# 4. série

**Téma:** Svět za zrcadlem

**Termín odeslání:** 6. LEDNA 2003

1. ÚLOHA (3 BODY)

Palindromem rozumějme takové přirozené číslo, které se ve svém desítkovém zápisu čte zepředu i zezadu stejně (tedy např. 1, 2002, 2002002). Zjistěte, pro která přirozená $m$, $n$, $m \leq n$ existují palindromy délek $m$ a $n$ takové, že palindrom délky $n$ je dělitelný palindromem délky $m$.

2. ÚLOHA (3 BODY)

Určete, kolik rovin symetrie má krychle.

3. ÚLOHA (3 BODY)

Je dán ostroúhlý trojúhelník $ABC$, označme $S$ střed kružnice jemu opsané. Dále označme $S_A$, $S_B$, $S_C$ obrazy bodu $S$ v zrcadlení (osové souměrnosti) podle přímek $BC$, $CA$, $AB$. Dokažte, že trojúhelník $S_A S_B S_C$ je ostroúhlý.

4. ÚLOHA (5 BODŮ)

Alenka stojí na šachovnici o rozměrech $2002 \times 2002$, jejíž políčka jsou nějak obarvena černou a bílou barvou. Ve středu se nachází bodové invertující zrcadlo, políčka souměrná podle středu mají proto opačnou barvu. Navíc si Alenka spočítala, že vezme-li libovolný řádek či sloupec, počty černých a bílých políček se vždy rovnají. Je Alenka bystrá počtářka, nebo se přepočítala?

5. ÚLOHA (5 BODŮ)

V rovině je dán kartézský systém souřadnic a podél přímky $x = 0$ je umístěno invertující zrcadlo. Body roviny jsou obarveny černě nebo bíle (a nijak jinak) tak, že body $[x, y]$ a $[-x, y]$ mají opačnou barvu. Zjistěte, zda může existovat vektor různoběžný se zrcadlem takový, že pokud posuneme libovolný bod $A$ o tento vektor na bod $B$ a pokud $A$ ani $B$ není bodem zrcadla, potom $A$ i $B$ mají stejnou barvu.

6. ÚLOHA (5 BODŮ)

Je dán ostroúhlý trojúhelník $ABC$. Sestrojte trojúhelník $KLM$ takový, že $K \in BC$, $L \in CA$, $M \in AB$ a trojúhelník $KLM$ má minimální obvod.

7. ÚLOHA (5 BODŮ)

Na množině přirozených čísel je definována funkce $f$ následujícím způsobem:

$$f(1) = 1, \quad f(3) = 3, \quad f(2n) = f(n),$$

$$f(4n+1) = 2f(2n+1) - f(n), \quad f(4n+3) = 3f(2n+1) - 2f(n)$$

pro každé přirozené $n$. Určete počet přirozených čísel $n$ nepřevyšujících 2002, pro něž $f(n) = n$.

8. ÚLOHA (5 BODŮ)

Nad stranami trojúhelníku $ABC$ sestrojme obdélníky $ABB_1A_1$, $BCC_1B_2$ a $CAA_2C_2$. Dokažte, že osy úseček $A_1A_2$, $B_1B_2$ a $C_1C_2$ se protínají v témže bodě.

# Řešení 4. série

**1. úloha**

Palindromem rozumějme takové přirozené číslo, které se ve svém desítkovém zápisu čte zepředu i zezadu stejně (tedy např. 1, 2002, 2002002). Zjistěte, pro která přirozená $m$, $n$, $m \le n$ existují palindromy délek $m$ a $n$ takové, že palindrom délky $n$ je dělitelný palindromem délky $m$.

Úloha je velmi jednoduchá, stačí pro libovolná $m$, $n$, $m \le n$ najít vhodné palindromy.

Volme například palindrom délky $m$ jako $p_m = \underbrace{11\cdots1}_{m}$ a palindrom délky $n$ jako $p_n = (10^{n-m}+1)\,p_m$. Odtud je zřejmé, že $p_m$ dělí $p_n$. Navíc $p_m$ je palindrom délky $m$. Stačí tedy ověřit, že $p_n$ je palindrom délky $n$. $p_n = (10^{n-m}+1)\,p_m = \underbrace{11\cdots1}_{m}\underbrace{00\cdots0}_{n-m} + \underbrace{11\cdots1}_{m}$. Budeme-li tato dvě čísla sčítat pod sebou, budeme sčítat pouze jedničky a nuly, tedy dostaneme nejvýš dvojky, a tak nebudeme přesahovat řády. Tedy $p_n$ má délku $n$. Nyní si už stačí uvědomit, že je palindrom, ovšem číslo $\underbrace{11\cdots1}_{m}$ je pozpátku číslo $\underbrace{11\cdots1}_{m}\underbrace{00\cdots0}_{n-m}$, tedy když nebudeme při sčítání přeskakovat řády, dostaneme stejný výsledek, ať tato čísla budeme sčítat odpředu i odzadu, tedy palindrom.

Poznámky k došlým řešením: Úloha byla velmi jednoduchá a navíc jsem se ji rozhodl hodnotit mírně, tedy téměř všichni dostali 3 body. Všechna správná řešení byla podobná autorskému, a tak jsem žádné kladné imaginární body nerozdával.

**2. úloha**

Určete, kolik rovin symetrie má krychle.

Nejprve roviny najdeme, pak ukážeme, že jsme na žádnou nezapomněli.

První tři roviny, které najdeme, budou roviny procházející středem krychle, které jsou rovnoběžné s některou ze stěn krychle (tyto roviny jsou tři, neboť krychle obsahuje tři dvojice rovnovnoběžných stěn).

Dalších šest rovin určeme dvojicemi protilehlých hran krychle (krychle má 6 dvojic protilehlých hran).

Je velmi snadné nahlédnout, že všech těchto 9 (různých) rovin jsou rovinami symetrie krychle. Nyní zbývá dokázat, že jsme na žádnou rovinu nezapomněli.

Označme $\rho$ nějakou rovinu symetrie. Rozlišme dva případy:

(a) Existuje stěna $\alpha$ krychle, se kterou je $\rho$ rovnoběžná. Protože je stěna $\alpha$ rovnoběžná se sobě protilehlou stěnou $\alpha'$ a žádnou jinou, musí rovina $\rho$ zobrazovat stěnu $\alpha$ na $\alpha'$ (stěna se musí opět zobrazit na stěnu, protože je $\alpha$ rovnoběžná s $\rho$, musí se zobrazit na stěnu rovnoběžnou, ale nesmí se zobrazit na sebe sama, jinak by se $\alpha'$ neměla kam zobrazit), což znamená, že $\rho$ prochází středem krychle. Tedy $\rho$ se nachází mezi prvními třemi rovinami, čím jsme na ni nezapomněli.

(b) S žádnou ze stěn krychle není $\rho$ rovnoběžná. V krychli najdeme trojici navzájem kolmých stěn, tedy alespoň na jednu z těchto stěn není $\rho$ kolmá, označme takovou stěnu $\beta$. $\rho$ a $\beta$ jsou různoběžné, tedy se protínají v přímce $p$, navíc nejsou ani kolmé, tedy $\beta$ se v symetrii podle $\rho$

zobrazí na stěnu $\gamma \neq \beta$, speciálně $p \in \rho$, tedy $p$ se zobrazí na sebe, a tak $p \in \gamma$. To znamená, že roviny (určené) $\beta$ a $\gamma$ mají společnou přímku $p$, která je nutně hranou krychle ($\gamma \neq \beta$). $\rho$ je osa těchto stěn, což je právě rovina určená hranou ležící na přímce $p$ a hranou protilehlou. Tedy ani v tomto případě jsme na $\rho$ nezapomněli.

Poznámky k došlým řešením: Téměř žádné z došlých řešení nebylo úplně správné. Jejich autoři se s oblibou dopouštěli malých podvodů, nekorektností a jiných ošklivostí. Myšlenku z vzorového řešení nepoužil nikdo, mnozí z vás pouze vyjmenovali několik rovin symetrie, spočítali je a prohlásili, že jich je tolik a tolik. Tím ale pochopitelně nedokázali, že jich nemůže být víc! To, že jste jich víc nenašli, vůbec nic neznamená, bylo by to jako tvrdit: „Nemůžu najít svou peněženku, asi neexistuje.“

Pokusy o důkaz se opíraly nejčastěji o počet os symetrie čtverce a souvislost s rovinami symetrie krychle nebo o rozbor možností, kam se mohou zobrazit dva pevně zvolené body.

**3. úloha**

Je dán ostroúhlý trojúhelník $ABC$, označme $S$ střed kružnice jemu opsané. Dále označme $S_A$, $S_B$, $S_C$ obrazy bodu $S$ v zrcadlení (osové souměrnosti) podle přímek $BC$, $CA$, $AB$. Dokažte, že trojúhelník $S_A S_B S_C$ je ostroúhlý.

Označme $S_{BC}$, $S_{CA}$, $S_{AB}$ po řadě středy stran $BC$, $CA$, $AB$. Střed kružnice opsané leží na ose úsečky $BC$ (ta prochází bodem $S_{BC}$), protože je kolmá na stranu, leží na ní i bod $S_A$. Vzhledem k tomu, že $S_{BC}$ leží také na $BC$, ose souměrnosti $S$ a $S_A$, je $S_{BC}$ středem úsečky $SS_A$. Obdobně je $S_{AC}$ středem $SS_B$. Čili $S_{BC}S_{AC}$ je střední příčka v trojúhelníku $SS_AS_B$, čím je $|S_AS_B| = 2|S_{BC}S_{AC}|$. Nicméně $S_{BC}S_{AC}$ je střední příčka i v trojúhelníku $ABC$, odkud $|AB| = 2|S_{BC}S_{AC}| = |S_AS_B|$. Obdobně $|BC| = |S_BS_C|$, $|AC| = |S_AS_C|$, čím jsou trojúhelníky $ABC$ a $S_AS_BS_C$ shodné, a tak je trojúhelník $S_AS_BS_C$ ostroúhlý.

Poznámky k došlým řešením: Úloha patrila obtiažnosťou medzi tie ľahšie. Väčšina riešení sa podobala vzorovému. U niektorých riešiteľov mi chýbal obrázok.

**4. úloha**

Alenka stojí na šachovnici o rozměrech $2002 \times 2002$, jejíž políčka jsou nějak obarvena černou a bílou barvou. Ve středu se nachází bodové invertující zrcadlo, políčka souměrná podle středu mají proto opačnou barvu. Navíc si Alenka spočítala, že vezme-li libovolný řádek či sloupec, počty černých a bílých políček se vždy rovnají. Je Alenka bystrá počtářka, nebo se přepočítala?

Všechny Alenčiny příznivce musíme zklamat, Alenka se tentokráte přepočítala. Zaveďme si souřadnicový systém se středem ve středu šachovnice, ta se nám tak rozpadne na čtyři kvadranty o rozměrech $1001 \times 1001$, kvadranty označme první až čtvrtý, jak je běžné, počet bílých políček v $i$-tém kvadrantu označme $b_i$, černých $c_i$. Je $b_1 + c_1 = 1001^2$, tedy $b_1 \neq c_1$, BÚNO $c_1 > b_1$. Podle toho, co si Alenka spočítala, musí platit $c_1 + c_2 = b_1 + b_2$ (sečtení rovností pro jednotlivé řádky „nad osou x“), tedy dostáváme $c_2 < b_2$. Dále ve středu je invertující zrcadlo, proto $c_3 = b_1$ a $b_3 = c_1$, tudíž $c_3 < b_3$. Celkově dostáváme, že $c_2 + c_3 < b_2 + b_3$. Pokud by ale Alenka počítala správně, tyto výrazy by se musely rovnat. Vidíme, že musela někde udělat chybu.

Poznámky k došlým řešením: Nejčastější chybou bylo, že řešitelé zapomněli na nějakou podmínku, kterou Alenka vypozorovala, a našli tak obarvení, jež chybně prohlásili za správné, obvykle to bylo opomenutí či špatná interpretace invertujícího zrcadla. Druhá skupina špatných řešení se opírala o netriviální tvrzení, která jejich autor nedokázal, často ani neplatila. Správná řešení pak byla většinou podobná autorskému, originální postupy si vysloužily imaginární body.

**5. úloha**

V rovině je dán kartézský systém souřadnic a podél přímky $x = 0$ je umístěno invertující zrcadlo. Body roviny jsou obarveny černě nebo bíle (a nijak jinak) tak, že body $[x, y]$ a $[-x, y]$ mají opačnou barvu. Zjistěte, zda může existovat vektor různoběžný se zrcadlem takový, že pokud posuneme libovolný bod $A$ o tento vektor na bod $B$ a pokud $A$ ani $B$ není bodem zrcadla, potom $A$ i $B$ mají stejnou barvu.

Zde je potřeba dodat, že body zrcadla neobarvujeme - takové body by totiž musely mít obě barvy - omlouváme se za jemnou nepřesnost v zadání. Takové obarvení lze nalézt. Například pokud černě obarvíme body $[x, y]$ takové, že $\lceil x\rceil + \lceil y\rceil$ je sudé pro $x$ kladné, $\lfloor x\rfloor + \lceil y\rceil$ je liché pro $x$ záporné, ostatní body bíle a budeme uvažovat vektor $(1, 1)$. Zde $\lceil z\rceil$ značí horní celou část čísla $z$, tj. nejmenší celé číslo, které je větší rovno $z$, $\lfloor z\rfloor$ značí dolní celou část čísla $z$, tj. největší celé číslo, které je menší rovno $z$.

Nejprve ukážeme, že body $[x, y]$ a $[-x, y]$ mají opačnou barvu. Můžeme předpoklát, že $x > 0$ (body s $x = 0$ neobarvujeme, pro body s $x < 0$, provedeme tentýž důkaz s $-x$).

Je-li $[x, y]$ černý, potom je $\lceil x\rceil + \lceil y\rceil$ sudé. Dále si uvědomme, že čísla $\lceil x\rceil$ a $\lfloor -x\rfloor$ mají stejnou paritu (vlastnost býti sudý): je-li $x$ celé, potom $\lceil x\rceil = x$, $\lfloor -x\rfloor = -x$ a $x$ a $-x$ mají stejnou paritu, je-li $x = k + r$ ($k$ celé, $r \in (0, 1)$), potom $\lceil x\rceil = k + 1$, $\lfloor -x\rfloor = -k - 1$ a čísla $k + 1$ a $-(k + 1)$ mají stejnou paritu. Tím ($\lceil x\rceil + \lceil y\rceil$ je sudé) je i $\lfloor -x\rfloor + \lceil y\rceil$ sudé, $-x < 0$, čím je bod $[-x, y]$ černý.

Je-li $[x, y]$ bílý, provedeme tentýž důkaz jako v předchozím odstavci, pouze zaměníme slůvka sudý, lichý a bílý, černý.

Nyní ukážeme, že se posouváním o vektor $(1, 1)$ barva nemění (pokud vzor či obraz není na zrcadle).

Je-li $[x, y]$, $x < -1$, potom pro $[x + 1, y + 1]$ je $(x + 1) < 0$. Potom $\lfloor x + 1\rfloor + \lceil y + 1\rceil = \lfloor x\rfloor + 1 + \lceil y\rceil + 1 = \lfloor x\rfloor + \lceil y\rceil + 2$ (první úpravu si rozmyslete z definice horní (resp. dolní) celé části). Tedy $\lfloor x + 1\rfloor + \lceil y + 1\rceil$ i $\lfloor x\rfloor + \lceil y\rceil$ mají tutéž paritu, tedy i barvu.

Je-li $[x, y]$, $x = -1$, potom je $[x + 1, y + 1]$ na zrcadle - tyto body nás tedy nezajímají.

Je-li $[x, y]$, $x \in (-1, 0)$, potom pro $[x + 1, y + 1]$ je $(x + 1) > 0$, přesněji $(x + 1) \in (0, 1)$. Tedy je potřeba dokázat, že $\lfloor x\rfloor + \lceil y\rceil$ a $\lceil x + 1\rceil + \lceil y + 1\rceil$ mají opačnou paritu: $\lceil x + 1\rceil + \lceil y + 1\rceil = 1 + \lceil y\rceil + 1 = -1 + \lceil y\rceil + 3 = \lfloor x\rfloor + \lceil y\rceil + 3$, tedy mají opačnou paritu.

Je-li $[x, y]$, $x = 0$, potom je $[x, y]$ na zrcadle - tyto body nás tedy nezajímají.

Je-li $[x, y]$, $x > 0$, potom pro $[x + 1, y + 1]$ je $(x + 1) > 0$. Potom $\lceil x + 1\rceil + \lceil y + 1\rceil = \lceil x\rceil + 1 + \lceil y\rceil + 1 = \lceil x\rceil + \lceil y\rceil + 2$ Tedy $\lceil x + 1\rceil + \lceil y + 1\rceil$ i $\lceil x\rceil + \lceil y\rceil$ mají tutéž paritu, tedy i barvu.

Tím je dokázáno vše, co bylo potřeba.

**6. úloha**

Je dán ostroúhlý trojúhelník $ABC$. Sestrojte trojúhelník $KLM$ takový, že $K \in BC$, $L \in CA$, $M \in AB$ a trojúhelník $KLM$ má minimální obvod.

Představme si, že máme nějaký takový trojúhelník $KLM$ narýsovaný. Zobrazme bod $K$ v zrcadlení (osové souměrnosti) podle $AB$ na bod $K'$. Tím, že jsou úhly $ABC$ i $BAC$ ostré, protne úsečka $K'L$ úsečku $AB$. Označme $M'$ jejich průsečík. Je-li $M' \neq M$, potom:

$$|KM| + |ML| = |K'M| + |ML| > |K'M'| + |M'L| = |KM'| + |M'L|.$$

Při první a třetí úpravě jsme využili zrcadlení podél $AB$, při druhé jsme využili trojúhelníkové nerovnosti. Odtud plyne, že trojúhelník $KLM'$ má menší obvod než $KLM$, a tak aby měl $\Delta KLM$ minimální obvod, musí $M = M'$, neboli $|\sphericalangle KMB| = |\sphericalangle LMA|$. Z obdobných důvodů: $|\sphericalangle BKM| = |\sphericalangle CKL|$, $|\sphericalangle CLK| = |\sphericalangle ALM|$.

Označme: $\alpha = |\sphericalangle BAC|$, $\beta = |\sphericalangle ABC|$, $\gamma = |\sphericalangle BCA|$, $\delta = |\sphericalangle MKB| = |\sphericalangle LKC|$, $\varepsilon = |\sphericalangle KLC| = |\sphericalangle ALM|$, $\varphi = |\sphericalangle AML| = |\sphericalangle NMK|$.

Potom:

$$(1)\Delta ALM : \alpha + \varepsilon + \varphi = 180^\circ,$$
$$(2)\Delta BKM : \beta + \delta + \varphi = 180^\circ,$$
$$(3)\Delta CKL : \gamma + \delta + \varepsilon = 180^\circ,$$
$$(4)\Delta ABC : \alpha + \beta + \gamma = 180^\circ,$$

$$(1) + (2) - (3) - (4) : -2\gamma + 2\varphi = 0^\circ,$$
$$\varphi = \gamma,$$
$$(1) - (2) + (3) - (4) : \varepsilon = \beta,$$
$$-(1) + (2) + (3) - (4) : \delta = \alpha.$$

Uvědomme si, že tuto rovnost může splňovat nejvýše jedna trojice bodů $KLM$. Splňují-li tuto rovnost dvě trojice $KLM$ a $K'L'M'$ ($X$ a $X'$ jsou na téže straně $\Delta ABC$), můžeme BÚNO (bez újmy na obecnosti) předpokládat, že $K \neq K'$ (cyklická zaměnitelnost $K$, $L$, $M$, resp. $K'$, $L'$, $M'$), dále můžeme BÚNO předpokládat, že $|BK| > |BK'|$ (symetrie $K$, $K'$). Potom ($\Delta BKM$ a $\Delta BK'M'$ jsou podobné, neboť mají shodné úhly) $|BM| > |BM'|$. Odtud $|CK| < |CK'|$, $|AM| < |AM'|$. Potom $|CL| < |CL'|$, $|AL| < |AL'|$ ($\Delta AML$ a $\Delta AM'L'$ jsou podobné a $\Delta CKL$ a $\Delta CK'L'$ jsou podobné). Tedy $|AC| = |AL| + |CL| < |AL'| + |CL'| = |AC|$, spor.

V závěru označme $P_A$, $P_B$, $P_C$ paty výšek spuštěných z bodů $A$, $B$, $C$ na protilehlé strany $\Delta ABC$. $|\sphericalangle CBP_B| = 90^\circ - \gamma$, dále body $C$, $P_B$, $P_C$ a $B$ leží (v tomto pořadí) na Thaletově kružnici nad průměrem $BC$. Odtud podle věty o obvodovém úhlu $|\sphericalangle CP_CP_B| = |\sphericalangle CBP_B| = 90^\circ - \gamma$, a tak $|\sphericalangle P_BP_CA| = \gamma$. Obdobně se spočítají i ostatní úhly u $P_A$, $P_B$, $P_C$, potom dostáváme, že právě body $P_A$, $P_B$, $P_C$ jsou hledanými body $K$, $L$, $M$. Paty výšek je pak už lehké zkonstruovat. Toť vše.

Pokud jste dávali při řešení pečlivě pozor, zajisté jste zjistili, že jsme se dopustili drobného podvodu. Dokázali jsme, že má-li $KLM$ minimální obvod, potom se nutně jedná o trojúhelník tvořený patami výšek. Nicméně jsme nedokázali, že trojúhelník s minimálním obvodem existuje. Pro ty, co znají pojem spojité funkce a kompaktní množiny, to lze vyřešit například tak, že množina bodů $K$, $L$, $M$, $K \in BC$, $L \in AC$, $M \in AB$ (včetně krajů) je kompaktní, funkce přiřazující těmto bodům obvod je spojitá a spojitá funkce na kompaktu nabývá svého minima. Potom už jen stačí ověřit, že toto minimum není na krajích, tedy že $K$, $L$, $M \neq A$, $B$, $C$.

Poznámky k došlým řešením: Rozhodl jsem se úlohu hodnotit přísně. Strhával jsem 1 bod za chybějící konstrukci a jeden bod za chybějící důkaz existence minima v případě, že řešitel ukázal, že ke každému trojúhelníku kromě trojúhelníka tvořeného patami výšek existuje trojúhelník s menším obvodem, a usoudil z toho, že trojúhelník tvořený patami výšek má nejmenší obvod. Tomuto problému bylo možné se vyhnout nalezením minima pro pevné $K$ (zrcadlením $K$ podle $AB$ a $AC$ zjistíme, že minimálním obvodem je délka spojnice obrazů $K_1$, $K_2$) a následné minimalizování vzdálenosti přes $K$ probíhající úsečku $BC$ (s využitím faktu, že trojúhelníky $K_1AK_2$ jsou si navzájem podobné pro všechna $K$).

**7. úloha**

Na množině přirozených čísel je definována funkce $f$ následujícím způsobem:

$$f(1) = 1, \quad f(3) = 3, \quad f(2n) = f(n),$$

$$f(4n+1) = 2f(2n+1) - f(n), \quad f(4n+3) = 3f(2n+1) - 2f(n)$$

pro každé přirozené $n$. Určete počet přirozených čísel $n$ nepřevyšujících 2002, pro něž $f(n) = n$.

Pokud si napíšeme prvních pár členů funkce, může nás napadnout myšlenka, že funkce přiřazuje číslu $k$ číslo $l$, kdy v dvojkovém zápise je číslo $l$ za zrcadlem (pozpátku) zapsané číslo $k$.

Nyní tuto myšlenku dokážeme. Pro začátek $f(2) = f(2 \cdot 1) = f(1)$. Dále dokážeme tvrzení indukcí podle $k \in \mathbb{N}$ (v indukčním kroku předpokládáme, že tvrzení platí pro všechna $j \in \mathbb{N}, j < k$).

(I) Pro $k = 1, 2, 3$ tedy tvrzení platí.

(II) Pro $k \geq 4$ platí jedna z následujících možností:

1. $k$ je sudé, potom $k = 2n$ a $f(k) = f(2n) = f(n)$. Zde je z indukčního předpokladu $f(n)$ číslo $n$ zapsané v dvojkové soustavě pozpátku. Jenže $2n$ je v dvojkovém zápise číslo $n$, na jehož konec je zapsaná nula. Napíšeme-li $2n$ pozpátku, nula na začátku nás nezajímá a dostaneme číslo $n$ pozpátku, tedy číslo $f(n) = f(2n)$, což jsme chtěli dokázat.
2. $k$ je liché, $k = 4n + 1$. Potom $f(k) = f(4n+1) = 2f(2n+1) - f(n)$. Zapišme $n$ v dvojkovém zápise jako:[1]

   $$n = \overline{a_1 a_2 \cdots a_x},$$

   potom

   $$k = 4n + 1 = \overline{a_1 a_2 \cdots a_x 01},$$

   $$2n + 1 = \overline{a_1 a_2 \cdots a_x 1}.$$

   Z indukčního predpokladu:

   $$f(n) = \overline{a_x a_{x-1} \cdots a_1},$$

   $$f(2n+1) = \overline{1 a_x a_{x-1} \cdots a_1},$$

   $$2f(2n+1) = \overline{1 a_x a_{x-1} \cdots a_1 0} = 2^{x+1} + 2f(n),$$

   $$f(k) = f(4n+1) = 2f(2n+1) - f(n) = 2^{x+1} + f(n) = \overline{10 a_x a_{x-1} \cdots a_1},$$

   což je to, co jsme chtěli dokázat.
3. $k$ je liché, $k = 4n + 3$. Potom $f(k) = f(4n+3) = 3f(2n+1) - 2f(n)$. Zapišme $n$ v dvojkovém zápise jako

   $$n = \overline{a_1 a_2 \cdots a_x},$$

[1] Zápis $\overline{x_1 x_2 \cdots x_k}$ značí, že cifry $x_1, x_2, \cdots, x_k$ zapisujeme za sebe a tvoříme z nich číslo v příslušné soustavě (v tomto případě dvojkové). Tedy např. pro $a = b = 1, c = 0$ je $\overline{abc} = 110$.

potom

$$k = 4n + 2 = \overline{a_1 a_2 \cdots a_x 11},$$

$$2n + 1 = \overline{a_1 a_2 \cdots a_x 1}.$$

Z indukčního predpokladu:

$$f(n) = \overline{a_x a_{x-1} \cdots a_1},$$

$$f(2n + 1) = \overline{1 a_x a_{x-1} \cdots a_1},$$

$$2f(2n + 1) = \overline{1 a_x a_{x-1} \cdots a_1 0} = 2^{x+1} + 2f(n),$$

$$f(k) = f(4n + 3) = 3f(2n + 1) - 2f(n) = 2^{x+1} + f(2n + 1) = \overline{11 a_x a_{x-1} \cdots a_1},$$

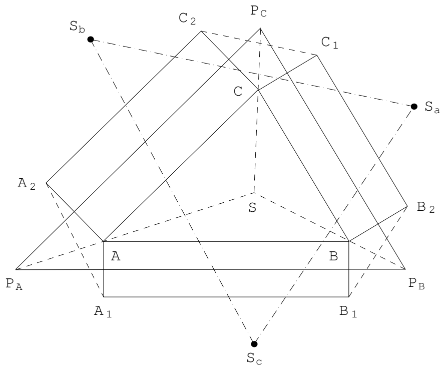
což je to, co jsme chtěli dokázat.

Tedy čísla, pro která je $f(n) = n$, jsou palindromy ve dvojkové soustavě. Hledáme jen ty, pro které je $n \le 2002$. Za tímto účelem si převeďme 2002 do dvojkové soustavy: $2002 = 1024 + 978 = 2^{10} + 512 + 466 = 2^{10} + 2^9 + 256 + 210 = 2^{10} + 2^9 + 2^8 + 128 + 82 = 2^{10} + 2^9 + 2^8 + 2^7 + 64 + 18 = 2^{10} + 2^9 + 2^8 + 2^7 + 2^6 + 16 + 2 = 2^{10} + 2^9 + 2^8 + 2^7 + 2^6 + 2^4 + 2^1$. Tedy 2002 lze v dvojkové soustavě napsat jako 11111010010. Palindromy délky menší rovné deseti jsou všechny menší než 11111010010. Přitom pro $j \in \mathbb{N}$ je počet palindromů (v dvojkové soustavě) délky $2j - 1$ roven počtu palindromů délky $2j$ je $2^{j-1}$. (První cifra musí být jednička, pro následujících $(j - 1)$ cifer máme pro každou dvě možnosti, jak ji zvolit. Zbývající cifry jsou jednoznačně určeny z vlastnosti palindromu.) Tedy do délky 10 máme $2^0 + 2^0 + 2^1 + 2^1 + 2^2 + 2^2 + 2^3 + 2^3 + 2^4 + 2^4 = 62$ možností. Pro délku jedenáct nemůže být prvních pět cifer jednička (jinak dostaneme číslo větší rovné $11111011111 > 11111010010$). Tím nám vypadnou dva palindromy 11111011111 a 11111111111. Naopak, není-li prvních pět cifer jednička, dostaneme číslo menší než $11111000000 < 11111010010$, tedy ostatní palindromy délky jedenáct požadovanou nerovnost splňují, tedy pro délku jedenáct vyhovuje $2^5 - 2 = 30$ palindromů. Pro délku větší rovnou dvanácti jsou palindromy už větši než 11111010010. Tedy počet hledaných hodnot je 92.

## 8. úloha

Nad stranami trojúhelníku $ABC$ sestrojme obdélníky $ABB_1A_1$, $BCC_1B_2$ a $CAA_2C_2$. Dokažte, že osy úseček $A_1A_2$, $B_1B_2$ a $C_1C_2$ se protínají v témže bodě.

Označme osy úseček $BB_2$, $AA_2$ a $AA_1$ po řadě $o_A, o_B, o_C$, jejich průsečíky $P_A, P_B, P_C$ ($P_X \notin o_X$). Tedy trojúhelníky $ABC$ a $P_AP_BP_C$ mají rovnoběžné strany a $ABC$ je uvnitř $P_AP_BP_C$. Potom se $\overleftrightarrow{AP_A}$, $\overleftrightarrow{BP_B}$ a $\overleftrightarrow{CP_C}$ protínají v témže bodě $S$ (uvnitř $ABC$) (když zvolíme $S$ jako průsečík přímek $AP_A$, $BP_B$, potom využitím stejnolehlosti se středem v $S$ leží $S$ i na $CP_C$). Označme dále $S_A$, $S_B$, $S_C$ po řadě obrazy bodu $S$ v zrcadlení (osové souměrnosti) podél $o_A$, $o_B$, $o_C$. Body $P_A, A_2, S_B$ leží na téže přímce, neboť jejich obrazy v zrcadlení podél $o_B$ (totiž body $P_A$, $A$, $S$) leží na jedné přímce. Podobně $P_A$, $A_1$, $S_C$ leží na téže přímce. Vzhledem k tomu, že $|P_AA_2| = |P_AA| = |P_AA1|$, $|P_AS_B| = |P_AS| = |P_AS_C|$, jsou trojúhelníky $A_1A_2P_A$ a $S_CS_BP_A$ rovnoramenné, čili $A_1A_2S_BS_C$ je rovnoramenný lichoběžník. Tudíž osy úseček $A_1A_2$ a $S_CS_B$ splývají. Obdobně splývají i osy $B_1B_2$ a $S_CS_A$ či $C_1C_2$ a $S_AS_C$. Tím jsou zkoumané osy shodné s osami trojúhelníku $S_AS_BS_C$, čili se protínají v jednom bodě.




Poznámky k došlým řešením: Zrcadlo v úloze nenašel bohužel vůbec nikdo. Z došlých řešení se mi nejvíce líbila myšlenka posunout trojúhelníky $AA_1A_2$, $BB_1B_2$, $CC_1C_2$ rovnoběžně s osami tak, aby splynuly posunuté body $A$, $B$, $C$. Potom průsečík os přešel v průsečík os stran trojúhelníku, který vznikl ze zmiňovaných posunutých trojúhelníků. Tady už si stačilo uvědomit, že body $A$, $B$, $C$ lze posunout rovnoběžně s osami do jednoho společného bodu, na což stačila sinová věta. Za tuto myšlenku jsem uděloval $+i$. Naopak za kartézský systém souřadnic jsem imaginární bod(y) strhával.