buď neexistuje žádný polynom splňující rovnici ze zadání, nebo existují právě dva polynomy splňující tuto rovnost. Proto neexistuje žádné α reálné vyhovující zadání.

Poznámky opravovatele: Téměř všichni řešitelé opomíjeli zdůvodnit, že pokud se dva polynomy rovnají pro každé $x \in \mathbb{N}$, pak mají stejné koeficienty. Body jsem za to nestrhával. Někteří se snažili úlohu řešit jako kvadratickou rovnici pro $P(x)$, většinou si však neuvědomili, že řešení pak vůbec nemusí být polynomem.

3. úloha

Najděte všechny polynomy $P(x)$ splňující rovnici

$$(x^2 + 2002x + 2001)P(x - 3) = (x^2 + 4x + 3)P(x + 3).$$

Úlohu jistě řeší polynom $P(x) = 0$, z dalších úvah ho vyloučíme. Mají-li se rovnat polynomy na obou stranách, musí se rovnat také soubory[4] jejich kořenů. Rovnost si proto (pro $P(x)$ stupně n) můžeme přepsat jako

$$a(x+1)(x+2001)(x-3-x_1)\cdots(x-3-x_n) = a(x+1)(x+3)(x+3-x_1)\cdots(x+3-x_n),$$

kde x_i jsou kořeny polynomu $P(x)$ a $a \neq 0$ je reálné číslo. Následující soubory kořenů jsou tedy totožné:

$$A = (-1, -2001, 3 + x_1,\ \dots, 3 + x_n),$$
$$B = (-1, -3, -3 + x_1,\ \dots, -3 + x_n).$$

[4] V souboru se oproti množině mohou prvky opakovat.

Pokud je $A = B$, musí být jistě

$$-1 - 2001 + \sum_{i=1}^{n}(3 + x_i) = -1 - 3 + \sum_{i=1}^{n}(-3 + x_i).$$

Z toho po drobných úpravách dostaneme $6n = 1998$, a tedy $n = 333$. Proto pokud nějaký polynom vyhovuje zadání, je stupně 333. Nyní postupujme takto. V B se vyskytuje -3, musí se tedy vyskytovat i v A. BÚNO nechť je tímto členem $3+x_1$, tedy $x_1 = -6$. Nyní jsme ovšem v B dostali člen $-3 - 6 = -9$, který se musí vyskytovat i v A. BÚNO je to člen $3 + x_2$, tedy $x_2 = -12$. Tímto postupem dostaneme, že $x_i = -6i$ pro $1 \leq i \leq n$. V posledním kroku tak vyjde, že $x_{333} = -1998$ a tudíž v B je člen $-3 + x_{333} = -2001$. Tento by měl tedy být i v A. Ale tam je, tudíž soubory A a B jsou opravdu totožné a našli jsme jeden hledaný polynom. Tento polynom však ještě může být vynásoben libovolným reálným číslem a. Připustíme-li i $a = 0$, dostáváme, že všechna řešení jsou tvaru $P(x) = a(x + 6)(x + 12) \cdots (x + 1998)$, kde a probíhá reálná čísla.

Poznámky opravovatele: Došlých řešení nebylo mnoho. Ta, která se podobala autorskému, byla většinou správná – až na výjimky, kdy řešitelé nacházeli stále o 6 menší kořeny, nechali se tím ukolébat a prohlásili, že pro každé $a \in \mathbb{Z}$ je $P(6a) = 0$. To ale ze zadání nevyplývá: když do

$$(x + 1)(x + 2001)P(x - 3) = (x + 1)(x + 3)P(x + 3)$$

dosadíte $x = -2001$ nebo $x = -3$, budou na obou stranách nuly, ale nic o hodnotě $P(-2004)$ nebo $P(0)$ z toho nezjistíte. Někteří řešitelé se pokusili polynom P vyjádřit jako $\sum_{i=0}^{n} a_i x^i$, místo x dosadili $(x-3)$ a $(x+3)$, napsali binomické rozvoje a porovnávali koeficienty na levé a pravé straně. To byla ovšem cesta zkázy, neboť ve změti písmenek se všichni zamotali a po zákonité chybě došli ke sporu.

4. úloha

Mějme pravidelný n-úhelník vepsaný jednotkové kružnici. Určete hodnotu součinu vzdáleností jednoho vrcholu od ostatních.

Umístěme si n-úhelník do soustavy souřadnic tak, aby střed kružnice jemu opsané ležel v počátku a jeden vrchol ležel v bodě 1. Snadno vidíme, že vrcholy lze interpretovat jako komplexní čísla $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1}$ v Gaussově rovině, kde

$$\lambda_k = e^{\frac{2\pi i k}{n}}.$$

Pro lepší představu poznamenejme, že tato po dvou různá čísla jsou všechna řešením rovnice $x^n = 1$, neboli kořenem polynomu $p(x) = x^n - 1$. Máme tedy rovnost

$$a(x - \lambda_0)(x - \lambda_1) \cdots (x - \lambda_{n-1}) = x^n - 1 = (x - 1)(x^{n-1} + x^{n-2} + \cdots + x + 1),$$

pro nějaké $a \neq 0$. Srovnáme-li koeficient např. u mocniny x^n, zjistíme, že $a = 1$. Oba polynomy lze vydělit kořenovým činitelem $x - 1$ (je $\lambda_0 = 1$) a dostáváme

$$(x-\lambda_1)(x-\lambda_2)\cdots(x-\lambda_{n-1}) = (x^{n-1} + x^{n-2} + \cdots + x + 1).$$

Součin vzdáleností vrcholu $\lambda_0 = 1$ od ostatních tedy můžeme dostat tak, že do poslední rovnosti (přidáme-li absolutní hodnoty) dosadíme $x = \lambda_0 = 1$. Dostáváme

$$|\lambda_0 - \lambda_1| \cdot |\lambda_0 - \lambda_2| \cdots |\lambda_0 - \lambda_{n-1}| = |(1-\lambda_1)(1-\lambda_2)\cdots(1-\lambda_{n-1})| = \\ = |1^{n-1} + 1^{n-2} + \cdots + 1^1 + 1| = |n| = n.$$

Hledaný součin vzdáleností je tedy n.

Poznámky opravovatele: Polovina řešitelů správně nepochopila zadání. Úkolem bylo vypočítat *hodnotu* součinu, takže jsem dlouhý součin plný sinů nemohl považovat za správný výsledek. Pár řešitelům, kteří zadání správně pochopili, ale hodnotu součinu obecně nedokázali, jsem dal alespoň jeden bod.

5. úloha

Buď $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0$ a $Q(x) = b_{n+1}x^{n+1} + b_n x^n + \cdots + b_0$, přičemž platí $Q(x) = (x - r)P(x)$ pro nějaké $r \in \mathbb{R}$. Označme $a = \max(|a_0|, \ldots, |a_n|)$ a $b = \max(|b_0|, \ldots, |b_{n+1}|)$. Dokažte, že platí nerovnost $\frac{a}{b} \leq n + 1$.

Ze zadání plyne rovnost $b_i = -ra_i + a_{i-1}$, $i = 0, 1, 2, \ldots, n$, přičemž definujeme $a_{n+1} = a_{-1} = 0$. Nechť $k \in \{0, 1, 2, \ldots, n\}$ je index, pro nějž $|a_k| = a$. Předpokládejme pro spor, že $b < \frac{a}{n+1}$. Pak pro $i = 0, 1, 2, \ldots, n$ platí:

$$|b_i| < \frac{a}{n+1} \Rightarrow |a_{i-1} - ra_i| < \frac{|a_k|}{n+1}. \tag{1}$$

Rozlišíme několik případů:

(*i*) $|r| \geq 1$: podle (1) musí pro $i = 0, 1, 2, \ldots, n$ platit

$$|a_{i-1}| > |r||a_i| - \frac{|a_k|}{n+1} \geq |a_i| - \frac{|a_k|}{n+1},$$

což upravíme na

$$|a_i| - |a_{i-1}| < \frac{|a_k|}{n+1}. \tag{2}$$

Sečteme-li nerovnost (2) pro $i = 0, 1, 2, \ldots, k$, dostaneme

$$|a_k| = |a_k| - |a_{-1}| < \frac{(k+1)|a_k|}{n+1} \leq |a_k|$$

(využili jsme toho, že $k \leq n$), což je spor. V tomto případě jsme tedy dokázali $\frac{a}{b} \leq n+1$.

(*ii*) $0 < |r| < 1$: Postupujeme podobně jako v prvním případě. Podle (1) pro $i = 0, 1, 2, \ldots, n$ platí $|r||a_i| > |a_{i-1}| - \frac{|a_k|}{n+1}$. Současně $|a_i| \geq |r||a_i|$, takže dostaneme

$$|a_{i-1}| - |a_i| < \frac{|a_k|}{n+1}. \tag{3}$$

Sečteme-li nerovnost (3) pro $i = k+1, k+2, \ldots, n+1$, dostaneme

$$|a_k| = |a_k| - |a_{n+1}| < \frac{(n+1-k)|a_k|}{n+1} \leq |a_k|$$

(využili jsme toho, že $k \geq 0$), což je spor. I v tomto případě jsme tedy dokázali $\frac{a}{b} \leq n+1$.

(*iii*) Pokud $r = 0$, je zřejmě $a = b$, a tedy $\frac{a}{b} \leq n+1$ i v tomto posledním případě.

6. úloha

Koeficienty polynomu $P(x)$ jsou celá čísla. Pro každé přirozené číslo n označme a_n součet cifer v desítkovém zápisu čísla $P(n)$. Dokažte, že existuje číslo, které se v posloupnosti a_1, $a_2, \ldots$ vyskytuje nekonečněkrát.

Předpokládejme nejdříve, že všechna čísla $c_0, c_1, \ldots, c_n$ jsou nezáporná. Označme $P(x) = \sum_{i=0}^{n} c_i x^i$ a p počet cifer čísla c_i s největší absolutní hodnotou, zbývající koeficienty mají počet cifer jistě nejvýše roven p. Uvažujme nyní x tvaru 10^k, kde $k > p$. Je

$$P(x) = \sum_{i=0}^{n} c_i \left(10^k\right)^i = (\cdots(c_n \cdot 10^k + c_{n-1}) \cdot 10^k + c_{n-2}) \cdots) \cdot 10^k + c_0.$$

Podívejme se podrobněji, jak $P(x)$ vzniká. Začneme s c_n, v každém kroku stávající číslo vynásobíme 10^k, čímž dostaneme číslo, které končí na více nul, než je počet cifer koeficientu, který následně přičítáme. Z toho vidíme, že pro každé 10^k, $k > p$, vypadá $P(x)$ tak, že jsou za sebou napsány koeficienty c_n, c_{n-1}, až c_0 oddělené skupinami nul, proto tedy jistě bude $a_{10^k} = \sum_{i=0}^{n} b_i$, kde b_i značí ciferný součet koeficientu c_i pro $0 \leq i \leq n$. Vidíme, že toto číslo nezávisí na k. Protože přirozených čísel větších než p je nekonečně mnoho, našli jsme nekonečně mnoho členů posloupnosti a_n se stejnou hodnotou.

Jsou-li všechny koeficienty c_i nekladné, můžeme polynom vynásobit číslem -1 a řešení zůstává v platnosti – ciferné součty se nemění. Problém nástává, pokud máme jak kladné, tak záporné koeficienty. Nechť tedy BÚNO $c_n > 0$ (můžeme násobit -1). Uvažujme polynom $P(y+k)$ proměnné y, kde k je přirozené číslo. Pokud najdeme vhodné číslo k, pro které bude mít polynom $P(y+k)$ všechny koeficienty nezáporné, dokončíme již důkaz stejně, jako v prvním případě. Zkoumejme tedy koeficient a_i u y^i. Je

$$P(y+k) = c_n(y+k)^n + c_{n-1}(y+k)^{n-1} + \cdots + c_1(y+k) + c_0.$$

Roznásobíme-li nyní závorky podle binomické věty a sloučíme členy se stejnou mocninou u y, dostaneme $P(y+k) = a_n y^n + \dots + a_1 y + a_0$, kde $a_i = \sum_{j=0}^{n-i} c_{i+j} k^j \binom{i+j}{j}$.

Vidíme, že v každém členu a_i se nám k vyskytuje v nejvyšší mocnině u koeficientu c_n, což je kladné číslo. Pokud tedy zvolíme dostatečně velké k, bude tento člen mnohem větší než ostatní, které dohromady tvoří a_i, a tedy a_i bude kladné číslo pro všechna $0 \leq i \leq n$. Dostaneme tedy polynom s kladnými koeficienty a na ten už můžeme použít původní postup.

Poznámka. Jiný způsob, jak lze najít vhodné číslo k je následující. Není těžké dokázat (např. pomocí Viètových vztahů), že má-li každý (komplexní) kořen polynomu Q s reálnými koeficienty zápornou reálnou část, pak již má polynom Q nutně všechny koeficienty kladné. V našem případě tedy stačí volit $k \in \mathbb{N}$ větší, než je maximum z reálných částí polynomu P. Polynom $P(y+k)$ pak bude mít požadovanou vlastnost.

Poznámky opravovatele: Prišlo iba 7 riešení, z ktorých boli 3 správne. Vo zvyšných 4 pozabudli, že podla zadania majú uvažovať celočíselné polynómy a uvažovali iba prirodzené koeficienty, pre ktoré je úloha triviálna. Myšlienka správnych riešení bola posunúť premennú polynómu tak, aby jeho koeficienty boli kladné. Toť vsjo.

7. úloha

Najděte největší konstantu $k \in \mathbb{R}$ takovou, že k libovolnému polynomu $P(x)$ s komplexními koeficienty najdeme $z \in \mathbb{C}$, $|z| \leq 1$, že $|P(z) - \overline{z}| \geq k$.

Ukážeme si zde dvě poněkud odlišná řešení, jedno autorské s geometrickou myšlenkou a jedno „počítací“, na jehož myšlenku přišel (jediný úspěšný) řešitel této úlohy.

První řešení: Uvažujme nejprve polynom $P(x) = 0$. Jelikož pro každé z z jednotkového kruhu platí $|P(z) - \overline{z}| = |-\overline{z}| \leq 1$, dostáváme $k \leq 1$.

Ukážeme, že $k = 1$. Stačí ukázat, že pro každý polynom P existuje $z \in \mathbb{C}$, $|z| \leq 1$, tak, že $P(z) - \overline{z} \geq 1$ (my dokonce vždy najdeme z z jednotkové kružnice). Pro spor předpokládejme, že máme takový P, pro který ono z neexistuje. Pak P určitě nemá žádný kořen z_0 z jednotkové kružnice (kdyby tomu tak bylo, pak by $|P(z_0) - \overline{z}_0| = |-\overline{z}_0| = 1$, což nelze). Položme $z = e^{i\varphi}$, pak $\overline{z} = e^{-i\varphi}$, a protože pro všechna φ probíhající interval $\langle 0, 2\pi \rangle$ je $|P(e^{i\varphi}) - e^{-i\varphi}| < 1$, musí $P(e^{i\varphi})$ oběhnout nulu ve směru hodinových ručiček (nakreslete si obrázek). To tedy znamená, že funkce $f_P : \varphi \mapsto \arg P(e^{i\varphi})$ klesne na intervalu $\langle 0, 2\pi \rangle$ o 2π. Nyní ukážeme indukcí podle stupně n polynomu P, že žádný polynom P s kořeny mimo jednotkovou kružnici s takovou vlastností funkce f_P neexistuje. Ukážeme, že přírůstek funkce f_P je vždy nezáporný.

Je-li P nenulový konstantní polynom, pak $P(e^{i\varphi})$, $\varphi \in \langle 0, 2\pi \rangle$ je konstantní, argument se tedy nemění. V případě polynomu $P(x) = c(x - x_0)$ výraz $P(e^{i\varphi})$ probíhá kružnici se středem v bodě x_0 a poloměrem 1 proti směru hodinových ručiček. Tato kružnice oběhne 0 (v kladném smyslu) právě tehdy, když $|x_0| < 1$. Každopádně f_P se buď nezmění, nebo stoupne o 2π. Přírůstek f_P je tedy nezáporný.

Nechť tedy pro polynomy stupně k tvrzení platí, uvažujme polynom stupně $k+1$. Označme si jej $Q(x)$, vezměme si jeden jeho kořen a dostáváme $Q(x) = (x - x_0)P(x)$, kde P je polynom stupně k. Jelikož argument součinu je totéž, co součet argumentů, je jasné, že $f_Q = f_P + f_{x-x_0}$. Přírůstek f_Q je tedy součtem přírůstků f_P a f_{x-x_0}.

Přírůstek f_P je nezáporný díky indukčnímu předpokladu, přírůstek f_{x-x_0} je buď 0 (pro $|x_0| \geq 1$) nebo 2π (pro $|x_0| < 1$), jak jsme si uvědomili v prvním indukčním kroku. Celkový přírůstek f_Q je tedy také nezáporný a tím je důkaz hotov.

Poznámka: Vlastně jsme dokázali, že počet kořenů $P(z)$ uvnitř jednotkového kruhu je roven počtu oběhů křivky $P(e^{i\varphi})$, $\varphi \in \langle 0, 2\pi \rangle$, kolem nuly proti směru hodinových ručiček.

Druhé řešení (upraveno podle *Martina Tancera*): Stejně jako v prvním řešení si uvědomíme, že $k \leq 1$, a budeme ukazovat, že $k = 1$. Nechť P je libovolný polynom, ukážeme, že existuje $z \in \mathbb{C}$, $|z| = 1$ takové, že $|P(z) - \overline{z}| \geq 1$. Definujme si $\varphi(t) = e^{it}$, $t \in \langle 0, 2\pi \rangle$ a pro funkci f spojitou na jednotkové kružnici označme (pro pohodlnost zápisu) $\int\limits_{\circ} f := \int\limits_{t=0}^{2\pi} f(\varphi(t))\,\mathrm{d}t$. Odhadneme pro $|z| = 1$ číslo $|P(z) - \overline{z}|^2$:

$$|P(z) - \overline{z}|^2 = (P(z) - \overline{z})(\overline{P(z)} - z) = |P(z)|^2 + |z|^2 - zP(z) - \overline{z}\overline{P(z)} \geq 1 - zP(z) - \overline{zP(z)}.$$

Nyní si stačí uvědomit, že pro $m \geq 1$ je[5]

$$\int\limits_{\circ} z^m = \int\limits_{t=0}^{2\pi} e^{imt}\,\mathrm{d}t = \Big[\frac{1}{im} e^{imt}\Big]_{t=0}^{2\pi} = \frac{1}{im} - \frac{1}{im} = 0,$$

a jelikož výraz $zP(z)$ je jen součtem takových mocnin vynásobených konstantou a $\overline{zP(z)}$ je jeho komplexně sdruženou hodnotou, dostáváme

$$\int\limits_{\circ} zP(z) = \int\limits_{\circ} \overline{zP(z)} = 0.$$

Nyní již stačí psát

$$\int\limits_{\circ} |P(z) - \overline{z}|^2 \geq \int\limits_{\circ} 1 - zP(z) - \overline{zP(z)} = \int\limits_{\circ} 1 = 2\pi.$$

Dostali jsme, že integrál funkce $|P(e^{it}) - \overline{e^{it}}|^2$ přes interval délky 2π je větší nebo roven 2π, musí tedy existovat bod $t_0 \in \langle 0, 2\pi \rangle$, pro který je tato funkce větší nebo rovna 1. Označíme-li si $z = e^{it_0}$, dostáváme $|P(z) - \overline{z}|^2 \geq 1$, takže jsme našli správné z. Tím je důkaz hotov.

Poznámky opravovatele:

8. úloha

Buď $P(x)$ polynom s komplexními koeficienty stupně n takový, že $|P(x)| < 1$ pro každé komplexní číslo $|x| < 1$. Dokažte, že $|P(2)| < 4^n$.

[5] Pozor, pro $m = 0$ to skutečně neplatí!

Jádro řešení spočívá v tom, že hodnotu $P(2)$ vyjádříme pomocí hodnot P v $n+1$ bodech uvnitř kruhu $|x| < 1$. Jak známo, polynom nejvýše n-tého stupně je jednoznačně určen hodnotami v $n+1$ různých bodech. Důvod je zřejmý, rozdíl dvou libovolných polynomů s uvažovanou vlastností nabývá nulové hodnoty v $n+1$ různých bodech, a je to tedy nutně identická nula (kdyby ne, byl by to polynom stupně nejvýše n a ten má nejvýše n kořenů).

Konstrukci provedeme následovně. Uvažme $x_0, \dots, x_n$ po dvou různá čísla a označme

$$Q_k(x) = \prod_{\substack{j\in\{0,\dots,n\}\\ j\neq k}} (x - x_j) = (x - x_0)\cdots(x - x_{k-1})(x - x_{k+1})\cdots(x - x_n).$$

Pak platí

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{Q_k(x)}{Q_k(x_k)} P(x_k),$$

neboť polynomy na levé a pravé straně jsou stupně nejvýše n a shodují se v $n+1$ bodech (konkrétně v bodech $x = x_0, x_1, \dots, x_n$.

Volme nyní x_k jako vrcholy pravidelného $(n+1)$-úhelníku vepsaného kružnici o poloměru $r < 1$ se středem v nule, jehož jeden vrchol leží na polopřímce $x \geq 0$ (kladná reálná poloosa).

Tyto body jsou kořeny polynomu $x^{n+1} - r^{n+1}$, a tedy platí

$$x^{n+1} - r^{n+1} = \prod_{j=0}^{n} (x - x_j) = (x - x_k) Q_k(x).$$

Pro $x \neq x_k$ tedy platí $Q_k(x) = (x^{n+1} - r^{n+1})/(x - x_k)$. Prostým roznásobením se ověří

$$x^{n+1} - r^{n+1} = x^{n+1} - x_k^{n+1} = (x - x_k) \sum_{j=0}^{n} x^j x_k^{n-j},$$

a tedy nutně platí

$$Q_k(x) = \sum_{j=0}^{n} x^j x_k^{n-j}$$

(zamyslete se proč, viz též úloha 4). Speciálně $Q_k(x_k) = (n+1)x_k^n$, z čehož dále $|Q_k(x_k)| = (n+1)r^n$.

Nyní již víme dost pro provedení závěrečného odhadu. Postupně dostáváme

$$|P(2)| = \left| \sum_{k=0}^{n} \frac{Q_k(2)}{Q_k(x_k)} P_k(x_k) \right| = \left| \sum_{k=0}^{n} \frac{2^{n+1} - r^{n+1}}{(2 - x_k)(n+1)r^n} P_k(x_k) \right| \leq$$
$$\leq \sum_{k=0}^{n} \frac{2^{n+1} - r^{n+1}}{(n+1)r^n} \cdot \frac{|P_k(x_k)|}{|2 - x_k|} \leq \frac{2^{n+1} - r^{n+1}}{(2 - r)r^n}.$$

První nerovnost plyne z tzv. trojúhelníkové nerovnosti pro komplexní čísla

$$\left|\sum_{k=1}^{n} z_k\right| \leq \sum_{k=1}^{n} |z_k| \,.$$

Druhá nerovnost je důsledkem nerovností $|P(x_k)| < 1$ a $|2 - x_k| \geq 2 - r$. Ověření, že pro vhodné $r < 1$ platí

$$\frac{2^{n+1} - r^{n+1}}{(2-r)r^n} < 4^n,$$

je již snadné cvičení.

Navíc si lze všimnout, že odhad 4^n je příliš hrubý, naší metodou dostaneme nejlepší odhad pro $r \to 1$, kdy dostáváme

$$P(2) \leq 2^{n+1} - 1.$$

Poznámky opravovatele: Správně úlohu vyřešil pouze *Martin Tancer*, jehož řešení jsme po drobných úpravách použili jako vzorové. Ostatní pokusy již zdárné nebyly, matematická indukce ani horní odhady pro polynomy k cíli nevedly.