Povídání k sedmé sérii

Tato série se zabývá hrami. Pojem *hra* není pro řešení zadaných úloh potřeba nějak přesně vymezovat, čtenář si vystačí s intuitivní představou. Naše hry mají charakter her pro dva hráče, kteří se pravidelně střídají v tazích, dokud se nedostanou do situace, kdy je již rozhodnuto. *Pozicí* myslíme libovolný stav, do něhož se hra může ve svém průběhu dostat. *Tahem* hráče rozumíme v dané pozici výběr jedné z několika přípustných pozic, ve které bude protihráč ve hře pokračovat. *Strategie* hráče je soubor rozhodnutí, jaké tahy volit v jednotlivých pozicích.[1] *Vyhrávající strategie* je taková, která vede k vítězství hráče bez ohledu na to, jak hraje protihráč (tedy bez ohledu na jeho strategii). Analogicky definujeme *neprohrávající strategii*.[2]

Ještě musíme upozornit na pátý příklad. Autor této úlohy bohužel dodatečně zjistil, že jeho řešení bylo chybné a úloha je mnohem obtížnější, než se původně domníval, a to tolik, že se ji přes veškeré úsilí nepodařilo dosud vyřešit nikomu z řešitelů ani organizátorů. Neděs se proto, pokud ani Ty nebudeš při řešení této úlohy úspěšný.

7. série

Téma: Hry

Termín odeslání: 22. dubna 2002

1. úloha (3 body)

Tři studenti házejí kostkami (na každé kostce padají všechna čísla se stejnou pravděpodobností). Hrají o 60 korun, peníze vyhraje ten, kdo první získá 5 bodů, bod získává v každém kole ten, komu padne nejvyšší číslo. V jednu chvíli museli přerušit hru za stavu 3 ku 2 ku 1. Jak si mají spravedlivě rozdělit bank?

2. úloha (3 body)

Jistý podnikatel dluží svému zaměstnanci prémie 2000 korun. Navrhl následující hru. Dá na stůl 10000 korun a v každém kole vezme 1000 korun, které rozdělí na dvě hromádky po 700 a 300 korunách. Pak si se zaměstnancem o ně zahrají. Každý, nezávisle na volbě druhého, ukáže na jednu hromádku. Pokud ukáží na stejnou, pak podnikatel získává 1000 korun. Pokud však ukáží na různé, pak zaměstnanec získá ty peníze, na něž ukázal (a stejně tak podnikatel). Vyplatí se hrát o prémie (v průměrném případě)?

3. úloha (3 body)

Dva organizátoři Prasátka vyhráli čokoládu s 5×16 dílky. Jelikož se o ni nechtěli dělit, rozhodli se, že si o ni zahrají. Střídají se v tazích, v každém tahu vezme hráč jeden kousek

[1] Přesněji lze definovat strategii jako funkci, která každé možné pozici přiřadí tah hráče.

[2] Tyto dva pojmy se mohou lišit ve hrách, kde je přípustná remíza.

čokolády a zlomí jej dle naznačené čáry. Čokoládu prohraje ten, kdo první vytvoří dílek o rozměrech 1×1. Kdo získá čokoládu?

4. ÚLOHA (5 BODŮ)

První hráč vyrobí tři kostky a napíše na ně přirozená čísla od jedné do šesti. Nikdo ovšem netvrdí, že se na kostkách nemohou některá čísla opakovat. Druhý hráč si vybere jednu kostku a pak také první hráč si zvolí jednu ze zbylých dvou kostek. Potom jdou oba společně navštívit restauraci a útratu bude platit vždy ten, komu padne menší číslo. Pro kterého hráče je tato hra výhodná?

5. ÚLOHA (5 BODŮ)

Pro účely tohoto příkladu si zavedeme n-dimenzionální krychli. Body v n-dimenzionálním prostoru reprezentujeme posloupnostmi reálných čísel délky n. Vrcholy krychle jsou body, jejichž všechny souřadnice jsou rovny 1 či -1. Hranou nazveme každou úsečku, jejíž krajní body jsou vrcholy krychle, které se liší v právě jedné souřadnici.
Dva hráči umístili své figurky do vrcholů n-dimenzionální krychle naproti sobě (tj. do bodů s opačnými souřadnicemi). V každém tahu hráč, jenž je na tahu, přesune svou figurku po hraně krychle a současně z krychle odebere vrchol, na němž stál, a všechny hrany z něj vycházející. První hráč, který začíná, je pronásledován druhým hráčem. První hráč tedy vyhrává jen v případě, že se kostka během hry rozpadne na více částí, přičemž každý skončí v jiné. Určete, kdo má vyhrávající strategii.

6. ÚLOHA (5 BODŮ)

Dva hráči sedí za šachovnicí $2n \times 2n$, která je rozdělena na střídavě černá a bílá pole tak, že první hráč má v levém dolním rohu políčko černé barvy. Dále je na začátku hry na šachovnici (z pohledu prvního hráče) na políčkách černé barvy v první řadě n černých kamenů (vlků) a v poslední řadě uprostřed šachovnice na černém políčku bílý kámen (ovečka). Vlci chodí po diagonálách o jedno políčko dopředu, ovečka taktéž po diagonálách o jedno políčko, ale může jít dopředu i zpět. Hráči se pravidelně střídají v tazích a první hráč – vůdce vlků – vyhraje, pokud se mu podaří znemožnit ovečce další tah (tj. pokud ovečku zablokuje). Ovečka vyhrává v opačném případě.[3] Dokažte, že pro libovolné n má jeden hráč vyhrávající strategii.

7. ÚLOHA (5 BODŮ)

V rovině je na začátku hry nakresleno n křížků (křížkem rozumíme bod, z něhož vedou čtyři „výběžky“). Hráči se střídají v tazích a každý, kdo je na tahu, přikreslí oblouk mezi křížky (tj. spojí dva výběžky – je rovněž povolené spojit obloukem dva výběžky téhož křížku) tak, aby se oblouky navzájem neprotínaly, a tento oblouk uprostřed přeškrtne krátkou čárkou, aby vznikly dva nové výběžky, každý vedoucí na opačnou stranu oblouku. Z každého výběžku je možné vést nejvýše jeden oblouk. Prohrává ten hráč, který nemá tah. Rozhodněte v závislosti na n, který z hráčů má vyhrávající strategii.

---

[3] Je tedy vidět, že prohrává hráč, kterému jako prvnímu dojdou tahy.

8. ÚLOHA (5 BODŮ)

Dino a Luboš hrají následující hru s polynomy. Na začátku hry Luboš zvolí přirozené číslo n, Dino permutaci n-prvkové množiny a vymyslí stejný počet reálných čísel, označme si je $c_1 \leq c_2 \leq \cdots \leq c_n$. Úkolem Luboše je tato čísla odhalit, ale pokusit se může jen jednou. V jednotlivých kolech spočítá Dino koeficienty normovaného polynomu

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x^1 + a_0 = (x-c_1)(x-c_2)\cdots(x-c_n),$$

tyto koeficienty zamíchá zvolenou permutací a takto je všechny kromě posledního poví Lubošovi. Ten se rozhoduje, zda bude určovat počáteční n-tici čísel nebo zda půjde do dalšího kola. Do dalšího kola Dino vždy změní n-tici čísel tak, že místo nejmenšího čísla bude uvažovat nějaké nové číslo tak, aby bylo větší než všechna ostatní. Rozhodněte, kdo má vyhrávající strategii.

Řešení 7. série

1. úloha

Tři studenti házejí kostkami (na každé kostce padají všechna čísla se stejnou pravděpodobností). Hrají o 60 korun, peníze vyhraje ten, kdo první získá 5 bodů, bod získává v každém kole ten, komu padne nejvyšší číslo. V jednu chvíli museli přerušit hru za stavu 3 ku 2 ku 1. Jak si mají spravedlivě rozdělit bank?

Předem bychom se Vám, naši řešitelé, chtěli omluvit, že se mezi zadané příklady vloudila úloha, kterou není možné řešit jinak než rozborem mnoha případů. Následující řešení je upravené dle Vaška Cvička:

Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že v každém kole získá jeden z hráčů s pravděpodobností $\frac{1}{3}$ bod; ta kola, kdy padnou stejná čísla, nemusíme uvažovat.[4]

Označme si studenty po řadě A, B a C. Poměr jejich výher spočítáme pomocí toho, že spočítáme jejich pravděpodobnost, že za dané situace vyhrají, tj. dosáhnou 5 bodů. Představme si tedy, že naši studenti hru z tohoto stavu dohráli. Pozicí dále rozumíme (uspořádanou) trojici bodů, které jednotliví hráči v dohrávce získali. Hráč A zřejmě potřebuje k výhře získat 2 body, hráč B 3 body a hráč C 4 body. Daná pozice (x, y, z) (pokud se jedná o pozici, ve které ještě není rozhodnuto) nastane s pravděpodobností $\frac{(x+y+z)!}{x!y!z!}\left(\frac{1}{3}\right)^{x+y+z}$; první zlomek vyjadřuje, kolika různými způsoby se lze do pozice (x, y, z) dostat (tj. v jakém pořadí hráči své body do této pozice získali) – jde o počet permutací s opakováním. Druhý zlomek je pravděpodobnost, že nastane každá konkrétní posloupnost, ve které získávali hráči své body

[4] Tato úvaha by asi potřebovala pro absolutní preciznost více vysvětlit, ale intuitivně je jasné, že v kole, kdy dojde k remíze, se šance na výhru žádného hráče nezmění.

(za každý tah se násobí koeficientem $\frac{1}{3}$, což je pravděpodobnost, že vyhraje zrovna ten hráč, kterého nám předepisuje konkrétní posloupnost).

Hráč B vyhrává, pokud v dohrávce získá 3 body. Je ale jasné, že do výherní pozice se nemůže dostat libovolným způsobem, musí vyhrát v posledním kole (jinak by už hra skončila dříve). Je tedy jasné, že pravděpodobnost výhry hráče B spočítáme tak, že uvážíme všechny pozice, kdy hra ještě neskončila a kdy hráči B stačí poslední bod k výhře, a pravděpodobnost jejich výskytu vynásobíme $\frac{1}{3}$ (což je pravděpodobnost, že hráč B v následujícím kole vyhraje). Zmíněné pozice v dohrávce jsou po řadě $(0,2,0)$, $(0,2,1)$, $(0,2,2)$, $(0,2,3)$, $(1,2,0)$, $(1,2,1)$, $(1,2,2)$ a $(1,2,3)$, pravděpodobnosti jejich výskytu jsou po řadě $\frac{1}{3^2}$, $\frac{3}{3^3}$, $\frac{6}{3^4}$, $\frac{10}{3^5}$, $\frac{3}{3^3}$, $\frac{12}{3^4}$, $\frac{30}{3^5}$ a $\frac{60}{3^6}$. Pravděpodobnost výhry hráče B je tedy třetina součtu těchto čísel, tj. $\frac{195}{729}$.

Analogicky pro hráče C uvažujeme pozice $(0,0,3)$, $(0,1,3)$, $(0,2,3)$, $(1,0,3)$, $(1,1,3)$, $(1,2,3)$, které nastanou po řadě s pravděpodobnostmi $\frac{1}{3^3}$, $\frac{4}{3^4}$, $\frac{10}{3^5}$, $\frac{4}{3^4}$, $\frac{20}{3^5}$ a $\frac{60}{3^6}$. Celkově tedy hráč C vyhraje s pravděpodobností $\frac{83}{729}$.

Pravděpodobnost výhry hráče A můžeme spočítat analogicky, nebo jako pravděpodobnost doplňkového jevu, vyjde $\frac{451}{729}$. Celkově je tedy spravedlivé rozdělit si bank v poměru 451 ku 195 ku 83, proto hráč A získá přibližně 37,12 Kč, hráč B 16,05 Kč a hráč C 6,83 Kč.

Poznámky opravovatele: Mnoho řešitelů se nechalo zlákat jednoduchou úvahou: peníze se rozdělí rovnoměrně podle toho, kolik kdo získal bodů. To je ovšem zcela scestné! Důležité je přece jenom to, kolik bodů potřebují hráči získat do konce hry. Pokud by bylo skóre při přerušení 13 : 12 : 11 a hrálo se do patnácti, šance na výhru jsou přece stejné, jako v naší hře.

Další častý nápad byl také poměrně jednoduchý a chybný: rozdělí se tedy podle bodů, které jim zbývá získat. To sice zohledňuje jedinou relevantní informaci, ale nespravedlivě. Tak by např. fiktivní hráč s jedním chybějícím bodem získal dvojnásobek toho, co hráč se dvěma chybějícími. Ale on je přece v daleko lepší situaci: v jednom ze tří případů vyhraje hned v následujícím kole, kdežto druhý s pravděpodobností $\frac{1}{3}$ získá v dalším kole bod, se stejnou pak možná v dalším kole ...

Řešení hledající pravděpodobnost výhry pro jednotlivé hráče byla většinou správná.

2. úloha

Jistý podnikatel dluží svému zaměstnanci prémie 2000 korun. Navrhl následující hru. Dá na stůl 10000 korun a v každém kole vezme 1000 korun, které rozdělí na dvě hromádky po 700 a 300 korunách. Pak si se zaměstnancem o ně zahrají. Každý, nezávisle na volbě druhého, ukáže na jednu hromádku. Pokud ukáží na stejnou, pak podnikatel získává 1000 korun. Pokud však ukáží na různé, pak zaměstnanec získá ty peníze, na něž ukázal (a stejně tak podnikatel). Vyplatí se hrát o prémie (v průměrném případě)?

Pokud hraje zaměstnanec s podnikatelem hru dlouho, mohou oba svoje strategie ovlivňovat pouze tím, že se v každém tahu budou s jistou pravděpodobností rozhodovat, na kterou z hromádek ukáží.[5]

[5] Volba v každém tahu by ale neměla být ovlivněna předchozími tahy, ideální model by byl, že by si v každém tahu oba hodili kostkou a podle výsledku se rozhodli.

Nechť podnikatel ukazuje na první hromádku se 700Kč s pravděpodobností p a na druhou hromádku s 300Kč s pravděpodobností $1-p$. Analogicky, nechť zaměstnanec ukazuje na první hromádku s pravděpodobností q a na druhou hromádku s pravděpodobností $1-q$. Jelikož volby obou hráčů jsou nezávislé, bude pravděpodobnost, že oba ukáží na první hromádku, rovna $p \cdot q$, analogicky pro ostatní varianty. Průměrný zisk zaměstnance za jedno kolo tedy činí $Z(p,q) = 0 \cdot p \cdot q + 700 \cdot (1-p) \cdot q + 300 \cdot p \cdot (1-q) + 0 \cdot (1-p) \cdot (1-q) = 700q + 300p - 1000pq$. Zvolí-li si zaměstnanec svoji strategii hodnotou $q = \frac{3}{10}$, bude mít průměrný zisk $Z(p,q) = 210$ bez ohledu na strategii (tj. volbu hodnoty p) zaměstnavatele. Zisk zaměstnance za deset kol tedy bude průměrně 2100 Kč, takže se o prémie hrát vyplatí.

Je také vidět, že podnikatel může zajistit, aby zisk zaměstnance nemohl být vyšší. Stačí, když si zvolí $p = \frac{7}{10}$, vyjde znovu $Z(p,q) = 210$ bez ohledu na strategii zaměstnance. Strategie určené hodnotami $p = \frac{7}{10}$ a $q = \frac{3}{10}$ jsou tedy v jistém smyslu optimální.

Poznámky opravovatele: Nejvíce řešitelů řešilo úlohu tak, že uvažovali čtyři možnosti, které v jednotlivých kolech mohou nastat, a všem možnostem přisoudili stejné pravděpodobnosti. To ale uvažuje pouze jednu možnost, že na jednotlivé hromádky ukazuje každý hráč stejně často, tj. s pravděpodobností $\frac{1}{2}$. Těmto řešitelům jsem slíbil následující odstavec:

Nezdá se vám nepřirozené, že si můžete zvolit libovolnou strategii, na které hromádky budete ukazovat, ale přesto předpokládáte, že budete ukazovat na každou v 50 procentech případů? Co kdyby bylo Vaší strategií ukazovat stále na hromádku s 300 korunami? Pak asi nebudete ukazovat na obě hromádky stejně často. Za podobná řešení jsem body neuděloval.

Řešitelé, kteří se zamýšleli nad četností nebo pravděpodobností volby hromádek, aby dosáhli co nejlepšího zisku, zpravidla obdrželi větší bodový zisk.

Jako perličku uvádím výrok jednoho řešitele: „Stejně bych nehrál, neboť dnešní podnikatel, to musí být liška mazaná.“

3. úloha

Dva organizátoři Prasátka vyhráli čokoládu s 5×16 dílky. Jelikož se o ni nechtěli dělit, rozhodli se, že si o ni zahrají. Střídají se v tazích, v každém tahu vezme hráč jeden kousek čokolády a zlomí jej dle naznačené čáry. Čokoládu prohraje ten, kdo první vytvoří dílek o rozměrech 1×1. Kdo získá čokoládu?

Úloha je celkem jednoduchá, čokoládu vždy získá první hráč. Svým prvním tahem zlomí čokoládu na dva kusy (říkejme jim *levý* a *pravý*) o rozměrech 5×8 dílků. Další strategií prvního pak je opakovat stejné zlomy jako soupeř, a to vždy v opačném kusu čokolády, než hrál soupeř. To je vždy možné, protože po každém tahu prvního hráče jsou kousky spárované do dvojic stejných kousků – jedny vzniklé z levého kusu a jedny vzniklé z pravého kusu. Je tedy jasné, že první hráč nevytvoří dílek o rozměrech 1×1 jako první. Přitom takový dílek časem při hře vzniknout musí, neboť čokoláda má pouze konečně mnoho dílků a každým zlomem se počet kousků zvýší. Obávaný dílek tedy nutně vytvoří druhý hráč a čokoládu prohraje.

Poznámky opravovatele: Řešitelé se dopouštěli především těchto tří chyb:

(i) Při zlomení čokolády si neuvědomili, že vzniknou dvě části a obě zůstávají ve hře.

(*ii*) Mysleli si, že prohrávající hráč bude dělat pouze některé ze všech možných tahů tak, aby vyhrávající hráč nemusel mnoho přemýšlet, např. rozlomí čokoládu na 1×5 a zbytek.

(*iii*) Předpokládali, že oba hráči hrají náhodně, a snažili se spočítat pravděpodobnost výhry. Ale oba hráči se snaží vyhrát, takže nehrají náhodně. V tomto typu her vždy existuje vyhrávající strategie pro jednoho hráče, tj. pokud ji dodržuje, druhý hráč ať dělá, co dělá, nemá šanci vyhrát.

4. úloha
První hráč vyrobí tři kostky a napíše na ně přirozená čísla od jedné do šesti. Nikdo ovšem netvrdí, že se na kostkách nemohou některá čísla opakovat. Druhý hráč si vybere jednu kostku a pak také první hráč si zvolí jednu ze zbylých dvou kostek. Potom jdou oba společně navštívit restauraci a útratu bude platit vždy ten, komu padne menší číslo. Pro kterého hráče je tato hra výhodná?

Máme-li kostky X a Y, symbolem $X > Y$ budeme značit, že kostka X ve vzájemných soubojích s kostkou Y má výhodu (tj. vyhrává častěji než Y). Přirozená první úvaha by byla taková, že ať vyrobí první jakékoliv kostky, druhý si vybere tu „nejlepší“ z nich a bude vyhrávat. Prvnímu tedy nezbyde než vyrobit např. všechny kostky stejné, aby uhrál (v průměru) alespoň remízu.

Tato úvaha je však chybná. Háček tkví v tom, že máme-li kostky X, Y a Z, pak z platnosti $X > Y$ a $Y > Z$ ještě neplyne $X > Z$[6]. Uvažme následující tři kostky: $X = (1, 4, 4, 4, 4, 4)$, $Y = (2, 2, 2, 5, 5, 5)$ a $Z = (3, 3, 3, 3, 3, 6)$. Uvažujme vzájemné souboje kostek X a Y. Pokud na kostce Y padne pětka, pak vyhrává vždy. To nastane v polovině případů. V opačném případě je ještě $1/6$ šance, že na kostce X padne jednička. Je tedy vidět, že $Y > X$. Analogické úvahy ověří nerovnosti $Z > Y$ a $X > Z$.

Z toho plyne, že ať si druhý hráč vybere jakoukoliv kostku, první hráč si může vybrat kostku lepší. Hra je tedy výhodná pro prvního hráče.

Poznámky opravovatele: Asi jedinou častou chybou bylo předpokládání některých „zřejmých“ tvrzení. Nejhojnějšími byly předpoklady, že pokud kostka A „porazí“ kostku B a kostka B kostku C, pak kostka A nutně „porazí“ kostku C, a také že kostka s vyšším součtem „porazí“ kostku s nižším součtem. Ani jedno z těchto tvrzení však neplatí, oba protipříklady najdete ve vzorovém řešení.

5. úloha
Pro účely tohoto příkladu si zavedeme n-dimenzionální krychli. Body v n-dimenzionálním prostoru reprezentujeme posloupnostmi reálných čísel délky n. Vrcholy krychle jsou body, jejichž všechny souřadnice jsou rovny 1 či -1. Hranou nazveme každou úsečku, jejíž krajní body jsou vrcholy krychle, které se liší v právě jedné souřadnici.

Dva hráči umístili své figurky do vrcholů n-dimenzionální krychle naproti sobě (tj. do bodů s opačnými souřadnicemi). V každém tahu hráč, jenž je na tahu, přesune svou figurku

[6] Podobnou vlastnost má hra „Kámen, nůžky, papír“.

po hraně krychle a současně z krychle odebere vrchol, na němž stál, a všechny hrany z něj vycházející. První hráč, který začíná, je pronásledován druhým hráčem. První hráč tedy vyhrává jen v případě, že se kostka během hry rozpadne na více částí, přičemž každý skončí v jiné. Určete, kdo má vyhrávající strategii.

Tuto úlohu se řešitelům ani organizátorům doposud nepodařilo vyřešit.
Poznámka. Pokud by úloha byla zadána tak, že začíná druhý hráč, není těžké nahlédnout, že pro $n > 1$ by zvítězil první hráč (v případě jednorozměrné krychle – úsečky by jistě zvítězil druhý hráč prvním tahem). Na počátku stojí hráči proti sobě a ať by se druhý pohnul kamkoliv, první by se přemístil tak, aby byl zase naproti. Tj. po každém tahu druhého hráče provede tah středově symetrický podle počátku. To může v každém tahu provést, neboť při této strategii prvního hráče je po každém jeho tahu pozice středově symetrická. Hráči jsou tedy v průběhu celé hry naproti sobě a hra skončí po konečném počtu tahů (krychle má konečný počet vrcholů, které každým tahem ubývají) ve chvíli, kdy již nebudou mít hráči pčípustný tah, tj. ve chvíli, kdy z vrcholů, kde sídlí nevede žádná zbylá hrana. Hráči tedy zůstanou v různých jednobodových komponentách zbytku krychle, takže druhý hráč prvního nedohoní.

Zdá se však, že úloha tak, jak byla zadána, je mnohem složitější, nejlepší výsledek, kterého bylo dosaženo, je, že pro $n < 6$ vyhrává druhý hráč. Pokud bys úlohu vyřešil, určitě nám ji pošli, sladká odměna Tě nemine.

6. úloha
Dva hráči sedí za šachovnicí $2n \times 2n$, která je rozdělena na střídavě černá a bílá pole tak, že první hráč má v levém dolním rohu políčko černé barvy. Dále je na začátku hry na šachovnici (z pohledu prvního hráče) na políčkách černé barvy v první řadě n černých kamenů (vlků) a v poslední řadě uprostřed šachovnice na černém políčku bílý kámen (ovečka). Vlci chodí po diagonálách o jedno políčko dopředu, ovečka taktéž po diagonálách o jedno políčko, ale může jít dopředu i zpět. Hráči se pravidelně střídají v tazích a první hráč – vůdce vlků – vyhraje, pokud se mu podaří znemožnit ovečce další tah (tj. pokud ovečku zablokuje). Ovečka vyhrává v opačném případě.[7] Dokažte, že pro libovolné n má jeden hráč vyhrávající strategii.

Pozicí hry budeme rozumět uspořádanou $(n+2)$-tici udávající souřadnice vlků, souřadnici ovečky (souřadnice např. šachové či jakékoliv jiné, pevně zvolené) a barvu hráče, který je na tahu. Řekneme, že pozice Q *bezprostředně následuje* po pozici P, pokud lze přejít z pozice P do pozice Q jedním tahem.

Povšimněme si, že hra skončí nejvýše po $4n^2$ tazích (to je jistě číslo alespoň tak velké jako počet tahů nutných k přesunu vlků na poslední řadu). Přitom nemůže nastat remíza, neboť hra skončí buďto útěkem ovečky (vlci nemohou táhnout), anebo zablokováním ovečky (ovečka nemůže táhnout).

Každé pozici přiřadíme barvu hráče, který má z této pozice vyhrávající strategii. Je jasné, že vyhrávající strategii ve hře má ten hráč, jehož barva je přiřazena počáteční pozici. Potřebujeme dokázat, že výchozí pozici lze přiřadit nějakou barvu.

[7] Je tedy vidět, že prohrává hráč, kterému jako prvnímu dojdou tahy.

Každé pozici, která je již rozhodlá a jeden hráč zvítězil (ten druhý je na tahu a nemůže hrát) přiřadíme barvu vítěze. Dále postupujme podle následujícího algoritmu. Na začátku buď $k = 4n^2$.

(1) Je-li P pozice, která může nastat po k tazích a dosud nemá přisouzenu barvu, přisuď pozici P barvu hráče na tahu, pokud alespoň jedné bezprostředně následující pozici je přisouzena jeho barva; v opačném případě přisuď pozici barvu opačnou.[8]

(2) Je-li $k = 0$, skonči, jinak sniž k o jedna a opakuj první krok.

Protože je pozic konečně mnoho, algoritmus jistě skončí a obarví i počáteční pozici (která nastane po 0 krocích).

Poznámka. Rozmysli si, na jak obrovskou skupinu her lze aplikovat tento postup. Též si povšimni, že kdyby byly možné remízy, pak bychom analogickým způsobem dokázali, že alespoň jeden hráč má neprohrávající strategii.

Poznámky opravovatele: Někteří řešitelé dokazovali úlohu podobně jako autor vzorového řešení, ale většina ostatních založila důkaz na tom, že ovečka nemůže utéct. Strategií vlků bylo udržovat neprostupnou linii a tuto linii posouvat kupředu. Za takovéto řešení i s důkazem, že ovečka nemůže linii roztrhnout, jsem dával plný počet bodů, těm, kterým něco chybělo, jsem strhl 2 body.

7. úloha

V rovině je na začátku hry nakresleno n křížků (křížkem rozumíme bod, z něhož vedou čtyři „výběžky“). Hráči se střídají v tazích a každý, kdo je na tahu, přikreslí oblouk mezi křížky (tj. spojí dva výběžky – je rovněž povolené spojit obloukem dva výběžky téhož křížku) tak, aby se oblouky navzájem neprotínaly, a tento oblouk uprostřed přeškrtne krátkou čárkou, aby vznikly dva nové výběžky, každý vedoucí na opačnou stranu oblouku. Z každého výběžku je možné vést nejvýše jeden oblouk. Prohrává ten hráč, který nemá tah. Rozhodněte v závislosti na n, který z hráčů má vyhrávající strategii.

Než začneme úlohu řešit, zavedeme si dva pojmy. Představme si, že po několika tazích máme mezi křížky nakresleno několik oblouků. Rozstříháme-li rovinu podél těchto oblouků, rozpadne se nám na několik částí. Každou z těchto částí nazveme štěnou.

Po každém tahu máme křížky rozděleny do několika skupin, v rámci každé skupiny lze dojít z jednoho křížku do druhého po obloucích; mezi křížky z dvou různých skupin dojít po obloucích nelze. Každou takovou skupinu nazveme komponentou. Počet stěn a komponent se nám v průběhu hry zřejmě mění.

Na začátku hry máme zřejmě jedinou stěnu a n komponent (každý křížek tvoří jednu komponentu). Rozmysleme si, co se stane s počtem stěn a komponent, provedeme-li jeden tah. Jsou možné dvě situace:

---

[8] Význam tohoto kroku je jasný. Pokud hráč na tahu má možnost alespoň jedním přípustným tahem přejít do pozice, která je z jeho pohledu vyhraná, pak i pozice ve které se nachází je vyhraná. Pokud každým přípustným tahem přechází do prohrané pozice, pak je i výchozí pozice prohraná.

(1) Spojíme obloukem výběžky v téže komponentě. Pak nám zřejmě nový oblouk rozdělí jednu stěnu na dvě, takže se zvýší počet stěn o 1. Počet komponent zůstane stejný.

(2) Spojíme obloukem výběžky různých komponent. Pak se počet stěn zřejmě nezmění, ale dvě komponenty se obloukem spojí v jednu a jejich počet tedy poklesne o 1.

Celkově tedy vidíme, že číslo $s - k$, kde s je počet stěn a k počet komponent v každém tahu vzroste o 1. Nyní si uvědomíme, že v každé chvíli naší hry vede dovnitř každé stěny alespoň jeden výběžek. Skutečně, na začátku hry to platilo (měli jsme jednu stěnu, do které vedlo dokonce $4n$ výběžků – z každého křížku 4). Při nakreslení každého oblouku, který rozdělil nějakou stěnu na dvě jsme zároveň oblouk uprostřed přeškrtli, takže dovnitř obou nových stěn vede alespoň jeden nový výběžek. Dále si uvědomíme, že počet výběžků je po každém tahu roven $4n$. Bylo tomu tak na začátku hry a každým tahem zmizí dva výběžky, které spojíme obloukem; místo nich se ovšem objeví dva nové, které přikreslíme přeškrtnutím oblouku uprostřed. Je tedy vidět, že po celou dobu hry platí nerovnost $s \leq 4n$ (ve chvíli, kdy počet stěn vzroste na $4n$, vede do každé z nich právě jeden výběžek, takže již žádné dva výběžky nelze spojit obloukem bez křížení). Dále je zřejmé, že počet komponent nemůže klesnout pod 1. Po celou dobu hry tedy platí nerovnost $s - k \leq 4n - 1$. Na začátku hry platí $s - k = 1 - n$ a každým tahem, jak jsme si již uvědomili, tento parametr vzroste přesně o jedničku. Je tedy jasné, že hra nemůže mít více než $5n - 2$ tahů.

Ukážeme ještě, že po méně než $5n - 2$ tazích, bez ohledu na to, jak hráči doposud hráli, vždy existuje přípustný tah, kterým lze pokračovat. Je zřejmé, že po méně než $5n - 2$ tazích musí platit alespoň jedna z následujících nerovností (protože $s - k < 4n - 1$):

(1) $s < 4n$. Počet stěn je tedy menší než počet všech výběžků. To znamená, že dovnitř alespoň jedné stěny vedou alespoň dva výběžky. Ty lze spojit obloukem.

(2) $k > 1$. Existují alespoň dvě komponenty křížků nespojené obloukem. Stačí si rozmyslet, že pak existují dvě komponenty, které hraničí se společnou stěnou. Z obou komponent musí dovnitř této stěny vést výběžek – vždy, když jsme kreslili oblouk hraničící s touto stěnou, jsme ho uprostřed přeškrtli. Tyto dva výběžky z různých komponent lze tedy spojit obloukem.

Celkem jsme tedy vypozorovali zajímavé zjištění. Hra skončí po *přesně* $5n - 2$ tazích, a to bez ohledu na to, jaké tahy hráči provádějí. Takže pro lichá n vyhrává první hráč, pro sudá n druhý hráč (jejich případné strategie nemají na výsledek vliv).

Poznámky opravovatele:

8. úloha

Dino a Luboš hrají následující hru s polynomy. Na začátku hry Luboš zvolí přirozené číslo n, Dino permutaci n-prvkové množiny a vymyslí stejný počet reálných čísel, označme si je $c_1 \leq c_2 \leq \cdots \leq c_n$. Úkolem Luboše je tato čísla odhalit, ale pokusit se může jen jednou. V jednotlivých kolech spočítá Dino koeficienty normovaného polynomu

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x^1 + a_0 = (x - c_1)(x - c_2) \cdots (x - c_n),$$

tyto koeficienty zamíchá zvolenou permutací a takto je všechny kromě posledního poví Lubošovi. Ten se rozhoduje, zda bude určovat počáteční n-tici čísel nebo zda půjde do dalšího kola.

Do dalšího kola Dino vždy změní n-tici čísel tak, že místo nejmenšího čísla bude uvažovat nějaké nové číslo tak, aby bylo větší než všechna ostatní. Rozhodněte, kdo má vyhrávající strategii.

Strategie, podle které Dino vyhraje, je překvapivě jednoduchá. Ať si zvolí Luboš jakékoliv přirozené číslo n, zvolí si Dino čísla $c_1 = p < 0$ a $c_2 = c_3 = \cdots = c_n = 0$. Poté bude mít příslušný normovaný polynom tvar

$$p(x) = x^n - px^{n-1}.$$

Dino si zvolí takovou permutaci, aby Lubošovi řekl všechny koeficienty kromě koeficientu $a_{n-1} = -p$. Luboš se tedy v prvním kole dozví koeficienty $a_{n-2} = a_{n-3} = \cdots = a_0 = 0$, tedy bude vědět, že polynom má $(n-1)$-násobný kořen 0. Hodnotu posledního kořene však znát nebude, a proto musí pokračovat do dalšího kola. V něm Dino změní hodnotu $c_1 = p$ za nějaké kladné číslo. Všimněme si, že další průběh hry již vůbec *nezávisí* na hodnotě $p < 0$. Žádné z koeficientů, které se kdy Luboš dozví, na této hodnotě nijak nezávisí, a tedy Lubošovi se již nikdy tuto hodnotu určit nepodaří. Dino tedy vyhrává.

Poznámka. Rozmyslete si, jak by hra dopadla, kdybychom do zadání přidali podmínku, že všechna čísla $c_1, c_2, \ldots, c_n$ musí být kladná, a když si Luboš zvolí $n = 3$.

Poznámky opravovatele: