Povídání k osmé sérii

Závěrečná série je již tradičně vyvrcholením semináře. Řešitelé se v ní setkávají s příklady, z nichž každý je motivován jednou z předcházejících sérií. Tomu je uzpůsoben i systém bodování. Každá úloha sestává ze dvou částí. Z nich první je jednodušší, je určena řešitelům, kteří doposud nemají větší zkušenosti s řešením obdobných příkladů, její řešení je občas dobrým návodem pro řešení druhé části. Ta pak obsahuje opravdový oříšek i pro špičkové řešitele. Za část (a) je možno získat až dva body, za část (b) tři.

Pokud máš pocit, že některému pojmu nebo značení v zadání nerozumíš, pravděpodobně se stačí vrátit k příslušné sérii. K řešení úloh vskutku nejsou potřeba žádné speciálnější znalosti.

8. série

Téma:	Finální myš (maš)
Termín odeslání:	13. KVĚTNA 2002

1. ÚLOHA

Uvažujme n přímek v rovině. Tyto přímky nám rozdělí rovinu na několik oblastí. Do každé oblasti napíšeme číslo, které značí počet přímek, které danou oblast ohraničují (tj. mají s hranicí dané oblasti společnou nějakou úsečku nebo polopřímku). Definujme číslo M jako

(a) součet všech čísel, která jsme napsali do oblastí. (2 BODY)

(b) součet druhých mocnin všech čísel, která jsme napsali do oblastí. (3 BODY)

Dokažte, že existuje konstanta $c > 0$ nezávislá na n a na konkrétním rozmístění přímek tak, že vždy platí $M \leq cn^2$.

2. ÚLOHA

Pro účely tohoto příkladu si nejdříve zavedeme několik definic. *Stromem* budeme rozumět množinu několika *vrcholů* rozdělených do několika *úrovní*. V nulté úrovni se nachází pouze jediný vrchol, tzv. *kořen*. Každý vrchol v, který se nenachází v poslední úrovni, je spojen *hranou* s alespoň jedním vrcholem z následující úrovně. Těmto vrcholům říkáme *potomci* vrcholu v, v se nazývá *předek* těchto vrcholů. Žádné dva vrcholy nemají společné potomky a každý vrchol kromě kořene má právě jednoho předka. Vrcholy v poslední úrovni (tj. ty vrcholy, které nemají žádného potomka) se nazývají *listy* stromu. Strom *typu* k^n je strom o n úrovních[1], jehož každý vrchol kromě listů má právě k potomků (takový strom má zřejmě k^n listů). *Podstromem* stromu T rozumíme každý strom na nějaké podmnožině vrcholů T, který používá pouze hrany nacházející se v T.

[1] Tím vlastně myslíme $n+1$ úrovní `:-)` – kořen se nachází v nulté úrovni a listy v n-té úrovni.

(a) Nechť n a k jsou přirozená čísla. Dokažte, že každý strom typu 4^n, jehož listy jsou obarvené pomocí $3k$ barev, má podstrom typu 2^n, jehož listy jsou obarvené pomocí nejvýše k různých barev. (2 BODY)

(b) Dokažte, že pro každé k existuje n a strom typu 4^n, jehož listy lze obarvit $3k+1$ barvami takovým způsobem, že každý jeho podstrom typu 2^n má listy obarvené alespoň $k+1$ barvami. (3 BODY)

3. ÚLOHA

(a) Dokažte, že pro každé $x \in \mathbb{R}$ platí $|\sin x \cdot \sin 2x| < \frac{\sqrt{3}}{2}$. (2 BODY)

(b) Dokažte, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ a pro každé $x \in \mathbb{R}$ platí

$$|\sin x \cdot \sin 2x \cdot \sin 4x \cdots \sin 2^n x| < \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n.$$

(3 BODY)

4. ÚLOHA

(a) Rozhodněte, zda lze pro každé dva mnohoúhelníky A a B v rovině, které mají stejný obsah, rozřezat A pomocí několika přímek a vzniklé díly přeskládat (pomocí posouvání a otáčení) tak, že vznikne B. (2 BODY)

(b) Rozhodněte, zda lze pro každé dva konvexní mnohostěny A a B v prostoru, které mají stejný objem, rozřezat A pomocí několika rovin a vzniklé díly přeskládat (pomocí posouvání a otáčení) tak, že vznikne B. (3 BODY)

5. ÚLOHA

(a) Zjistěte první nenulovou číslici za desetinnou čárkou čísla $-\sqrt{3^{6^9} + 3^{9^6}}$. (2 BODY)

(b) Zjistěte 7 číslic před a 7 číslic za desetinnou čárkou v čísle $-\sqrt[7]{7^{7000} + 7^{6000}}$. (3 BODY)

6. ÚLOHA

(a) Nechť p je polynom s reálnými koeficienty stupně nejvýše n. Vyjádřete hodnotu $p(n+2)$, znáte-li hodnoty $p(1), p(2), \ldots, p(n+1)$. (2 BODY)

(b) Dokažte, že pro nekonečně mnoho různých přirozených čísel n existuje polynom p stupně n s reálnými koeficienty, jehož hodnoty $p(1), p(2), \ldots, p(n+2)$ jsou po dvou různé mocniny dvojky (s celočíselnými exponenty). (3 BODY)

7. ÚLOHA

Máme n mincí a jedny rovnoramenné váhy.[2] Víme, že mezi mincemi se vyskytuje právě jedna falešná. Všechny pravé mince mají stejnou hmotnost. Zjistěte, pro jaké maximální n umíme falešnou minci najít, máme-li k dispozici k vážení a víme-li, že

[2]Ty fungují tak, že každým vážením pouze porovnají hmotnosti mincí na levé a na pravé misce (možné jsou tedy tři různé výsledky vážení).

(a) falešná mince je nepatrně lehčí než pravá. (2 BODY)
(b) hmotnost falešné mince se nepatrně liší od hmotnosti pravé, nevíme však, zda je falešná mince lehčí či těžší. (3 BODY)

Řešení 8. série

1. úloha
Uvažujme n přímek v rovině. Tyto přímky nám rozdělí rovinu na několik oblastí. Do každé oblasti napíšeme číslo, které značí počet přímek, které danou oblast ohraničují (tj. mají s hranicí dané oblasti společnou nějakou úsečku nebo polopřímku). Definujme číslo M jako
(a) součet všech čísel, která jsme napsali do oblastí. (2 BODY)
(b) součet druhých mocnin všech čísel, která jsme napsali do oblastí. (3 BODY)

Dokažte, že existuje konstanta $c > 0$ nezávislá na n a na konkrétním rozmístění přímek tak, že vždy platí $M \leq cn^2$.

Nejdříve malou poznámku. V obou částech řešení budeme bez újmy na obecnosti předpokládat, že žádné dvě přímky nejsou rovnoběžné. Kdybychom nějaké dvě přímky měli rovnoběžné, malým pootočením jedné z nich zajistíme, že nebudou rovnoběžné a že se celkový součet M nezmenší. Laskavý čtenář si toto snadno rozmyslí.

(a) Část (a) samozřejmě plyne z části (b), kterou dokážeme níže; lze však dokázat i jednodušším postupem, na kterém si osvětlíme základní myšlenky. Uvažujme tedy situaci ze zadání. Součet M si také můžeme představit jinak. Číslo v každé oblasti je rovno počtu úseček (resp. polopřímek), které leží na hranici dané oblasti. Každá úsečka (resp. polopřímka) sousedí se dvěma oblastmi, tedy do celkového součtu přispívá dvakrát. Číslo M je tedy rovno dvojnásobku počtu úseček a polopřímek, které ohraničují oblasti. Na každé přímce leží nejvýše n takových úseček (resp. polopřímek). To je jasné, protože každá přímka je ostatními $n-1$ přímkami rozdělena na nejvýše n částí. Přímek je n, na každé leží nejvýše n hraničních úseček (resp. polopřímek), celkem tedy máme nejvýše n^2 hraničních úseček (resp. polopřímek) a dostáváme $M \leq 2n^2$.

(b) Zde musíme použít trochu jemnější odhady. Představme si oblast, která je ohraničena k přímkami, uvnitř oblasti máme napsáno číslo k^2. Toto číslo si můžeme představit jako počet dvojic úsečka (resp. polopřímka) u – přímka p takových, že u *vidí* p (tzn. u leží na hranici některé oblasti, která sousedí s p). Jelikož každá úsečka (resp. polopřímka) leží na hranici dvou oblastí, je jasné, že každá taková dvojice (u, p) se vyskytne nejvýše v těchto dvou oblastech. Je tedy vidět, že celkový součet M je roven nejvýše dvojnásobku počtu dvojic (u, p), kde u je úsečka (resp. polopřímka), p přímka a u vidí p. Dokážeme následující lemma:

Lemma. Zvolme si pevně přímku p. Pak počet úseček (resp. polopřímek), které vidí p, je nejvýše $9n$.

Důkaz. Na každé z n přímek leží nejvýše dvě polopřímky, dále na přímce p leží nejvýše n úseček. Dále existuje nejvýše $2n$ úseček, jejichž jeden krajní bod leží na p (na každé přímce různé od p nejvýše dvě). Celkem máme tedy nejvýše $3n$ úseček majících s p alespoň jeden společný bod a $2n$ polopřímek; některé z těchto $5n$ vidí p. Dále se tedy zabývejme pouze úsečkami, které nemají s p společný bod a vidí p. Představme si, že p je vodorovná, a zabývejme se pouze úsečkami v horní polorovině (v dolní polorovině bude odhad analogický). Mějme tedy nějakou úsečku AB v horní polorovině, označme si U průsečík přímky AB a p a bez újmy na obecnosti předpokládejme, že bod A je blíže k U. Označme si q přímku, která prochází bodem A, různou od AB. Pak úsečce AB přiřadíme dvojici (q, P), resp. (q, L), pokud bod B leží napravo, resp. nalevo od přímky q. Snadno si rozmyslíme, že dvěma úsečkám nemůže být přiřazena stejná dvojice (nemohly by obě vidět p). Různých dvojic je nejvýše $2n$ (máme nejvýše n různých přímek a dvě možnosti – P a L). Máme tedy nejvýše $2n$ úseček v každé z polorovin, celkem tedy nejvýše $2n + 2n + 5n = 9n$ úseček (resp. polopřímek), které vidí p. Tím je lemma dokázané.

Poznámka. Pozorný čtenář jistě odhalí, že lze výsledek lemmatu snadnou úpravou důkazu zlepšit dokonce na $7n$.

Nyní již úlohu snadno vyřešíme. Pro dané p je počet dvojic (u, p), kde u vidí p, nejvýše $9n$, různých přímek je n, každou dvojici započítáváme maximálně dvakrát, celkový počet dvojic je tedy nejvýše $18n^2$. Stačí proto volit $c = 18$.

Poznámky opravovatele: Část (a) nedělala většině řešitelů problémy. Naopak část (b) nikdo nevyřešil.

2. úloha

Pro účely tohoto příkladu si nejdříve zavedeme několik definic. *Stromem* budeme rozumět množinu několika *vrcholů* rozdělených do několika *úrovní*. V nulté úrovni se nachází pouze jediný vrchol, tzv. *kořen*. Každý vrchol v, který se nenachází v poslední úrovni, je spojen *hranou* s alespoň jedním vrcholem z následující úrovně. Těmto vrcholům říkáme *potomci* vrcholu v, v se nazývá *předek* těchto vrcholů. Žádné dva vrcholy nemají společné potomky a každý vrchol kromě kořene má právě jednoho předka. Vrcholy v poslední úrovni (tj. ty vrcholy, které nemají žádného potomka) se nazývají *listy* stromu. Strom *typu* k^n je strom o n úrovních[3], jehož každý vrchol kromě listů má právě k potomků (takový strom má zřejmě k^n listů). *Podstromem* stromu T rozumíme každý strom na nějaké podmnožině vrcholů T, který používá pouze hrany nacházející se v T.

(a) Nechť n a k jsou přirozená čísla. Dokažte, že každý strom typu 4^n, jehož listy jsou obarvené pomocí $3k$ barev, má podstrom typu 2^n, jehož listy jsou obarvené pomocí nejvýše k různých barev. (2 BODY)

(b) Dokažte, že pro každé k existuje n a strom typu 4^n, jehož listy lze obarvit $3k+1$ barvami takovým způsobem, že každý jeho podstrom typu 2^n má listy obarvené alespoň $k+1$ barvami. (3 BODY)

[3] Tím vlastně myslíme $n + 1$ úrovní :-) – kořen se nachází v nulté úrovni a listy v n-té úrovni.

(a) Nejdříve si uvědomíme, že stačí úlohu dokázat pro $k = 1$. Máme-li úlohu dokázánu pro obarvení stromu třemi barvami a máme-li strom typu 4^n obarvený $3k$ barvami, stačí si těchto $3k$ barev rozdělit do tří skupin po k barvách a každou ze skupin považovat za jednu novou barvu. Podle tvrzení pro $k = 1$ najdeme podstrom typu 2^n, jehož listy jsou obarveny pouze barvami z jedné skupiny, tedy pouze k různými barvami.

Nyní úlohu dokážeme pro $k = 1$ indukcí podle n. Máme-li tedy (pro $n = 1$) strom typu 4^1, jehož listy jsou obarveny třemi různými barvami, pak podle Dirichletova principu musí mezi listy existovat dva, které jsou obarvené stejnou barvou. Takže snadno najdeme podstrom typu 2^1, jehož listy jsou obarvené pouze jednou barvou.

Pro indukční krok předpokládejme, že tvrzení platí pro n a dokazujeme ho pro $n+1$. Mějme tedy strom typu 4^{n+1}. Odmysleme si kořen tohoto stromu a čtyři hrany z něj vycházející. Dostaneme tak čtyři stromy typu 4^n, každý z nich má podle indukčního kroku podstrom typu 2^n, který má jednobarevné listy. Jelikož máme čtyři stromy a pouze tři barvy, podle Dirichletova principu dva z těchto podstromů musí mít listy obarvené stejnou barvou, a tedy snadno najdeme podstrom typu 2^{n+1} celého stromu, který má listy obarvené pouze jednou barvou. Tím je důkaz hotov.

(b) Budeme-li mít strom typu 4^n, jeho podstromem budeme automaticky rozumět podstrom typu 2^n. Tvrzení budeme dokazovat indukcí podle k. Postupně najdeme pro všechna k vhodné protipříklady.

Pro $k = 1$ hledáme strom typu 4^n, jehož listy jsou obarvené čtyřmi barvami a jehož každý podstrom má listy obarvené alespoň dvěma barvami. Stačí volit $n = 1$, budeme mít strom s jedním kořenem a čtyřmi listy, nyní stačí obarvit všechny listy vzájemně různými barvami (označme je 1, 2, 3 a 4). Je zřejmé, že každý podstrom má listy obarvené alespoň dvěma barvami. Tím je první indukční krok dokázán.

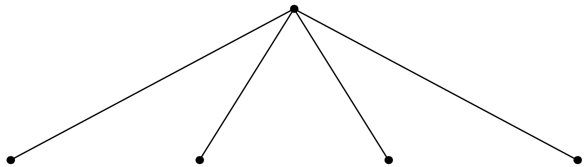
Nyní předpokládejme, že tvrzení platí pro k a dokazujme ho pro $k+1$. Máme tedy strom T^k typu 4^n pro nějaké n, který má listy obarevené $3k+1$ barvami a každý jeho podstrom má listy obarvené alespoň $k + 1$ různými barvami. Hledáme strom T^{k+1} s analogickými vlastnostmi. Symbolem T^l_M, kde l je přirozené číslo a $M \subseteq \{1, 2, \ldots, 3l + 1\}$ budeme rozumět[4] nějaký strom typu 4^m (pro nějaké m), jehož listy jsou obarvené barvami z množiny $\{1, 2, \ldots, 3l+1\}$ a který má následující vlastnost: každý jeho podstrom má listy obarvené alespoň l různými barvami a navíc každý jeho podstrom, který má listy obarvené přesně l různými barvami, má listy obarvené pouze barvami z množiny M. Všimeme si, že můžeme volit

$$T^{k+1}_{\{1,2,\ \ldots,3k,3k+1\}} = T^k.$$

Skutečně, strom T^k má listy obarvené pouze barvami z množiny $\{1, 2, \ldots, 3k, 3k + 1\}$. Tím spíše každý jeho podstrom, jehož listy jsou obarveny přesně $k + 1$ různými barvami, má tuto vlastnost. Navíc z indukčního předpokladu neexistuje podstrom tohoto stromu, který by měl obarveny listy méně než $k + 1$ různými barvami. Pouhou záměnou barev snadno sestrojíme také stromy $T^{k+1}_{\{1,2,\ \ldots,3k,3k+2\}}$,$T^{k+1}_{\{1,2,\ \ldots,3k,3k+3\}}$ a $T^{k+1}_{\{1,2,\ \ldots,3k,3k+4\}}$. Nyní sestrojíme strom $T^{k+1}_{\{1,2,\ \ldots,3k-1,3k\}}$ podle schématu na následujícím obrázku:

[4]Tedy pouze pokud strom s takovými vlastnostmi existuje.

$T^{k+1}_{\{1,2,\ldots,3k-1,3k\}} =$



$T^{k+1}_{\{1,2\ldots,3k,3k+1\}}$ $T^{k+1}_{\{1,2\ldots,3k,3k+2\}}$ $T^{k+1}_{\{1,2\ldots,3k,3k+3\}}$ $T^{k+1}_{\{1,2\ldots,3k,3k+4\}}$

Skutečně, snadno si uvědomíme, že každý podstrom stromu napravo má listy obarvené alespoň $k+1$ různými barvami, a máme-li podstrom stromu napravo, jehož listy jsou obarveny $k+1$ různými barvami, nemůže používat žádnou z barev $3k+1, 3k+2, 3k+3, 3k+4$ (pokud by byla použita např. barva $3k+1$ v první větvi, muselo by být použito v některé další větvi dalších $k+1$ barev a podstrom by měl obarveny listy alespoň $k+2$ různými barvami), a tudíž listy takového podstromu jsou určitě obarveny pouze barvami z množiny $\{1, 2, \ldots, 3k\}$. Máme tedy strom $T^{k+1}_{\{1,2,\ \ldots,3k-1,3k\}}$, záměnou barev snadno sestrojíme stromy

$$T^{k+1}_{\{1,2,\ \ldots,3k-1,3k+1\}},\ T^{k+1}_{\{1,2,\ \ldots,3k-1,3k+2\}} \text{ a } T^{k+1}_{\{1,2,\ \ldots,3k-1,3k+3\}}.$$

Z nich analogicky předchozímu schématu sestrojíme strom $T^{k+1}_{\{1,2,\ \ldots,3k-1\}}$. Opakováním tohoto postupu vytvoříme až strom

$$T^{k+1} = T^{k+1}_{\{1,2,\ \ldots,k\}}.$$

Skutečně strom $T^{k+1}_{\{1,2,\ \ldots,k\}}$ má požadované vlastnosti. Každý jeho podstrom má listy obarvené alespoň $k+1$ různými barvami. Pokud najdeme podstrom obarvený přesně $k+1$ barvami, jeho listy jsou obarvené pouze barvami z množiny $\{1, 2, \ldots, k\}$, což je zjevně nesmysl (barev je málo). Všechny podstromy tohoto stromu mají tedy listy obarvené alespoň $k+2$ různými barvami. Tím jsme našli vhodný protipříklad a důkaz je hotov.

3. úloha

(a) Dokažte, že pro každé $x \in \mathbb{R}$ platí $|\sin x \cdot \sin 2x| < \frac{\sqrt{3}}{2}$. (2 BODY)

(b) Dokažte, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ a pro každé $x \in \mathbb{R}$ platí

$$|\sin x \cdot \sin 2x \cdot \sin 4x \cdots \sin 2^n x| < \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n.$$

(3 BODY)

(a) Dokážeme nerovnost $|\sin x \cdot \sin 2x| < \frac{\sqrt{3}}{2}$. Funkce $f_1(x) = \sin x \cdot \sin 2x$ je 2π-periodická, nerovnost tedy stačí dokázat na intervalu $\langle 0, 2\pi\rangle$. Snadno ověříme, že na intervalech $\left\langle 0, \frac{\pi}{3}\right)$, $\left(\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}\right)$ a $\left(\frac{5\pi}{3}, 2\pi\right\rangle$ platí nerovnosti $|\sin x| < \frac{\sqrt{3}}{2}$ a $|\sin 2x| \le 1$ a na intervalech $\left(\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right)$ a $\left(\frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right)$ platí nerovnosti $|\sin 2x| < \frac{\sqrt{3}}{2}$ a $|\sin x| \le 1$. V bodech $x = \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}$ a $\frac{5\pi}{3}$ platí $|\sin x| = |\sin 2x| = \frac{\sqrt{3}}{2}$. V každém bodu intervalu $\langle 0, 2\pi\rangle$ tedy platí $|\sin x \cdot \sin 2x| < \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Náznak jiného řešení: Funkci f_1 upravíme:

$$f_1(x) = \sin x \cdot \sin 2x = 2\sin^2 x \cos x = 2(1-\cos^2 x)\cos x.$$

Označme si $t = \cos x$. Pak $|t| \le 1$. Stačí ukázat, že pro $|t| \le 1$ platí

$$2|t - t^3| < \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Spojitá funkce na levé straně může nabývat na intervalu $\langle -1, 1\rangle$ maxima (minima) pouze v bodech $t = \pm 1$ a v bodech, kde má nulovou derivaci (což, jak snadno dopočítáme, jsou pouze body $t = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$). Stačí tedy danou nerovnost ověřit v těchto čtyřech bodech. Tímto postupem dokonce dokážeme nerovnost

$$|\sin x \cdot \sin 2x| \le \frac{4\sqrt{3}}{9}.$$

(b) Označme si $f_n(x) = \sin x \cdot \sin 2x \cdots \sin 2^n x$. Dokážeme $|f_n(x)| < (\frac{\sqrt{3}}{2})^n$ (připustíme i případ $n = 0$, kdy $f_0(x) = \sin x$; v tomto případě platí neostrá nerovnost). Budeme postupovat matematickou indukcí. Pro $n = 0$ platí neostrá nerovnost, pro $n = 1$ jsme provedli důkaz v části (a). Předpokládejme tedy, že tvrzení platí pro všechna $n < k$, a dokažme ho pro $n = k$. Rozlišíme dva případy:

(1) $|\sin x| \le \frac{\sqrt{3}}{2}$. V tomto případě je

$$|f_k(x)| = |\sin x| \cdot |f_{k-1}(2x)| < \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{k-1} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{k}.$$

(2) $|\sin x| > \frac{\sqrt{3}}{2}$. V takovém případě je $|\cos x| < \frac{1}{2}$, a tedy $|\cos x - \cos 3x| < \frac{3}{2}$. Uvědomme si, že

$$\cos x - \cos 3x = \cos(2x - x) - \cos(2x + x) = 2\sin x \sin 2x.$$

Dostáváme (kvůli možnosti $k = 2$ píšeme první nerovnost neostrou)

$$|f_k(x)| = |\sin x \cdot \sin 2x| \cdot |f_{k-2}(4x)| \le \frac{1}{2}|\cos x - \cos 3x| \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{k-2} < \frac{3}{4} \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{k-2} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{k}.$$

4. úloha

(a) Rozhodněte, zda lze pro každé dva mnohoúhelníky A a B v rovině, které mají stejný obsah, rozřezat A pomocí několika přímek a vzniklé díly přeskládat (pomocí posouvání a otáčení) tak, že vznikne B. (2 BODY)

(b) Rozhodněte, zda lze pro každé dva konvexní mnohostěny A a B v prostoru, které mají stejný objem, rozřezat A pomocí několika rovin a vzniklé díly přeskládat (pomocí posouvání a otáčení) tak, že vznikne B. (3 BODY)

(a) Dokážeme, že v rovině toto tvrzení platí. Stejně jako ve druhé úloze čtvrté série si uvědomíme, že relace *být na sebe převoditelný pomocí rozřezání a přeskládání* je ekvivalence na množině všech mnohoúhelníků. Mějme mnohoúhelníky A a B se stejným obsahem. První krok postupu bude ten, že je rozřežeme na trojúhelníky. K tomu potřebujeme následující lemma:

Lemma 1. Nechť M je (ne nutně konvexní) mnohoúhelník. Pak lze M triangulovat, tj. rozdělit pomocí několika jeho úhlopříček na trojúhelníky.

Důkaz. Provedeme matematickou indukcí podle počtu vrcholů mnohoúhelníku M. Má-li M tři vrcholy, tvrzení je triviální (nemusíme nic dělit). Předpokládejme tedy, že máme $n > 3$, tvrzení platí pro všechny mnohoúhelníky s méně než n vrcholy a my máme mnohoúhelník M s n vrcholy. Určitě existuje nějaký vrchol M, u něhož je konvexní úhel. Označme si tento vrchol B a sousední vrcholy A a C. Pokud v trojúhelníku ABC (včetně hranice) již není další vrchol mnohoúhelníku M, můžeme pomocí úhlopříčky AC odříznout trojúhelník ABC a zbylý $(n-1)$-úhelník rozřežeme podle indukčního předpokladu. V opačném případě se v trojúhelníku ABC nachází ještě alespoň jeden vrchol mnohoúhelníku M. Uvažujme přímku p, která prochází vrcholem B a je kolmá na AC. Označme si D ten vrchol M, který leží v trojúhelníku ABC a jehož kolmý průmět na přímku p je nejblíže bodu B (pokud je takových více, vybereme libovolný z nich). Uvědomíme si, že úhlopříčka BD neprotíná žádnou hranu M, ani neprochází žádným vrcholem M. V obou případech bychom uvnitř trojúhelníku ABC našli vrchol mnohoúhelníku M, jehož kolmý průmět na přímku p vyjde blíže k B než v případě vrcholu D, což by byl spor s volbou vrcholu D. Proto úhlopříčka BD rozděluje M na dva mnohoúhelníky s méně než n vrcholy a ty rozřežeme na trojúhelníky podle indukčního předpokladu. Tím je důkaz lemmatu 1 hotov.

Nyní si představme, že jsme mnohoúhelníky A a B rozřezali každý na několik trojúhelníků, jejichž součet obsahů je stejný. Další postup bude ten, že příslušné trojúhelníky rozřežeme na ještě menší trojúhelníky tak, abychom dostali páry trojúhelníků se stejným obsahem. To uděláme snadno. Vezmeme z každé z obou skupin vždy trojúhelník s největším obsahem. Předpokládejme například, že trojúhelník vzniklý z mnohoúhelníku A má větší obsah. Snadno můžeme rozříznout tento trojúhelník na dva tak, aby jeden ze vzniklých trojúhelníků měl stejný obsah jako největší trojúhelník vzniklý z mnohoúhelníku B. Tím vznikne jeden pár trojúhelníků se stejným obsahem a jeden přebytečný trojúhelník, který vrátíme do skupiny mnohoúhelníku A. Celkový počet nespárovaných trojúhelníků se nám zmenší, takže po konečném počtu kroků spárujeme všechny trojúhelníky. Nyní vidíme, že nám stačí původní tvrzení dokázat pro trojúhelníky. Nejdříve dokážeme další lemma:

Lemma 2. Každý trojúhelník lze rozřezat a přeskládat na čtverec.

Důkaz. Mějme dán trojúhelník, pomocí jedné z výšek (použijeme výšku vedoucí z vrcholu o největším vnitřním úhlu) si jej rozřežeme na dva pravoúhlé trojúhelníky a každý z nich si pomocí těžnice vycházející z vrcholu s pravým úhlem rozřežeme na dva rovnoramenné trojúhelníky. Každý z těchto čtyř rovnoramenných trojúhelníků umíme rozřezat (pomocí výšky na základnu) a přeskládat na obdélník. Podle druhé úlohy čtvrté série víme, že každý obdélník lze rozřezat a přeskládat na čtverec, takže také dva obdélníky se stejným obsahem lze na sebe převést rozřezáním a přeskládáním. Každý ze čtyř obdélníků, které jsme získali, tedy převedeme rozřezáním a přeskládáním na obdélník, jehož jedna strana má délku 4. Z nich pak snadno složíme jeden obdélník a ten znovu podle druhé úlohy ze čtvrté série rozřežeme a přeskládáme na čtverec. Tím je důkaz lemmatu 2 hotov.

Nyní, máme-li dva trojúhelníky o stejném obsahu, umíme oba z nich převést na (tentýž) čtverec, takže umíme také oba trojúhelníky převést rozřezáním a přeskládáním vzájemně na sebe. Tím je celá úloha vyřešena.

(b) Ukážeme, že prostorová analogie této rovinné úlohy neplatí. Tedy ukážeme, že existují dva konvexní mnohostěny o stejném objemu, které na sebe nelze převést rozřezáním a přeskládáním. Konkrétně uvažujme A krychli o hraně délky 1 a B pravidelný čtyřstěn o jednotkovém objemu (tedy A a B jsou dva konvexní mnohostěny o stejném objemu). Označme si $l > 0$ délku hrany čtyřstěnu B a $\varphi \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ velikost úhlu, který spolu svírají dvě roviny tvořené dvěma stěnami čtyřstěnu B. Snadno zjistíme, že

$$\varphi = \arccos \frac{1}{3}$$

a podle sedmé úlohy třetí série tedy víme, že φ/π je iracionální číslo. Pro řešení naší úlohy nejdříve vezměme za platný následující fakt, který není až tak jednoduché dokázat; na konci řešení zkusíme diskutovat, jakým způsobem je možno tento fakt v řešení obejít.

Fakt. Nechť $a, b > 0$ jsou dvě čísla, jejichž podíl je iracionální číslo. Pak existuje řešení funkcionální rovnice

$$f(x + y) = f(x) + f(y), \ x, y \in \mathbb{R},$$

které splňuje rovnosti $f(a) = 1$ a $f(b) = 0$.

Nyní si tedy pevně zafixujme takovou funkci pro $a = \varphi$ a $b = \pi$. Tedy máme funkci $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ splňující $f(x + y) = f(x) + f(y)$ a $f(\varphi) = 1$ a $f(\pi) = 0$. Definujme si funkci ζ, která mnohostěnu M přiřadí reálné číslo $\zeta(M)$ následujícím způsobem. Máme-li hranu d mnohostěnu M, tak uvažujeme dvojici rovin tvořených stěnami sousedícími s touto hranou a hraně d přiřadíme „vnitřní“ úhel (tedy úhel uvnitř mnohoúhelníku M) α, který tyto dvě roviny svírají. Jsou-li $d_1, d_2, \ldots, d_k$ délky všech hran M a $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ velikosti příslušných přiřazených úhlů, pak volíme

$$\zeta(M) = d_1 f(\alpha_1) + d_2 f(\alpha_2) + \cdots + d_k f(\alpha_k).$$

Nyní si představme, že mnohostěn M rozřízneme rovinou ϱ a vzniknou nám mnohostěny M_1 a M_2. Ukážeme, že

$$\zeta(M) = \zeta(M_1) + \zeta(M_2). \tag{$\heartsuit$}$$

Skutečně, rozepíšeme-li si obě strany podle definice, pak se nalevo i napravo vyskytují hrany, kterými rovina ϱ neprochází (ty přispívají do součtu na obou stranách stejným součtem).

Pak také musíme uvažovat hrany, které daná rovina ϱ rozřízla na dvě (pak je úhel příslušný těmto hranám na obou stranách stejný a součet délek nových dvou hran je roven délce původní hrany, takže je jasné, že příspěvky na obou stranách budou stejné). Dále musíme uvažovat hrany, které ležely v rovině ϱ (je-li příslušný úhel v mnohostěnu M roven α, v mnohostěnu M_1 roven β a v M_2 roven γ, pak zjevně $\alpha = \beta + \gamma$, tedy $f(\alpha) = f(\beta) + f(\gamma)$, a tedy zřejmě příspěvky příslušné hrany na obou stranách budou stejné). Nakonec musíme uvažovat ještě hrany nově vzniklé tím, že rovina ϱ rozřízla nějakou stěnu mnohostěnu M (označme si délku některé takové hrany d, příslušný úhel v M_1 buď β, v M_2 buď γ, pak $\beta + \gamma = \pi$, $f(\beta) + f(\gamma) = f(\pi) = 0$, takže celkový příspěvek hrany d na pravé i na levé straně rovnosti je nulový). Tím jsme ověřili rovnost ($\heartsuit$).

Z této rovnosti okamžitě plyne, že lze-li dva mnohostěny M a N na sebe převést rozřezáním a přeskládáním, pak $\zeta(M) = \zeta(N)$, neboli že funkce ζ je invariantem vůči rozřezání a přeskládání. My však víme, že $\zeta(A) = 12 \cdot 1 \cdot f(\frac{\pi}{2}) = 6f(\pi) = 0$ a $\zeta(B) = 6lf(\varphi) = 6l > 0$. Tedy $\zeta(A) \neq \zeta(B)$, a mnohostěny A a B na sebe skutečně nelze převést rozřezáním a přeskládáním. Tím je důkaz hotov.

Poznámka. V řešení jsme využili netriviálního faktu existence jistého řešení funkcionální rovnice. Tento fakt není až tak jednoduché dokázat, nicméně jsme ho v řešení použili jen pro jednoduchost a větší přehlednost. Představme si pro spor, že existuje postup, jak rozřezat a přeskládat krychli A na čtyřstěn B. V tomto postupu se vyskytuje pouze konečně mnoho mnohostěnů s konečně mnoha úhly, ve kterých musíme definovat funkci f, abychom mohli zavést invariant ζ a uspěli s důkazem. Problém se nám tedy změní na nalezení řešení funkcionální rovnice $f(x+y) = f(x) + f(y)$ s vlastností $f(\varphi) = 1$ a $f(\pi) = 0$ definovaném pouze v konečně mnoha bodech. To je však již nepoměrně jednodušší otázka, nicméně její řešení by vyžadovalo ještě trochu technické práce.

Poznámky opravovatele: S částí (a) si velká část řešitelů úspěšně poradila využívajíc druhé úlohy ze čtvrté série, podobně jako v autorském řešení (objevilo se několik zajímavých myšlenek, například spojování dvou čtverců do jednoho). Mnoho řešitelů však napsalo, že mnohoúhelník rozřeže na trojúhelníky, aniž by napsali, jak to udělají. Pravda je, že tvrzení (Lemma 1 z autorského řešení) o existenci triangulace libovolného mnohoúhelníku je dosti známé, ale v případě nekonvexních mnohoúhelníků vůbec není na první pohled zřejmé, a tak by bylo dobré alespoň zmínit, že toto tvrzení platí.

Část (b) přinášela mnohem větší úskalí. Většina řešitelů, kteří se o tuto část pokoušeli, prostě napsala, že postup v části (a) lze analogicky provést i v prostoru, přitom se ani sami nepřesvědčili, zda to je pravda. Zatímco prostorová analogie triangulace pro konvexní mnohostěny platí, ale zdaleka není tak jednoduchá jako v rovině[5], nepřekonatelné úskalí přináší transformace čtyřstěnu na kvádr (jak je ostatně vidět ze vzorového řešení).

5. úloha

(a) Zjistěte první nenulovou číslici za desetinnou čárkou čísla $-\sqrt{3^{6^9} + 3^{9^6}}$. (2 BODY)

[5] Rozuměj: „Já neznám žádný jednoduchý důkaz.“ Mimochodem, pokud někdo takový znáte, určitě by mě zajímal …

(b) Zjistěte 7 číslic před a 7 číslic za desetinnou čárkou v čísle $-\sqrt[7]{7^{7000}+7^{6000}}$. (3 BODY)

(a) Označme $A = -\sqrt{3^{6^9}+3^{9^6}}$ a odhadněme A shora. Platí

$$A < -\sqrt{3^{6^9}} = -\sqrt{3^{2^9\cdot 3^9}} = -3^{2^8\cdot 3^9}.$$

Na druhou stranu odhad zdola nám dává

$$-(3^{2^8\cdot 3^9}+0,01)^2 < -(3^{2^9\cdot 3^9}+0,02\cdot 3^{2^8\cdot 3^9}) < -(3^{6^9}+3^{2^8\cdot 3^9-4}) <$$
$$< -(3^{6^9}+3^{(2^8-4)\cdot 3^9}) < -(3^{6^9}+3^{3^3\cdot 3^9}) = -(3^{6^9}+3^{9^6}) = -A^2.$$

Máme tedy

$$-(3^{2^8\cdot 3^9}+0,01) < A < -3^{2^8\cdot 3^9}.$$

Označme $0 < x < 1$ desetinnou část čísla $-A$. Z dokázané nerovnosti plyne

$$-(3^{2^8\cdot 3^9}+x) = -\sqrt{3^{6^9}+3^{9^6}},$$

po umocnění následovně

$$2\cdot 3^{2^8\cdot 3^9}x + x^2 = 3^{9^6}.$$

Tuto rovnost si ještě upravíme na

$$x = \frac{3^{9^6}-x^2}{2\cdot 3^{2^8\cdot 3^9}},$$

z čehož je vidět odhad pro x

$$\frac{3^{9^6}-1}{2\cdot 3^{2^8\cdot 3^9}} < x < \frac{3^{9^6}}{2\cdot 3^{2^8\cdot 3^9}}.$$

Nyní pomocí logaritmů ukážeme, že levá a pravá strana se neliší v první nenulové číslici, tato číslice tedy bude řešením úlohy.

Logaritmus pravé strany je

$$\log_{10}\left(\frac{3^{9^6}}{2\cdot 3^{2^8\cdot 3^9}}\right) = (9^6 - 2^8\cdot 3^9)\cdot\log_{10}3 - \log_{10}2 \doteq -2150579,984 = 0,016 - 2150580.$$

Logaritmus levé strany je

$$\log_{10}\left(\frac{3^{9^6}-1}{2\cdot 3^{2^8\cdot 3^9}}\right) = \log_{10}\left(1-\frac{1}{3^{9^6}}\right) + (9^6 - 2^8\cdot 3^9)\cdot\log_{10}3 - \log_{10}2 \doteq$$
$$\doteq -2150579,984 = 0,016 - 2150580.$$

Zápisem $a \doteq b$ zde rozumíme to, že cifry v desetinném zápisu čísla a se od čísla b liší nejvýše o jedničku v posledním desetinném místě čísla b (které má ukončený desetinný rozvoj). Platí tedy i $\log_{10} x \doteq 0{,}016 - 2150580$.

První nenulová číslice x je určena číslem $0,016$, číslo -2150580 nám udává počet nul před touto číslicí. Je $10^{0{,}016} \doteq 1,04$. Snadno se přesvědčíme, že změníme-li exponent v předchozí rovnosti nejvýše o jednu tisícinu, na první cifře výsledku se nic nezmění. První nenulová číslice x je tedy 1.

(b) Označme a upravme si $F = \sqrt[7]{7^{7000} + 7^{6000}} = 7^{1000} \sqrt[7]{1 + 7^{-1000}}$. Zjevně $F > 0$. Číslo F odhadneme zeshora. Podle binomické věty platí (přesně napíšeme jen dva členy):

$$\left(7^{1000} + \frac{1}{7}\right)^7 = 7^{7000} + 7 \cdot 7^{6000} \cdot \frac{1}{7} + \cdots > 7^{7000} + 7^{6000} = F^7.$$

Je tedy $F < 7^{1000} + \frac{1}{7}$. Nyní číslo F odhadneme také zdola. Buď $0 < t < \frac{1}{7}$. Použijeme znovu binomickou větu a snadného odhadu $\binom{7}{k} = \frac{7 \cdot 6 \cdots (7-k+1)}{k!} < 7^k$. Dostáváme:

$$\left(7^{1000} + \left(\frac{1}{7} - t\right)\right)^7 = 7^{7000} + 7 \cdot 7^{6000} \cdot \left(\frac{1}{7} - t\right) + \sum_{k=2}^{7} \binom{7}{k} \cdot 7^{7000-1000k} \cdot \left(\frac{1}{7} - t\right)^k <$$
$$< F^7 - t \cdot 7^{6001} + 6 \cdot 7^{5000}.$$

Je vidět, že zvolíme-li např. $t = 7^{-1000}$, stále bude poslední číslo menší než F^7. Dostali jsme tedy nerovnosti:

$$7^{1000} + \frac{1}{7} - 7^{-1000} < F < 7^{1000} + \frac{1}{7}.$$

Jelikož $7^{-1000} = 49^{-500} < 10^{-8}$ a číslo $\frac{1}{7}$ nemá na osmém místě svého desetinného rozvoje nulu, je zřejmé, že číslo F má 7 číslic před i za desetinnou čárkou stejných jako číslo $7^{1000} + \frac{1}{7}$. Zřejmě $0 < \frac{1}{7} < 1$, takže číslice před desetinnou čárkou jsou dány číslem 7^{1000} a čísla za desetinnou čárkou číslem $\frac{1}{7}$. Zjistíme tedy zbytek čísla 7^{1000} po dělení 10^7. Podle binomické věty je:

$$7^{1000} = (7^4)^{250} = (1 + 2400)^{250} = 1 + \binom{250}{1} 2400 + \cdots$$

Zbylé členy, které jsme nenapsali, jsou zjevně dělitelné 10^7. Je tedy

$$7^{1000} \equiv 1 + 600\,000 \equiv 600\,001 \pmod{10^7}.$$

Číslice za desetinnou čárkou v čísle $\frac{1}{7}$ zjistíme prostým dělením. Prvních 7 číslic před a za desetinnou čárkou čísla F je tedy:

$$\ldots 0\,600\,001{,}142\,857\,1 \ldots$$

Hledané číslice v čísle ze zadání jsou stejné, protože toto číslo se od čísla F liší pouze znaménkem.

6. úloha

(a) Nechť p je polynom s reálnými koeficienty stupně nejvýše n. Vyjádřete hodnotu $p(n+2)$, znáte-li hodnoty $p(1), p(2), \ldots, p(n+1)$. (2 BODY)

(b) Dokažte, že pro nekonečně mnoho různých přirozených čísel n existuje polynom p stupně n s reálnými koeficienty, jehož hodnoty $p(1), p(2), \ldots, p(n+2)$ jsou po dvou různé mocniny dvojky (s celočíselnými exponenty). (3 BODY)

(a) Hodnoty $p(1), p(2), \ldots, p(n+1)$ nám určují polynom stupně nejvýše n jednoznačně, určují tedy jednoznačně i hodnotu $p(n+2)$. Nyní stačí nalézt vhodný tvar vyjádření polynomu p. Definujme si polynom $q_k(x)$ (pro $k = 1, 2, \ldots, n+1$) následujícím způsobem:

$$q_k(x) = \frac{(x-1)(x-2)\cdots(x-(k-1))(x-(k+1))(x-(k+2))\cdots(x-(n+1))}{(k-1)(k-2)\cdots(k-(k-1))(k-(k+1))(k-(k+2))\cdots(k-(n+1))}.$$

Je zřejmé, že polynom q_k má stupeň n a platí

$$q_k(1) = q_k(2) = \cdots = q_k(k-1) = q_k(k+1) = q_k(k+2) = \cdots = q_k(n+1) = 0, \; q_k(k) = 1.$$

Nyní definujeme polynom $q(x)$ předpisem

$$q(x) = p(1)q_1(x) + p(2)q_2(x) + \cdots + p(n)q_n(x) + p(n+1)q_{n+1}(x).$$

Zřejmě polynom $p - q$ je stupně nejvýše n a je roven nule pro $x = 1, 2, \ldots, n+1$. Je tedy zřejmé, že polynom $p - q$ je nulový, a tedy $p \equiv q$. Nyní již můžeme spočítat hodnotu $p(n+2)$:

$$p(n+2) = q(n+2) = p(1)q_1(n+2) + p(2)q_2(n+2) + \cdots + p(n+1)q_{n+1}(n+2).$$

Upravíme členy $q_k(n+2)$:

$$\begin{aligned} q_k(n+2) &= \frac{(n+1)n\cdots((n+2)-(k-1))((n+2)-(k+1))\cdots 3\cdot 2\cdot 1}{(k-1)(k-2)\cdots 3\cdot 2\cdot 1\cdot(-1)\cdot(-2)\cdots(-((n+1)-k))} = \\ &= (-1)^{n+1-k}\frac{(n+1)!}{(k-1)!(n+2-k)!} = (-1)^{n+1-k}\binom{n+1}{n+2-k}. \end{aligned}$$

Dostáváme tedy vyjádření

$$p(n+2) = \binom{n+1}{1}p(n+1) - \binom{n+1}{2}p(n) + \cdots + (-1)^{n-1}\binom{n+1}{n}p(2) + (-1)^n p(1).$$

Tím je vyřešena část (a).

(b) Budeme se snažit najít vhodné hodnoty n a mocnin dvojky pro hodnoty $p(1), p(2), \ldots, p(n+1)$ tak, aby podle vztahu odvozeného v části (a) vyšla i hodnota $p(n+2)$ mocnina dvojky (a navíc aby všechny mocniny měly různé exponenty). Existence polynomu p pak bude zaručena pomocí stejné konstrukce, jakou jsme použili v části (a) pro polynom $q(x)$.

Nyní již k řešení úlohy. Podle binomické věty platí

$$(-1)^{n+1} = (1-2)^{n+1} = 1 - \binom{n+1}{1}2 + \binom{n+1}{2}2^2 - \cdots + (-1)^{n+1}2^{n+1}.$$

Nyní předpokládejme, že n je liché, odečtěme od obou stran jedničku, vydělme dvěma a změňme znaménko:

$$0 = \binom{n+1}{1}1 - \binom{n+1}{2}2 + \cdots + \binom{n+1}{n}2^{n-1} - 2^n.$$

K předposlednímu členu na pravé straně přičteme $(n+1)2^{n-1}$, od posledního členu odečteme 2^n. Dostaneme rovnost

$$(n-1)2^{n-1} = \binom{n+1}{1}1 - \binom{n+1}{2}2 + \cdots - \binom{n+1}{n-1}2^{n-2} + \binom{n+1}{n}2^n - 2^{n+1}. \qquad (\heartsuit)$$

Označíme-li si jako p polynom stupně nejvýše n, který splňuje rovnosti

$$p(1) = 2^{n+1},\ p(2) = 2^n,\ p(3) = 2^{n-2},\ \ldots,\ p(n) = 2,\ p(n+1) = 1$$

(jeho existence a jednoznačnost je zaručena podle řešení části (a)), pak z výsledku odvozeného v části (a) a ze vztahu $(\heartsuit)$ vidíme, že

$$p(n+2) = (n-1)2^{n-1}.$$

Nyní je vidět, že stačí volit $n = 1+2^{k+1}$ (což je liché číslo), kde $k \geq 2$, a vyjde $p(n+2) = 2^{n+k}$. Dostali jsme polynom p stupně nejvýše n, jehož hodnoty $p(1), p(2), \ldots, p(n+2)$ jsou po dvou různé mocniny dvojky. Zadání po nás však vyžadovalo najít polynom stupně n, my zatím nemáme jistotu, zda není stupeň polynomu p nižší. Předpokládejme tedy pro spor, že stupeň polynomu p je nejvýše $n-1$. Pak podle části (a) lze hodnotu $p(n+1)$ vyjádřit podle předchozích hodnot:

$$1 = p(n+1) = \binom{n}{1}p(n) - \binom{n}{2}p(n-1) + \cdots - \binom{n}{n-1}p(2) + p(1).$$

Všimněme si, že na pravé straně je určitě sudé číslo, protože všechny hodnoty $p(1), p(2), \ldots, p(n)$ jsou sudé, na levé straně je jednička. Tím dostáváme kýžený spor. Polynom p má tedy stupeň n a splňuje požadavky zadání. Našli jsme tedy nekonečně mnoho vyhovujících n (tvaru $n = 1 + 2^{k+1}$ pro $k \geq 2$) a úloha je vyřešena.

Poznámky opravovatele: V části (a) se sešlo jen několik řešení, přesto se mezi nimi našlo několik naprosto odlišných přístupů. Mimo autorského řešení založeného na konstrukci Lagrangeova interpolačního polynomu se objevilo několik řešení založených na jednoduché matematické indukci podle stupně polynomu n a jedna úspěšná kombinatorická úvaha. Jedno správné řešení také spočívalo v napsání soustavy lineárních rovnic pro koeficienty polynomu

p. Každý koeficient pak lze podle Cramerova pravidla napsat jako podíl dvou determinantů, které lze (kupodivu) celkem rozumně spočítat jako tzv. Vandermondovy determinanty.

Část (b) se pokusil řešit pouze *Alexandr Kazda*, který přišel na stejné řešení jako autor úlohy, do úplné správnosti však ještě chybělo ověření, že nalezené polynomy mají správný stupeň.

7. úloha

Máme n mincí a jedny rovnoramenné váhy.[6] Víme, že mezi mincemi se vyskytuje právě jedna falešná. Všechny pravé mince mají stejnou hmotnost. Zjistěte, pro jaké maximální n umíme falešnou minci najít, máme-li k dispozici k vážení a víme-li, že

(a) falešná mince je nepatrně lehčí než pravá. (2 BODY)

(b) hmotnost falešné mince se nepatrně liší od hmotnosti pravé, nevíme však, zda je falešná mince lehčí či těžší. (3 BODY)

(a) Ukážeme, že v tomto případě je maximální počet mincí při k možných váženích roven $n = 3^k$. Nejprve pro $n = 3^k$ popíšeme strategii, která zaručuje, že falešnou minci při k váženích objevíme. Budeme postupovat matematickou indukcí. Pro $k = 1$ máme $n = 3$ mince. Vezmeme dvě z nich a každou dáme na jednu misku. Pokud rovnoramenné váhy ukáží, že jedna z mincí je lehčí, víme, že to musí být falešná mince. Pokud rovnoramenné váhy ukáží, že mince jsou stejně těžké, je zřejmé, že falešná musí být zbylá mince, kterou jsme nevážili. Nyní předpokládejme, že známe strategii pro k vážení a $n = 3^k$ mincí, a mějme $n = 3^{k+1}$ mincí a $k + 1$ vážení. Mince rozdělíme do tří stejně velkých skupin po 3^k a dvě ze skupin umístíme každou na jednu z misek rovnoramenných vah. Výsledek vážení nám určí, ve které ze skupin je falešná mince (pokud je jedna ze skupin lehčí, musí obsahovat falešnou minci, pokud jsou stejně těžké, musí být falešná mince ve zbylé skupině, kterou jsme nevážili). Vezmeme tuto skupinu 3^k mincí, zbylé dáme stranou a dále postupujeme podle strategie pro k vážení. Je vidět, že takto se nám podaří určit falešnou minci mezi $n = 3^k$ mincemi na k vážení.

Zbývá nám dokázat, že pro více mincí se nám to nepodaří. Mějme tedy více než 3^k mincí a předpokládejme, že existuje strategie, kterou pomocí k vážení najdeme falešnou minci. Představme si, že první mince je falešná, a proveďme vážení podle této strategie. Výsledek můžeme zapsat pomocí posloupnosti písmen L, S, P (levá miska lehčí, obě misky stejně těžké, pravá miska lehčí) délky k. Nyní si představme, že je druhá mince falešná, proveďme vážení podle naší strategie a znovu zapišme výsledek pomocí posloupnosti písmen L, S, P délky k, atd. Poté, co naši strategii otestujeme na všech případech (první mince falešná, druhá mince falešná, ... , poslední mince falešná), budeme mít zapsáno více než 3^k posloupností délky k obsahujících písmena L, S, P. Různých posloupností délky k obsahujících 3 písmena je však přesně 3^k. Proto podle Dirichletova principu jsme tedy museli jednu z posloupností napsat alespoň dvakrát. Tedy existují dvě mince (r-tá a s-tá), ke kterým jsme napsali stejné výsledky vážení, a je tedy zřejmé, že naše strategie nerozliší situace, kdy r-tá a s-tá mince jsou falešné. Spor.

[6] Ty fungují tak, že každým vážením pouze porovnají hmotnosti mincí na levé a na pravé misce (možné jsou tedy tři různé výsledky vážení).

(b) Ukážeme, že tentokrát je maximální n rovno $\frac{3^k-1}{2}$. Nejdříve popíšeme pro $n = \frac{3^k-1}{2}$ vhodnou strategii. Pro $k = 1$ máme jednu minci a není co řešit. Pro $k > 1$ si rozdělme mince do tří skupin, první dvě skupiny budou obsahovat po $\frac{3^{k-1}-1}{2}$ mincích, poslední skupina bude mít o jednu minci více. Porovnáme na váhách první dvě skupiny. Nastane jeden z následujících případů.

(1) Obě skupiny jsou stejně těžké. Pak je falešná mince v poslední skupině. Všimněme si, že máme k dispozici mince z prvních dvou skupin, které jsou určitě pravé a dohromady jich není méně (pro $k \geq 3$ jich je dokonce více), než mincí v poslední skupině. Dále si všimněme, že v poslední skupině je přesně $1+1+3+9+\cdots+3^{k-2}$ (podezřelých) mincí a že nám zbývá $k-1$ vážení. V druhém vážení tedy vezmeme 3^{k-2} mincí z poslední skupiny a porovnáme je se stejným počtem pravých mincí z prvních dvou skupin. Pokud bude skupina mincí z poslední skupiny např. těžší, víme, že falešná mince je těžší a nachází se mezi těmito 3^{k-2} mincemi. Na její dohledání nám stačí pro zbylých $k-2$ vážení postupovat podle bodu (a). Obdobně pokud budou mince z poslední skupiny lehčí. Pokud budou obě skupiny stejně těžké, přesuneme vážené mince k těm, o kterých víme, že jsou pravé, a dostáváme se do analogické situace s menším počtem mincí a vážení. Máme $k-2$ vážení a $1+1+3+9+\cdots+3^{k-3}$ podezřelých mincí. Postupujeme tedy analogicky a porovnáme 3^{k-3} podezřelých mincí se stejným počtem zaručeně pravých. Pokud nejsou skupiny stejně těžké, dokončíme vážení podle bodu (a), pokud jsou stejně těžké, zmenšili jsme počet podezřelých mincí. Takto pokračujeme stále dále, pokud se nám v některém z kroků stalo, že skupiny vážených mincí nebyly stejně těžké, vážení jsme dokončili podle bodu (a). Pokud v každém kroku byly obě skupiny stejně těžké, po skončení postupu vážení nám na stole zbyla jediná mince z poslední skupiny, která se nikdy na váhy nedostala. Je zřejmé, že je to ta falešná. V tomto případě jsme tedy uspěli.

(2) Předpokládejme bez újmy na obecnosti, že první skupina je těžší. Všimněme si, že v prvních dvou skupinách je po $1+3+9+\cdots+3^{k-2}$ mincích. Nejdříve si představme, že máme neomezený počet pravých mincí. Pak by další postup mohl být následující. V druhém kroku vážení bychom vzali po 3^{k-2} mincích z lehké a těžké skupiny a porovnali je z $2 \cdot 3^{k-2}$ pravými mincemi. Pokud by podezřelé mince byly lehčí, věděli bychom, že falešná mince je lehčí, a mezi 3^{k-2} kandidáty bychom ji ve zbylých $k-2$ váženích našli podle bodu (a). Podobně, pokud by podezřelé mince byly těžší. Pokud budou obě misky vah v rovnováze, dostaneme se do analogické situace s menším počtem vážení i podezřelých mincí (podobně jako v bodě (1)). Máme po $1+3+9+\cdots+3^{k-3}$ potenciálně těžších a lehčích mincích a $k-2$ vážení. Postupujeme tedy analogicky. Je zřejmé, že během k vážení se všechny podezřelé mince dostanou na váhy, a tedy jednou zřejmě dojde k situaci, kdy nebudou misky v rovnováze, a budeme moci dokončit postup vážení podle bodu (a).

Tím by byl celý postup hotový, v prvním kroku jsme však potřebovali $2 \cdot 3^{k-2}$ pravých mincí, které nemáme (pro $k > 2$) k dispozici. Musíme tedy pro $k > 2$ postup mírně modifikovat. V prvním kroku jsme porovnávali 3^{k-2} potenciálně lehčích mincí (označme tuto skupinu L) a 3^{k-2} potenciálně těžších mincí (T) s pravými mincemi. Počet potřebných pravých mincí zmenšíme následujícím trikem. Rozdělíme skupinu L (a T) do tří stejně velkých podskupin L_1, L_2 a L_3 (a T_1, T_2 a T_3). Dále přidáme dvě stejně velké skupiny pravých mincí P_1 a P_2 (laskavý čtenář snadno ověří, že potřebný počet mincí máme v tomto případě k dispozici). Porovnáme nyní skupinu mincí tvořenou podskupinami L_1, L_2, T_1 a T_2 se skupinou mincí tvořenou podskupinami L_3, T_3, P_1 a P_2. Pokud jsou misky v rovnováze, pokračujeme analogicky dále s menším počtem podezřelých mincí. Pokud je např. levá miska těžší (zbylá možnost je analogická), víme, že falešná mince je mezi skupinami T_1, T_2 a L_3. V dalším vážení porovnáme skupiny T_1 a T_2 a podle výsledku poznáme, ve které ze skupin T_1, T_2, L_3 je falešná mince. Dále již můžeme postupovat podle bodu (a).

Do úplného řešení tedy zbývá dokázat, že pro $n > \frac{3^k-1}{2}$ neexistuje strategie, která nám zaručí nalezení falešné mince. Dokážeme to podobně jako v bodu (a). Pro spor předpokládejme existenci takové strategie pro $n > \frac{3^k-1}{2}$. Tentokrát máme $2n$ různých situací, kterými budeme naši strategii testovat. První situace je, že první mince je falešná a lehčí, druhá situace je, že první mince je falešná a těžší, třetí situace je, že druhá mince je falešná a lehčí atd. V každé z těchto situací si napíšeme posloupnost odpovídající výsledkům vážení, které nám dá naše strategie (podobně jako v bodu (a)). Pokud má být naše strategie úspěšná, musí platit, že dvě stejné posloupnosti jsou napsány nejvýše u dvou situací odpovídajících téže falešné minci (v jedné je ta mince lehčí, v druhé těžší). Tedy pro nejvýše jednu minci se stane, že posloupnost bude obsahovat samé nuly (tj. všechna vážení dopadla rovnováhou misek). To ale znamená, že ve všech ostatních situacích (kdy je falešná mince jiná) se během postupu vážení někdy poprvé stane, že jedna z misek je lehčí. Na konci vážení jsme schopni určit podle výsledků vážení, která mince je falešná, takže podle tohoto nerovnovážného vážení jsme také zpětně schopni určit, zda je těžší, nebo lehčí. Tedy situacím, kdy k-tá mince je falešná a lehčí, resp. kdy k-tá mince je falešná a těžší, nemůže odpovídat stejná posloupnost s výjimkou případu, kdy je tato posloupnost nulová. Tedy mezi výsledky se může opakovat pouze nulová posloupnost, a to nejvýše dvakrát. Jelikož celkový počet posloupností je 3^k, dostáváme nerovnost $2n \leq 3^k + 1$, tedy

$$n \leq \frac{3^k + 1}{2}.$$

Stačí tedy už jen vyloučit možnost $n = \frac{3^k+1}{2}$. Mějme tedy strategii fungující pro $n = \frac{3^k+1}{2}$ mincí. V prvním vážení strategie bude vyžadovat porovnat (bez újmy na obecnosti) mince s čísly $1, 2, \ldots, l$ a mince s čísly $l+1, l+2, \ldots, 2l$ (kde $2l \leq \frac{3^k+1}{2}$). Jsou tři možné výsledky vážení a musí platit, že počet nevyloučených situací po každém výsledku musí být dostatečně malý, aby bylo možné úspěšně vážení dokončit. Pokud bude např. levá miska těžší, počet zbylých možností je $2l$ (první mince je falešná a těžší, druhá mince je falešná a těžší, ..., l. mince je falešná a těžší, nebo $(l+1)$. mince je falešná a lehčí, $(l+2)$. mince je falešná a lehčí, ..., nebo $2l$. mince je falešná a lehčí). Pomocí zbylých $k-1$ vážení jsme schopni rozlišit nejvýše 3^{k-1} výsledků, takže dostáváme nerovnost $2l \leq 3^{k-1}$.

Pokud však budou při prvním vážení misky v rovnováze, zbývá nám $2(\frac{3^k+1}{2} - 2l)$ možností ($(2l+1)$. mince je falešná a lehčí, $(2l+1)$. mince je falešná a těžší, ..., poslední mince je falešná a lehčí nebo poslední mince je falešná a těžší) a ještě je možné, že všechna vážení dopadnou rovnováhou. Dostáváme tedy nerovnost $2(\frac{3^k+1}{2} - 2l) \leq 3^{k-1} + 1$, což upravíme na $3^{k-1} \leq 2l$.

Spojením těchto dvou nerovností dostáváme $2l = 3^{k-1}$, což je nesmysl, protože na levé straně rovnosti je sudé číslo a na pravé straně liché číslo. Dostáváme kýžený spor a důkaz je hotov.

Poznámky opravovatele: Drtivé většině řešitelů bych vytknul následující zlozvyk. K úplnému řešení nestačí uhodnout maximální počet mincí $n = f(k)$, popsat postup vážení vedoucí k odhalení falešné mince a *tvářit se*, že popsaný postup je nejlepší. Důležitou součástí řešení je skutečný *důkaz*, že pro větší počet mincí již úspěšní při vážení nebudeme. Zatímco v části (a) většina řešitelů uhodla správný výsledek $n = 3^k$ (vyskytovalo se však i mnoho jiných vysledků), v části (b) byl nejčastější tip $n = 3^{k-1}$. Jediné správné řešení (mimochodem moc pěkné) části (b) předvedl *Martin Tancer*.

Za rozumné dolní odhady maximálního n (tím jsem rozuměl odhady typu $c \cdot 3^n$ pro pevnou konstantu $c > 0$) jsem v obou částech uděloval po bodu. Za správné horní odhady maximálního n jsem v části (a) uděloval bod, v části (b) dva body.

Několik řešitelů si povšimlo pěkného pozorování, že v části (b) pro $n = 2$ neexistuje žádná strategie vedoucí k odhalení falešné mince, ať máme sebevíc vážení `:-)`.