✉ *Korespondenční seminář, KAM MFF UK, Malostranské náměstí 25, 118 00 Praha 1* ✉

2. série

Téma: Body

Termín odeslání: 4. LISTOPADU 2002

1. ÚLOHA (3 BODY)

Mějme v rovině dán konvexní n-úhelník, jehož vrcholy mají celočíselné souřadnice. Dokažte, že je-li $n > 4$, potom existuje bod s celočíselnými souřadnicemi uvnitř tohoto n-úhelníka.

2. ÚLOHA (3 BODY)

Mějme v prostoru n bodů A_1 až A_n. Spojme úsečkami body A_1 a A_2, A_2 a A_3, …, A_n a A_1. Ukažte, že součet úhlů vrcholů této lomené čáry je nejvýše $180(n-2)^\circ$.

3. ÚLOHA (3 BODY)

Označme α, β, γ vnitřní úhly ostroúhlého trojúhelníku ABC. Označme D bod v polorovině opačné k BCA takový, že $|\sphericalangle DBC| = 90^\circ - \gamma$ a $|\sphericalangle DCB| = 90^\circ - \beta$. Označme E bod v polorovině opačné k ACB takový, že $|\sphericalangle ECA| = 90^\circ - \alpha$ a $|\sphericalangle EAC| = 90^\circ - \gamma$. Označme F bod v polorovině opačné k ABC takový, že $|\sphericalangle FAB| = 90^\circ - \beta$ a $|\sphericalangle FBA| = 90^\circ - \alpha$. Dokažte, že se přímky AD, BE, CF protínají v jednom bodě.

4. ÚLOHA (5 BODŮ)

Pro která k existuje n takové, že na přímce najdeme n bodů takových, že každé číslo z $1, \ldots, k$ je vzdáleností právě jedné dvojice z těchto n bodů?

5. ÚLOHA (5 BODŮ)

V rovině je dáno nekonečně mnoho bodů, vzdálenost každých dvou je přirozené číslo. Ukažte, že všechny body leží na jedné přímce.

6. ÚLOHA (5 BODŮ)

Dokažte, že pro každé přirozené $n > 1$ platí

$$\sqrt{2} + \sqrt{4 - 2\sqrt{2}} + \cdots + \sqrt{2n - 2\sqrt{n(n-1)}} > \sqrt{n(n+1)}.$$

7. ÚLOHA (5 BODŮ)

Najděte v rovině 13 různých bodů tak, že každé tři určují trojúhelník, jehož všechny vnitřní úhly jsou menší nebo rovny 150°.

8. ÚLOHA (5 BODŮ)

Uvnitř pravidelného čtyřbokého jehlanu s podstavnou hranou délky 20 a výškou 10 je umístěno 6543 bodů. Dokažte, že mezi nimi existují dva body, jejichž vzdálenost je menší nebo rovna 1.

Řešení 2. série

1. úloha (44, 16, 1.00, 1.0)

Mějme v rovině dán konvexní n-úhelník, jehož vrcholy mají celočíselné souřadnice. Dokažte, že je-li $n > 4$, potom existuje bod s celočíselnými souřadnicemi uvnitř tohoto n-úhelníka.

Úlohu dokážeme pro pětiúhelník, pro větší n vezmeme libovolných 5 vrcholů. Bod, který bude ležet v takovém pětiúhelníku, bude jistě ležet i v původním n–úhelníku.

Mějme tedy pětiúhelník. Podíváme-li se na souřadnice jeho vrcholů, můžeme rozlišit čtyři možnosti podle parity jednotlivých souřadnic $((s, s)$, (s, l), (l, s), (l, l), kde s znamená sudá a l lichá). Protože máme 5 vrcholů, najdeme jistě dva stejného typu, nechť jsou to vrcholy o souřadnicích (x_1, y_1) a (x_2, y_2). Střed této úsečky má potom souřadnice $(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2})$, což díky výběru vrcholů je mřížový bod. Pokud tyto vrcholy nebyly spojeny hranou, pak onen mřížový bod leží uvnitř pětiúhelníka a jsme hotovi. Problém nastává v případě, že tyto vrcholy jsou sousední, potom jsme našli mřížový bod na hraně a ne uvnitř.

To ošetříme následující úvahou. Máme-li dva sousední vrcholy stejného typu, můžeme jeden z nich nahradit středem úsečky jimi tvořené, přičemž opět dostaneme konvexní pětiúhelník s vrcholy v mřížových bodech, který bude celý ležet v původním. Protože na obvodu pětiúhelníka jistě ležel konečný počet mřížových bodů, řekněme k, dostaneme se nejpozději po k nahrazeních k takovému pětiúhelníku, že bod nalezený postupem z první části bude uvnitř původního pětiúhelníka, čímž je úloha dokázána.

Poznámky k došlým řešením: Většina řeštelů dokazovala úlohu pomocí rozšiřování „nejmenších“ pětiúhelníků a téměř všichni vyřešili jen speciální případy konvexních n-úhelníků. Jiní zase tvrdili, že vrcholy pětiúhelniků leží na nejvýše pěti svislých přímkách a na nejvýše pěti vodorovných přímkách, tyto přímky se pak protínají uvnitř pětiúhelníku. Častým protipříkladem byl pětiúhelník s vrcholy v bodech $[4, 0]$, $[3, 1]$, $[2, 3]$, $[1, 6]$, $[0.10]$. Ostatní správná řešení se podobala autorskému.

2. úloha (47, 5, 0.00, 0.0)

Mějme v prostoru n bodů A_1 až A_n. Spojme úsečkami body A_1 a A_2, A_2 a A_3, ..., A_n a A_1. Ukažte, že součet úhlů vrcholů této lomené čáry je nejvýše $180(n-2)^\circ$.

Důkaz je stejný jako pro rovinný n-úhelník – matematickou indukcí: Nejprve pro $n = 3$: součet vnitřních úhlů v trojúhelníku je 180°, tedy tvrzení platí. Nyní indukční krok: Víme, že pro k tvrzení platí, chceme dokázat, že platí i pro $k+1$. Vezměme tedy $k+1$ bodů v prostoru, na ten $(k+1)$-ní na chvilku zapomeňme a spojme úsečkami těch prvních k. Z indukčního předpokladu víme, že součet S_k úhlů je nejvýše $180(k-2)^\circ$. Jak se změní součet přidáním $(k+1)$-ního bodu?

Rozmyslete si, že

$$S_{k+1} = S_k + |\sphericalangle A_2A_1A_{k+1}| + |\sphericalangle A_1A_{k+1}A_k| + |\sphericalangle A_{k+1}A_kA_{k-1}| - |\sphericalangle A_2A_1A_k| - |\sphericalangle A_1A_kA_{k-1}|.$$

Dokážeme-li, že

$$|\sphericalangle A_2A_1A_{k+1}| - |\sphericalangle A_2A_1A_k| \leq |\sphericalangle A_{k+1}A_1A_k| \tag{1}$$

a

$$|\sphericalangle A_{k-1}A_kA_{k+1}| - |\sphericalangle A_{k-1}A_kA_1| \leq |\sphericalangle A_{k+1}A_kA_1|, \tag{2}$$

dostaneme, že $S_{k+1} \leq S_k +$ součet vnitřních úhlů v trojúhelníku $A_1A_kA_{k+1}$, což je $180°$, takže z indukčního předpokladu plyne $S_{k+1} \leq 180 \cdot k + 180$, což bylo dokázati.

Zbývá ukázat platnost nerovnosti (1), nerovnost (2) se ukáže analogicky. Přepišme si (1) do tvaru

$$|\sphericalangle A_2A_1A_{k+1}| \leq |\sphericalangle A_2A_1A_k| + |\sphericalangle A_kA_1A_{k+1}|.$$

Pokud nyní necháme polopřímku A_1A_{k+1} rotovat kolem osy A_1A_k (tj. úhly na pravé straně nerovnosti se nemění), je vidět, že $|\sphericalangle A_2A_1A_{k+1}|$ nabývá maxima, právě když A_{k+1} leží v rovině $A_1A_2A_k$ vně úhlu $A_2A_1A_k$. Toto maximum je pak rovno pravé straně, pokud ta je menší nebo rovna $180°$, a menší než pravá strana, pokud ta je větší než $180°$.

Poznámky k došlým řešením: Tuto úlohu správně vyřešil pouze *Peter Černo*, dalších 6 řešitelů dostalo nenulový počet bodů, většinou za rovinné řešení. Většina řešitelů udělala několik zásadních chyb najednou. Nejčastější byly: Pořádně si nepřečetli zadání, protože bylo napsáno, že body leží v prostoru ($\mathbb{R}^3$) a ne v rovině ($\mathbb{R}^2$). Mysleli si, že uzavřená lomená čára v rovině je n-úhelník. Protipříklad: posloupnost bodů ($[0, 0]$, $[0, 1]$, $[1, 0]$, $[1, 1]$).

3. úloha (43, 29, 2.00, 3.0)

Označme α, β, γ vnitřní úhly ostroúhlého trojúhelníku ABC. Označme D bod v polorovině opačné k BCA takový, že $|\sphericalangle DBC| = 90° - \gamma$ a $|\sphericalangle DCB| = 90° - \beta$. Označme E bod v polorovině opačné k ACB takový, že $|\sphericalangle ECA| = 90° - \alpha$ a $|\sphericalangle EAC| = 90° - \gamma$. Označme F bod v polorovině opačné k ABC takový, že $|\sphericalangle FAB| = 90° - \beta$ a $|\sphericalangle FBA| = 90° - \alpha$. Dokažte, že se přímky AD, BE, CF protínají v jednom bodě.

Snadno spočítáme, že $|\sphericalangle ACD| = |\sphericalangle ACB| + |\sphericalangle BCD| = 90° - \beta + \gamma$, obdobně $|\sphericalangle ABD| = |\sphericalangle ABC| + |\sphericalangle CBD| = 90° + \beta - \gamma$, součet těchto dvou úhlů je tedy $180°$, což znamená, že čtyřúhelník $ABDC$ je tětivový, neboli body A, B, D, C leží v tomto pořadí na kružnici. Podle věty o obvodovém úhlu je $|\sphericalangle BAD| = |\sphericalangle BCD| = 90° - \beta$. Označme U průsečík úhlopříček, podle trojúhelníku UAB je $|\sphericalangle BUA| = 90°$, což znamená, že přímka AU, resp. AD, je výškou trojúhelníka na stranu BC. Analogicky je BE výškou na stranu AC a CF výškou na stranu AB. Dané tři přímky se tedy protínají v ortocentru (průsečíku výšek) trojúhelníku ABC.

4. úloha (40, 33, 3.00, 5.0)

Pro která k existuje n takové, že na přímce najdeme n bodů takových, že každé číslo z $1, \ldots, k$ je vzdáleností právě jedné dvojice z těchto n bodů?

Ukážeme, že takové n najdeme pro každé k, konkrétně bude $n = 2k$. Uvažujme na přímce body $A_1, \ldots, A_{2k}$ takové, že $A_{2i-1} = 3ki$ a $A_{2i} = 3ki + i$ pro $i \in \{1, \ldots, k\}$. Jistě platí $|A_{2i-1}A_{2i}| = i$, tedy máme vzdálenosti $1, \ldots, k$. Vezmeme-li si dva body netvořící takovýto pár, vidíme, že jejich vzdálenost je určitě větší než k, čímž dostáváme, že každé číslo z množiny $\{1, \ldots k\}$ je vzdáleností právě jedné dvojice bodů.

Poznámka: Rozmysli si, jak by vypadalo řešení, kdybychom navíc požadovali, aby se mezi body nevyskytovaly jiné vzdálenosti než $1, \ldots, k$.

Poznámky k došlým řešením: Ze zadání nám vypadl předpoklad, že se mohou vyskytovat pouze vzdálenosti 1, … k. Bez něj je úloha velmi snadná, stačí si vzít dvojice bodů vzdálené postupně od 1 do k a ty oddělit mezerou délky např. $k+1$ případně $\sqrt{2}$ (nikde nebylo řečeno, že vzdálenosti mají být celočíselné). Ti, kteří vyřešili i zamýšlenou verzi, si vysloužili $+2i$, našlo se však pár takových, kteří vyřešili jen tuto ztíženou, těm jsem byl nucen strhávat body, neboť získali jen konečnou množinu možných k.

5. úloha (28, 9, 1.00, 0.0)

V rovině je dáno nekonečně mnoho bodů, vzdálenost každých dvou je přirozené číslo. Ukažte, že všechny body leží na jedné přímce.

Úlohu dokážeme sporem.

Pro spor předpokládejme, že tři body A, B, C z dané množiny neleží na téže přímce (tedy tvoří trojúhelník). Označme $a = |BC|, b = |AC|$. Nyní uvažujme libovolný bod D z dané množiny. $|DA|$, $|DB|$, $|DC|$ jsou přirozená čísla, tedy $||DB| - |DC||$, $||DA| - |DC||$ jsou nezáporná celá čísla. Navíc podle trojúhelníkové nerovnosti je $||DB| - |DC|| \leq a$, $||DA| - |DC|| \leq b$. Tedy $||DB| - |DC|| \in \{0, 1, \cdots, a\}$, $||DA| - |DC|| \in \{0, 1, \cdots, b\}$. Množina bodů X takových, že $||XB| - |XC|| = k$, $k \in \{0, 1, \cdots, a\}$, je hyperbola (nebo její speciální případ - přímka), která je osově souměrná podle přímky BC a podle osy úsečky BC, avšak už není souměrná podle žádné jiné přímky. Tedy bod D leží nutně na jedné z $a+1$ takových hyperbol. Množina bodů Y takových, že $||YA| - |YC|| = l$, $l \in \{0, 1, \cdots, b\}$, je hyperbola (nebo její speciální případ - přímka), která je osově souměrná podle přímky AC a podle osy úsečky AC, avšak už není souměrná podle žádné jiné přímky, speciálně není souměrná podle přímky BC (ta není ani přímkou AC ani její osou), tedy je různá od jakékoliv hyperboly splňující $||XB| - |XC|| = k$. Tedy bod D leží nutně na jedné z $b + 1$ takových hyperbol $||YA| - |YC|| = l$. Každé dvě různé hyperboly se protínají nejvýše ve čtyřech bodech, a tak dostáváme nejvýše $4(a + 1)(b + 1)$ možných poloh bodu D. To je spor s faktem, že množina je nekonečná.

Poznámky k došlým řešením: Řešení úlohy mělo několik částí a mnoho z vás na některou z nich zapomnělo. Chybující nejčastěji předpokládali, že mezi zadanými body musí existovat nekonečně mnoho bodů ležících na společné přímce, a dále se zabývali jenom tímto případem. Uvědomte si, že to neplatí! Několik z vás také prohlásilo zadané body za mřížové, což bylo doufám jen momentální poblouznění – dvojice bodů s celočíselnou vzdáleností rozhodně nemusí mít celočíselné souřadnice a naopak. Autoři správných řešení většinou zvolili metodu „hrubá síla“, pro zadané body odvodili všelijaké vztahy a ty upravovali tak dlouho, až z nich vytloukli spor s nekonečností počtu bodů. Pouze několik použilo hyperboly jako ve vzorovém řešení. Nejhezčí řešení poslal *Vašek Cviček* a byl za to odměněn $+2i$.

6. úloha (41, 34, 3.00, 5.0)

Dokažte, že pro každé přirozené $n > 1$ platí

$$\sqrt{2} + \sqrt{4 - 2\sqrt{2}} + \cdots + \sqrt{2n - 2\sqrt{n(n-1)}} > \sqrt{n(n+1)}.$$

Představme si v rovině (kartézský) systém souřadnic a body A_0, A_1, … , A_n, kde bod A_i má souřadnice $[i, \sqrt{i}]$, body tedy leží na grafu funkce $y = \sqrt{x}$. Všimněme si, že vzdálenost bodů A_i a A_{i-1} je rovna $\sqrt{(i - (i-1))^2 + \left(\sqrt{i} - \sqrt{i-1}\right)^2} = \sqrt{2i - 2\sqrt{i(i-1)}}$, což je právě i-tý výraz na levé straně nerovnosti. Dále vzdálenost bodů A_0 a A_n je $\sqrt{n^2+(\sqrt{n})^2}=\sqrt{n(n+1)}$, což je výraz na pravé straně nerovnosti. Délka úsečky A_0A_n (výraz napravo) je zjevně kratší než délka lomené čáry $A_0A_1A_2\dots A_n$ (výraz nalevo)(přímá cesta je kratší než jakákoliv jiná) (body A_0, A_1, ..., A_n zjevně neleží na přímce (jsou na odmocnině)), čímž je daná nerovnost dokázána.

Poznámky k došlým řešením: Téměř všichni řešili problém matematickou indukcí, což vedlo na mnoho chyb při úpravách výrazů (minus body). Dva řešitelé se na to podívali skutečně jako na úlohu o bodech (viz autorské řešení) a byli za to odměněni ($+i$).

7. úloha (29, 8, 1.00, 0.0)

Najděte v rovině 13 různých bodů tak, že každé tři určují trojúhelník, jehož všechny vnitřní úhly jsou menší nebo rovny 150°.

Úlohu budeme řešit trochu intuitivně, přesný zápis by nebyl o mnoho těžší, nicméně by byl méně přehledný. Vyjděme z pravidelného dvanáctiúhelníku $A_1A_2A_3A_4B_1B_2B_3B_4C_1C_2C_3C_4$ (o straně délky 1). Prodlužme jeho strany A_4B_1, B_4C_1 a C_4A_1 na pro všechny stejnou velikost x, která je mnohem větší než 1 (dostaneme tak v podstatě jakýsi rovnoramenný trojúhelník se zaoblenými rohy). Označme S střed (těžiště) tohoto útvaru. Potom A_1, A_2, ..., C_4, S je oněch hledaných třináct bodů. Všechny vnitřní úhly $A_1A_2\dots C_4$ mají velikost (vzhledem k původnímu pravidelnému dvanáctiúhelníku) 150°, čili všechny trojúhelníky tvořené pomocí bodů $A_1, A_2, \dots, C_4$ mají úhly nanejvýš 150° (úhel u daného vrcholu trojúhelníku je menší nebo roven úhlu u téhož vrcholu dvanáctiúhelníku). Nyní zbývají už jen trojúhelníky obsahující S. Úhly u vrcholů, které jsou i vrcholy dvanáctiúhelníku, jsou opět menší nebo rovny 150°. Pro úhly u S máme dvě možnosti:

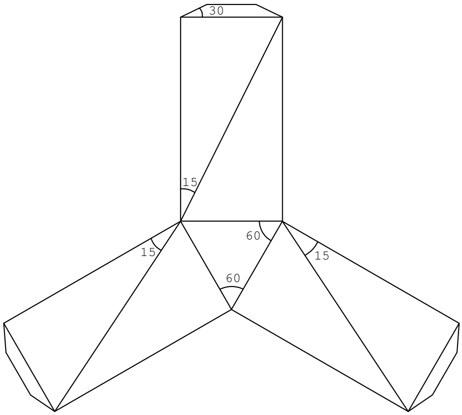
(i) Jedná se o úhel M_iSM_j, kde M je A, B nebo C , i a j je $1, 2, 3$ nebo 4 a $i \neq j$. Potom se zvětšujícím se x se velikost tohoto úhlu blíží nule, čili lze předpokládat, že pro dosti velké x je menší 150°.

(ii) Jedná se o úhel M_iSN_j, kde M,N je A, B nebo C ,$M \neq N$ a i a j je $1, 2, 3$ nebo 4. Potom se zvětšujícím se x se velikost tohoto úhlu blíží 120° (úhlu, který je u těžiště rovnostranného trojúhelníku), čili lze předpokládat, že pro dosti velké x je menší 150°.

Pozn.: Kdybychom chtěli zápis provést důkladně, mohli bychom například začít u rovnostranného trojúhelníku ABC (se středem S), na jeho stranách AB; BC; CA bychom poté definovali body A_4, B_1; B_4, C_1; C_4, A_1, tak že $|\sphericalangle XSX_i| = 15°$, potom by už stačilo doplnit $A_2, A_3, B_2, B_3, C_2, C_3$ tak, aby úhly u vrcholů $A_1A_2\dots C_4$ byly 150°, potom by už nebylo těžké ověřit, že všechny úhly jsou menší nebo rovny 150°.

Poznámky k došlým řešením: Mezi nesprávnými řešeními se nejčastěji vyskytovaly dva druhy chyb. Prvním druhem byla situace, kdy řešitelé dokazovali, že libovolný třináctiúhelník úlohu splňovat nemůže, ale neuvědomili si, že jejich řešení funguje pouze pro konvexní třináctiúhelníky. Dále se pak často vyskytovala situace, kdy řešitelé považovali za řešení dvanáctiúhelník se středem, ale neuvědomili si, že úloha zakazuje tři body ležící na téže přímce (mimochodem, kdybychom povolovali body na téže přímce, lze například 13 bodů ležících na jedné přímce považovat za řešení, což by byla poněkud jednoduchá úloha).

Mezi správnými řešeními mě nejvíce zaujal obrázek *Vaška Cvička*. Tento obrázek přikládám, je na něm rozmístěno 15 bodů. Můžete si však všimnout, že do tohoto obrázku lze umístit ještě jeden bod.



8. úloha (41, 28, 2.00, 3.0)

Uvnitř pravidelného čtyřbokého jehlanu s podstavnou hranou délky 20 a výškou 10 je umístěno 6543 bodů. Dokažte, že mezi nimi existují dva body, jejichž vzdálenost je menší nebo rovna 1.

Bohužel se nepodařilo úlohu úplně správně zadat, a tak odhady vychází o trochu lépe, než naznačuje zadání.

Označme A, B, C, D vrcholy podstavy jehlanu, V vrchol jehlanu, S střed podstavy jehlanu a M střed úsečky AB. Dále pro každou stěnu utvořme mimo jehlan rovinu rovnoběžnou s touto stěnou ve vzdálenosti $0,5$ cm od této stěny. Tyto roviny ohraničují (rozmyslete si - budiž vám napomocny osová souměrnost podle VS a rovinná podle VSM) nový pravidelný čtyřboký jehlan $A'B'C'D'V'$ se středem podstavy S' a bodem M' jako střed $A'B'$. $ABCDV$ je tedy uvnitř $A'B'C'D'V$. Pro začátek odhadněme objem jehlanu $A'B'C'D'V'$. Ještě si označme M'' průsečík přímky SM a stěny $A'B'V'$ (nakreslete si obrázek). Body V' a S' samozřejmě leží na přímce VS (tady stačí jen osová souměrnost podle VS). Dále trojúhelníky VSM a $V'SM''$ jsou stejnolehlé podle bodu S (VM a $V'M''$ jsou rovnoběžné, neboť se jedná o průsečnice dvou rovnoběžných rovin ABV a $A'B'V'$ a na ní kolmé (rovinná souměrnost podle VSM) roviny VSM). Dále ze zmiňované kolmosti plyne, že vzdálenost přímek VM a $V'M''$ je rovna vzdálenosti rovin ABV a $A'B'V'$, čili $0,5$ cm. Jelikož $|AB| = 20$ cm, je $|SM| = 10$ cm, čili VSM je rovnoramenný pravoúhlý trojúhelník s odvěsnami délky 10 cm, tedy jeho výška na přeponu má velikost $5\sqrt{2}$ cm, potom výška na přeponu (jemu podobného) trojúhelníku $V'SM''$ je o $0,5$ cm delší (vzdálenost přímek VM a $V'M''$), a tak odvěsny trojúhelníku $V'SM''$ mají délku $\sqrt{2}\left(5\sqrt{2}+0,5\right) = 10 + \frac{\sqrt{2}}{2}$. Dále trojúhelníky $V'SM''$ a $V'S'M'$ jsou podobné (SM'' a $S'M'$ jsou rovnoběžné), navíc přímka VS ($\equiv V'S'$) je výškou obou jehlanů, čili vzdálenost rovin ABC a $A'B'C'$ je vzdáleností bodů S a S', čím je $|V'S'| = |V'S| + 0,5 \text{ cm} = \frac{21+\sqrt{2}}{2}$ a samozřejmě $|S'M'| = |V'S'|$. Objem jehlanu $A'B'C'D'V$ je pak $\frac{|A'B'||A'C'||V'S'|}{3} = \frac{4|V'S'|^3}{3} < \frac{4 \cdot 12^3}{3} \text{ cm}^3 = 2304 \text{ cm}^3$.

Nakonec dokážeme úlohu sporem. Ke každému bodu uvnitř $ABCDV$ utvořme kouli o poloměru $0,5$ cm, jsou-li vzdálenosti libovolných dvou bodů větší než 1 cm, koule se nesmí protínat. Každá koule navíc leží uvnitř $A'B'C'D'V'$ (mají body vzdálené nejvýše $0,5$ cm od nějakého bodu

$ABCDV$). Objem jedné koule je $\frac{4}{3}\pi\frac{1}{2}^3$ cm^3 $= \frac{\pi}{6}$ cm^3 $> \frac{1}{2}$ cm^3, je-li takových koulí 6543, mají objem větší než 3271 cm^3, tedy nemohou se vejít do $A'B'C'D'V'$ o objemu menším 2304 cm^3. Spor!

Poznámky k došlým řešením: Většinou si řešitelé sestrojili kolem daných bodů koule s poloměrem 0,5 a zjistili, že jejich celkový objem je větší než objem nějakého zvětšeného jehlanu, do něhož by se měly vejít. Někteří si ale vzali příliš malý zvětšený jehlan, případně jehlan vůbec nezvětšovali a problémy s přesahujícími koulemi u stěn se pokoušeli řešit jinak (neúspěšně). Další početnou skupinu tvořili ti, kteří se pokoušeli umístit do jehlanu co nejvíce bodů, aby vzdálenost libovolných dvou byla větší než 1 (příp. větší nebo rovna 1). Většinou sestrojili nějaké „ideální“ rozmístění, jenže už nedokázali, že nemůže existovat jiné „ideálnější“ rozmístění – tedy rozmístění s větším počtem bodů v jehlanu.