✉ *Korespondenční seminář, KAM MFF UK, Malostranské náměstí 25, 118 00 Praha 1* ✉

5th series

Topic: Sequences

Date due: February 17, 2003

PROBLEM 1 (3 POINTS)

Write the set of all odd composite positive integers less than 100 as a union of three (not necessarily disjoint) arithmetic sequences.

PROBLEM 2 (3 POINTS)

Prove or disprove the following statement: There exists a nonempty set M of positive integers and a sequence $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ such that for every $n \in M$ is $a_n \in M$ and $a_n = a_{a_n} + 1$.

PROBLEM 3 (3 POINTS)

Let $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ be a sequence satisfying the following recurrent formula:

$$a_1 = 2, \quad a_{n+1} = a_n^2 - a_n + 1.$$

Prove that every two different terms of the sequence (a_n) are relatively prime.

PROBLEM 4 (5 POINTS)

Let the sequence $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ be given by the following recurrent formula:

$$\begin{aligned} &a_0 = 3,\ a_1 = 4,\ a_2 = 167, \\ &a_n = 2003a_{n-1} - a_{n-2} + 174,\ n = 3, 4, 5, \dots \end{aligned}$$

Find all indices k such that a_k is a prime.

PROBLEM 5 (5 POINTS)

Let S be a set of finitely many sequences $(a_k)_{k=1}^{\infty}$ of positive integers. Prove that there exist positive integers $m \neq n$ such that for every sequence $(a_k)_{k=1}^{\infty} \in S$ the inequality $a_m \geq a_n$ holds.

PROBLEM 6 (5 POINTS)

Prove or disprove the following statement: The sequence $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ is periodic if and only if there exists a positive integer T such that for every $m \in \{0, 1, 2, \dots\}$ the sequence $(a_{m+n^2})_{n=1}^{\infty}$ is periodic with some period $t < T$.

PROBLEM 7 (5 POINTS)

Let $c(i)$ denote the sum of the digits of the number i. Find all positive integers k such that the sequence $a_n = \frac{c(n)}{c(kn)}$ is bounded.

PROBLEM 8 (5 POINTS)

For a positive integer n let $j(n)$ denote the (unique) number satisfying the inequalities $(j(n)+1)! > n \geq j(n)!$. Consider the sequence $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ defined as follows:

$$a_0 = 1,\ a_1 = 0,$$

$$a_n = \left(j(n) - \left\lfloor \frac{n}{(j(n))!} \right\rfloor\right)(j(n))! + a_{\left\{\frac{n}{(j(n))!}\right\}(j(n))!},\ n = 2, 3, 4, \ldots$$

Determine the maximal value of $|n - a_n|$ for $n \leq 2003$.

La 5. série

Sujet: Suites

Date d'expedition: 17. FÉVRIER 2003

PROBLÈME 1 (3 POINTS)
Soit M l'ensemble de tous nombres naturels composés impairs inférieurs á 100 . Exprimez M comme réunion de trois suites arithmétiques (pas nécessairement disjonctives). (nombre composé - nombre qui n'est pas un nombre premier)

PROBLÈME 2 (3 POINTS)
Décidez s'il existe un sous-ensemble non-vide M de nombres naturels et une suite $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ avec la propriété suivante: pour chaque $n \in M$ on a aussi $a_n \in M$ et l'équation $a_n = a_{a_n} + 1$ est vérifiée.

PROBLÈME 3 (3 POINTS)
Soit une suite $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ définie par: $a_1 = 2$, $a_{n+1} = a_n^2 - a_n + 1$. Montrez que le diviseur commun le plus grand est 1 pour deux membres quelconques de cette suite.

PROBLÈME 4 (5 POINTS)
Soit une suite:

$$a_0 = 3,\ a_1 = 4,\ a_2 = 167,$$
$$a_n = 2003a_{n-1} - a_{n-2} + 174,\ n \geq 3.$$

trouvez tous k tels que a_k est un nombre premier.

PROBLÈME 5 (5 POINTS)
Soit S l'ensemble de finiment beaucoup de suites $(a_k)_{k=1}^{\infty}$ de nombres naturels. Montrez qu'ils existent deux nombres naturels $m \neq n$ tels que chaque suite $(a_k)_{k=1}^{\infty} \in S$ vérifie l'inéquation $a_m \geq a_n$.

PROBLÈME 6 (5 POINTS)
Décidez s'il est vrai: la suite $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ est périodique si et seulement si il existe $T \in \mathbb{N}$ tel que la suite $(a_{m+n^2})_{n=1}^{\infty}$ est périodique pour chaque $m \in \{0, 1, 2, \ldots\}$ avec période inférieure á T.

PROBLÈME 7 (5 POINTS)
Soit $c(i)$ la somme des chiffres de i. Trouvez tous les k naturels pour lesquels la suite $a_n = \frac{c(n)}{c(kn)}$ est minorée et majorée en meme temps.

PROBLÈME 8 (5 POINTS)
Pour n naturel désignons $j(n)$ le nombre naturel unique tel que $(j(n)+1)! > n \geq (j(n))!$. Soit une suite:

$$a_0 = 1,\ a_1 = 0,$$
$$a_n = \left(j(n) - \left\lfloor \frac{n}{(j(n))!} \right\rfloor\right)(j(n))! + a_{\left\{\frac{n}{(j(n))!}\right\}(j(n))!},\ n \geq 2.$$

Trouvez la valeur maximale de l'expression $|n - a_n|$ pour $n \leq 2003$.

Serie N. 5

Thema: Folgen

Termin der Absendung: 17. FEBRUAR 2003

AUFGABE N. 1 (3 PUNKTE)

Schreibe die Menge aller zusammengesetzten ungeraden natürlichen Zahlen kleiner als 100 als Vereinigung von drei (nicht unbedingt disjunkten) arithmetischen Folgen auf.

AUFGABE N. 2 (3 PUNKTE)

Entscheide, ob eine nichtleere Untermenge M der natürlichen Zahlen und eine Folge $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ mit folgenden Eigenschaften existieren: Für jedes $n \in M$ ist auch $a_n \in M$ und es gilt $a_n = a_{a_n} + 1$.

AUFGABE N. 3 (3 PUNKTE)

Die Folge $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ ist definiert über: $a_1 = 2$, $a_{n+1} = a_n^2 - a_n + 1$. Zeige, dass je zwei beliebige Glieder dieser Folge teilerfremd sind.

AUFGABE N. 4 (5 PUNKTE)

Durch

$$a_0 = 3,\ a_1 = 4,\ a_2 = 167,$$
$$a_n = 2003a_{n-1} - a_{n-2} + 174,\ n \geq 3$$

ist eine Folge gegeben. Finde alle k, so dass a_k eine Primzahl ist.

AUFGABE N. 5 (5 PUNKTE)

Sei S eine Menge von endlich vielen Folgen $(a_k)_{k=1}^{\infty}$ von natürlichen Zahlen. Zeigt, dass es (verschiedene) natürliche Zahlen n und m gibt, so dass in jeder Folge $(a_k)_{k=1}^{\infty} \in S$ gilt: $a_m \geq a_n$.

AUFGABE N. 6 (5 PUNKTE)

Entscheide, ob die folgende Behauptung gilt: Eine Folge $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ ist genau dann periodisch, wenn es ein $T \in \mathbb{N}$ gibt, so dass die Folgen $(a_{m+n^2})_{n=1}^{\infty}$ für $m \in \{0, 1, 2, \ldots\}$ periodisch und ihre Perioden kleiner als T sind.

AUFGABE N. 7 (5 PUNKTE)

Sei $c(i)$ die Summe aller Ziffern der Zahl i. Finde alle natürlichen Zahlen k, für die die Folge $a_n = \frac{c(n)}{c(kn)}$ beschränkt ist.

AUFGABE N. 8 (5 PUNKTE)

Mit $j(n)$ bezeichnen wir die eindeutig bestimmte natürliche Zahl, die $(j(n)+1)! > n \geq (j(n))!$ erfüllt. Wir betrachten die Folge

$$a_0 = 1,\ ,a_1 = 0,$$
$$a_n = \left(j(n) - \left\lfloor \frac{n}{(j(n))!} \right\rfloor\right)(j(n))! + a_{\left\{\frac{n}{(j(n))!}\right\}(j(n))!},\ n \geq 2.$$

Finde den größten möglichen Wert von $|n - a_n|$ für $n \leq 2003$.

Řešení 5. série

1. úloha (39, 20, 1.79, 2.0)

Množinu všech složených lichých přirozených čísel menších než 100 zapište jako sjednocení tří (ne nutně disjunktních) aritmetických posloupností.

Složené liché přirozené číslo menší než 100 musí být dělitelné jedním z čísel 3, 5, 7, protože všechny jeho dělitele musí být liché, jsou aspoň dva, a tedy nejmenší z nich musí být menší než 10. Když si toto uvědomíme, snadno nás již napadnou hledané posloupnosti; první bude 9, 15, 21, ... , 99, druhá 15, 25, 35, ... , 95 a třetí 21, 35, 49, ... , 91, tedy všechny liché násobky 3, 5 a 7 (samozřejmě bez těchto čísel, neboť jsou to prvočísla). Z úvodního pozorování je vidět, že jejich sjednocením je požadovaná množina.

Poznámky k došlým řešením: Úloha byla velmi jednoduchá, proto jsem ji bodovala poměrně přísně. Za opomenutí faktu, že hledané posloupnosti musejí být konečné, jsem strhávala bod, za nezdůvodnění, proč nalezené posloupnosti opravdu tvoří hledaný rozklad, dva body (zkuste si tímto způsobem vyřešit obdobný příklad – napsat množinu všech složených lichých přirozených čísel menších než 10000 jako sjednocení 24 ne nutně disjunktních posloupností).

2. úloha (33, 22, 2.00, 2.0)

Rozhodněte, zda existuje neprázdná podmnožina M přirozených čísel a posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ s následující vlastností: Pro každé $n \in M$ je také $a_n \in M$ a platí $a_n = a_{a_n} + 1$.

Zvolme si libovolné $n \in M$. Pak a_n je prvkem množiny $M \subseteq \mathbb{N}$, a tedy je také přirozené číslo. Tedy číslo a_{a_n} je také prvkem M ... Nyní využijme druhé podmínky. Z ní plyne rovnost:

$$a_n = a_{a_n} + 1 = a_{a_{a_n}} + 2 = a_{a_{a_{a_n}}} + 3 = \cdots = a_{\ddots_{a_n}} + a_n .$$

Dostali jsme tedy, že $a_{\ddots_{a_n}}$ musí být rovno 0, což ale není možné, neboť množina M je podmnožina přirozených čísel. Našli jsme tedy spor s tím, že si můžeme zvolit libovolný prvek, a tak množina M je prázdná.

3. úloha (33, 31, 2.79, 3.0)

Mějme posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ definovanou: $a_1 = 2$, $a_{n+1} = {a_n}^2 - a_n + 1$. Ukažte, že libovolné dva členy této posloupnosti jsou nesoudělné.

Na začátek malá poznámka. V anglickém zadání bylo chybně uvedeno, že se má dokázat nesoudělnost sousedních členů, správné zadání je, že se má dokázat nesoudělnost libovolných dvou různých členů. A nyní k řešení správné úlohy.

Lemma. Pro $i > j$ dává a_i zbytek 1 při dělení a_j.

Důkaz. Důkaz provedeme matematickou indukcí podle velikosti $i-j$. Pro $i-j = 1$ (tedy $i = j+1$) jde o následující členy a tvrzení zjevně platí (je $a_i = a_j^2 - a_j + 1$, první dva členy jsou dělitelné a_j a dostáváme zbytek 1).

Nechť nyní tvrzení platí pro $i = j + k$, dokážeme je pro $i = j + (k + 1)$. Je $a_i = a_{j+(k+1)} = a_{j+k}^2 - a_{j+k} + 1$. Protože a_{j+k} dává při dělení a_j zbytek 1, druhá mocnina dává tentýž zbytek, celkově dostáváme, že zbytek a_i při dělení a_j je $1 - 1 + 1 = 1$. Tím je lemma dokázáno.

Lemma je už vlastně řešením. Vezmeme-li si libovolné dva členy posloupnosti, a_i, a_j, $i > j$, platí $a_i = ka_j + 1$, $k \in \mathbb{N}$. Proto jediným společným dělitelem těchto členů je 1, jinými slovy každé dva členy posloupnosti jsou nesoudělné.

Poznámky k došlým řešením: Táto úloha bola dosť ľahká a preto majú takmer všetci tri body. Často ste však robievali chybu, že ste dokázali, že n-tý člen nedelí $n+1$-vý čo však nie je ekvivalentné s tým, že sú nesúdeliteľné (ako bolo v zadaní), no a takmer všetci ste uvažovali, že daná postupnosť má iba prirodzené členy, bez toho aby ste sa zmienili, že prečo.

4. úloha (20, 20, 4.75, 5.0)

Je dána posloupnost:

$$a_0 = 3, \ a_1 = 4, \ a_2 = 167,$$

$$a_n = 2003a_{n-1} - a_{n-2} + 174, \ n \geq 3.$$

najděte všechna k taková, že a_k je prvočíslo.

Myšlenkou úlohy je všimnout si, že členy posloupnosti s indexem dělitelným 3 jsou dělitelné třemi[1], členy posloupnosti s indexem dávajícím zbytek 1 po dělení třemi jsou dělitelné čtyřmi a členy s indexem dávajícím zbytek 2 jsou dělitelné sto šedesáti sedmi. Tuto myšlenku již není obtížné dokázat indukcí.

V důkaze bychom mohli zvlášť vyšetřit dělitelnost třemi, čtyřmi i sto šedesáti sedmi, nicméně úlohu lze řešit i o něco kompaktněji. Pro začátek si všimněme, že $174 = 167 + 4 + 3$ a $2003 = 2004 - 1 = 167 \cdot 4 \cdot 3$, tato vyjádření čísel se nám budou velmi hodit. Utvořme posloupnost $(d_n)_{n=0}^{\infty}$, kde $d_{3k} = 3, d_{3k+1} = 4, d_{3k+2} = 167$ pro každé $k \in \mathbb{N}_0$. Indukcí (podle i) dokažme, že $a_i \equiv d_i \mod d_j$. Pro $i = 0, 1, 2$ dokonce platí $a_i = d_i$, čím je první krok indukce hotov. Pro větší i předpokládejme, že tvrzení platí pro $i - 1$ a $i - 2$. Potom:

$$a_i = 167 \cdot 4 \cdot 3a_{i-1} - a_{i-1} - a_{i-2} + 167 + 4 + 3,$$

tedy ($d_j \in \{3, 4, 167\}$):

$$a_i \equiv -a_{i-1} - a_{i-2} + 167 + 4 + 3 \mod d_j.$$

Mezi třemi po sobě jdoucími členy posloupnosti $(d_n)_{n=0}^{\infty}$ je vždy jeden roven 167, jeden 4 a jeden 3, potom:

$$a_i \equiv -a_{i-1} - a_{i-2} + d_i + d_{i-1} + d_{i-2} \mod d_j.$$

Využijeme-li indukčního předpokladu, dostáváme:

$$a_i \equiv d_i \mod d_j,$$

což jsme chtěli dokázat.

[1]Zde sloužil člen a_0 jako nápověda, jinak k určení posloupnosti není potřeba.

Položíme-li nyní $i = j$, dostáváme $a_i \equiv d_i \equiv 0 \mod d_i$. Tedy každý člen posloupnosti je dělitelný třemi, čtyřmi nebo sto šedesáti sedmi.

Nyní si už stačí uvědomit, že posloupnost je rostoucí, což se velmi snadno ověří indukcí. Tedy pro $n \geq 3$ je $a_n \neq 3, 4, 167$, neboli pro $n \geq 3$ není a_n prvočíslo. Jedinými prvočísly tedy jsou a_0 a a_2.

Poznámky k došlým řešením: Všichni řešitelé této úlohy přišli na to, že pro $n \geq 3$ je každý člen a_n dělitelný třemi, sto šedesáti sedmi nebo dvěma (případně čtyřmi). To ale ještě nestačí k tomu, aby se o takovém členu dalo tvrdit, že není prvočíslo (např. prvočíslo 3 je dělitelné třemi). Těm, kteří si to neuvědomili, jsem strhával bod.

5. úloha (15, 11, 3.67, 5.0)

Mějme dáno konečně mnoho (nekonečných) posloupností přirozených čísel. Ukažte, že existují (různá) čísla m a n taková, že pro každou z těchto posloupností není m-tý člen menší než n-tý.

Lemma. Z každé posloupnosti přirozených čísel lze vybrat podposloupnost, která je neklesající.

Důkaz. Pokud je nějaké přirozené číslo v posloupnosti nekonečněkrát, pak zvolme tuto podposloupnost a lemma je splněno. Dále tedy předpokládejme, že každé přirozené číslo je v posloupnosti jen konečněkrát (třeba ani jednou). Zvolme si první číslo, označme jej a_{i_1}, dále vždy počkáme na člen původní posloupnosti, který nebude menší než ten, který byl zvolen v předchozím kroku. Takového prvku se vždy dočkáme, neboť každé číslo je v posloupnosti jen konečněkrát.

Z předchozího lemmatu si můžeme z první posloupnosti vybrat indexy tak, aby podposloupnost a_{1,i_n} byla neklesající. Dále z druhé posloupnosti a z těchto indexů můžeme vybrat indexy tak, že podposloupnost druhé posloupnosti $a_{2,i_{j_n}}$ bude neklesající. Takto budeme pokračovat ve výběru až do poslední posloupnosti. Získáme posloupnost indexů $j_1, j_2, \dots$ takovou, že pro každou i-tou posloupnost je $a_{i,j_1} \geq a_{i,j_2} \geq \dots$ Tedy zvolme $m = j_2$ a $n = j_1$.

6. úloha (12, 11, 3.42, 4.0)

Rozhodněte, zda platí: Posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je periodická, právě když existuje $T \in \mathbb{N}$ takové, že posloupnost $(a_{n_0+n^2})_{n=1}^{\infty}$ je periodická pro každé $n_0 \in \{0, 1, 2, \dots\}$ s periodou menší než T.

Ukážeme, že toto tvrzení platí. Nejprve implikaci zleva doprava, máme tedy periodickou posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, nechť délka její periody je p, volme $T = p + 1$. Pro $k \in \mathbb{N}$ je

$$a_{n_0+(a+kp)^2} = a_{n_0+a^2+p(2ak+k^2p)} = a_{n_0+a^2},$$

posloupnost $(a_{n_0+n^2})_{n=1}^{\infty}$ je proto periodická s periodou p (jež je menší než T).

Nyní opačná implikace. Zvolme $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, pak posloupnost $(a_{k+n^2})_{n=1}^{\infty}$ je periodická s periodou menší než T, její $(T-1)!+1$-ní prvek bude proto roven prvnímu, tj. $a_{k+1} = a_{k+((T-1)!+1)^2}$. Posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je tedy periodická s periodou $((T-1)!+1)^2 - 1$.

Poznámky k došlým řešením: Tady byl trochu problém s definicí periodické posloupnosti. Někteří řešitelé totiž považovali za periodickou i posloupnost, která je periodická až od nějakého členu počínaje, tj. má předperiodu. Tohle je sice neobvyklé, ale zase docela přijatelné. Jenže při takovéhle definici ekvivalence neplatí, a toho si všiml jen *Pavel Šalom*, který zkonstruoval jednoduchý protipříklad: posloupnost, jejíž prvé tři členy jsou 0, dalších pět členů je 1, dalších sedm členů 0, … Čili $a_n = 0$ pro n splňující pro nějaké k přirozené $(2k-1)^2 \leq n \leq (2k)^2 - 1$

a $a_n = 1$ pro ostatní n. Tato posloupnost zřejmě není periodická. Snadno ale nahlédneme, že každá její podposloupnost $(a_{m+n^2})_{n=1}^{\infty}$ je od určitého členu počínaje periodická s periodou 2. Jinak co se bodování týče: za důkaz implikace zleva doprava jsem uděloval dva body a za obrácenou implikaci tři body. Téměř všichni řešitelé, kteří správně pochopili zadání, získali plný počet bodů.

7. úloha (11, 7, 3.18, 5.0)

Nechť $c(i)$ značí ciferný součet čísla i. Nalezněte všechna k přirozená, pro něž je posloupnost $a_n = \frac{c(n)}{c(kn)}$ omezená.

Je zřejmé, že posloupnost je zdola omezená nulou, zajímejme se tedy, zdali je posloupnost omezená shora.

Nejprve dokážeme, že pro čísla tvaru $k = 2^\alpha 5^\beta$, kde $\alpha, \beta \in \{0, 1, 2, \dots\}$ posloupnost omezená je.

Za tímto účelem si dokažme:

Lemma. *Pro každé přirozené m, n platí: $c(mn) \le mc(n)$.*

Důkaz. Nejprve si uvědomme, že pro každé přirozené a, b platí: $c(a+b) \le c(a) + c(b)$. To je zřejmé, pokud si uvědomíme, jak se čísla sčítají pod sebou: Zprava (od jednotek) sčítáme cifry ve stejném sloupci (se stejnou mocninou deseti), součet cifer napíšeme do téhož sloupce. Občas se však může stát, že součet cifer je větší než devět. V tom případě odečteme desítku a do následujícího sloupce přičteme jedničku. Tím se ciferný součet výsledku sníží (o 9). Protože každou cifru čísel a, b sčítáme právě jednou a občas od výsledného součtu cifer odečteme 9, je nutně $c(a+b) \le c(a) + c(b)$. Několikanásobným použitím této nerovnosti dostáváme:

$$c(mn) = c(\underbrace{n + n + \cdots + n}_{m}) \le \underbrace{c(n) + c(n) + \cdots + c(n)}_{m} = mc(n),$$

tím je lemma dokázáno.

Nyní už přijde důkaz omezenosti:

$k = 2^\alpha 5^\beta$, předpokládejme, že $\alpha \le \beta$ (pro případ $\alpha \ge \beta$ je důkaz analogický). Potom:

$$\frac{c(n)}{c(kn)} = \frac{c(n)}{c(5^\alpha 2^\beta n)} = \frac{c(10^\beta n)}{c(5^\alpha 2^\beta n)} = \frac{c(5^{\beta-\alpha}(5^\alpha 2^\beta n))}{c(5^\alpha 2^\beta n)} \le 5^{\beta-\alpha} \frac{c(5^\alpha 2^\beta n)}{c(5^\alpha 2^\beta n)} = 5^{\beta-\alpha}.$$

To znamená, že posloupnost je omezená (v druhé rovnosti jsme využili faktu, že se ciferný součet po vynásobení čísla deseti nezmění, v nerovnosti jsme využili lemma).

Dále dokážeme, že pro zbylá čísla, tedy čísla tvaru $k = 2^\alpha 5^\beta m$, kde $\alpha, \beta \in \{0, 1, 2, \dots\}, m \in \mathbb{N}, m > 1, (m, 5) = (m, 2) = 1$ ((a, b) značí největšího společného dělitele čísel a a b), posloupnost omezená není.

Pro začátek si označme pár hodnot. Nechť $\varphi(m)$ značí počet čísel menších než m, která jsou s m nesoudělná. Podle Eulerovy věty (m je nesoudělné s 10) je $10^{\varphi(m)} \equiv 1 \mod m$, to znamená, že pro každé přirozené l je $10^{l\varphi(m)} \equiv 1 \mod m$. Určitě lze zvolit l takové, že $l\varphi(m)$ je větší než počet cifer čísla $m-1$, zvolme pevně nějaké takové l a označme $j = l\varphi(m)$. Potom číslo $10^j + m - 1$ vypadá tak, že je napsána jednička, potom několik nul a potom číslo $m-1$. Dále $10^j - 1 \equiv 1 - 1 = 0 \mod m$, což znamená, že $r = \frac{10^j - 1}{m}$ je celé číslo.

Potom pro libovolné přirozené h se ptejme, jak vypadá číslo $d(h) = 10^{hj} + m - 1$. Vzhledem k tomu, že j a tedy i hj je větší než počet cifer čísla $m-1$, znamená to, že číslo $d(h)$ má v desítkové soustavě zápis, ve kterém se na začátku vyskytuje jednička, potom několik nul, potom číslo $m-1$, z čehož vyplývá, že $c(d(h)) = 1 + c(m-1)$. Dále se zajímejme, jak vypadá číslo $\frac{d(h)}{m}$:

$$\frac{d(h)}{m} = \frac{10^{hj} + m - 1}{m} = 1 + \frac{10^{hj} - 1}{m} = 1 + \frac{(10^j - 1)(10^{j(h-1)} + 10^{j(h-2)} + \cdots + 1)}{m} =$$

$$= 1 + r(10^{j(h-1)} + 10^{j(h-2)} + \cdots + 1).$$

Odtud vidíme nejen, že $\frac{d(h)}{m}$ je celé číslo, ale navíc ještě umíme odhadnout jeho ciferný součet. $r = \frac{10^j-1}{m} < 10^j - 1$ (totiž m je alespoň 3). Odtud plyne, že $r10^{j(h-x)}$ je číslo, které má nejvýše $j(h-x+1)$ cifer, ovšem posledních $j(h-x)$ cifer jsou už nutně nuly. Protože $r < 10^j - 1$, je $r + 1 < 10^j$, což znamená, že i číslo $r+1$ má nejvýše j cifer. Sečteme-li (pod sebou)

$$1 + r(10^{j(h-1)} + 10^{j(h-2)} + \cdots + 1) = r10^{j(h-1)} + r10^{j(h-2)} + \cdots + r10^j + r + 1,$$

je každý sčítanec v jiných řádech, a tak:

$$c\left(\frac{d(h)}{m}\right) = c(r10^{j(h-1)} + r10^{j(h-2)} + \cdots + r10^j + r + 1) =$$

$$= c(r10^{j(h-1)}) + c(r10^{j(h-2)}) + \cdots + c(r10^j) + c(r+1) = \underbrace{c(r) + c(r) + \cdots + c(r)}_{h-1} + c(r+1) >$$

$$> (h-1)c(r).$$

Se vztahy $c(d(h)) = 1 + c(m-1)$, $c\left(\frac{d(h)}{m}\right) > (h-1)c(r)$ je už snadné dokázat, že posloupnost omezená není.

Volme (v závislosti na h) $n = \frac{d(h)}{m}$.

Potom

$$\frac{c(n)}{c(kn)} = \frac{c\left(\frac{d(h)}{m}\right)}{c\left(2^\alpha 5^\beta d(h)\right)} > \frac{(h-1)c(r)}{c\left(2^\alpha 5^\beta d(h)\right)},$$

Opět předpokládejme že $\alpha \leq \beta$ (v druhém případě je důkaz analogický), potom:

$$\frac{c(n)}{c(kn)} > \frac{(h-1)c(r)}{c\left(10^\alpha 5^{\beta-\alpha} d(h)\right)} = \frac{(h-1)c(r)}{c\left(5^{\beta-\alpha} d(h)\right)} \geq \frac{(h-1)c(r)}{5^{\beta-\alpha} c(d(h))} = (h-1)\frac{c(r)}{5^{\beta-\alpha}(1 + c(m-1))}.$$

$\frac{c(r)}{5^{\beta-\alpha}(1+c(m-1))}$ je kladná konstanta nezávislá na volbě h respektive n, h můžeme volit libovolně velké, tedy i výraz $(h-1)\frac{c(r)}{5^{\beta-\alpha}(1+c(m-1))}$ lze volit libovolně velký.

Odtud dostáváme, že posloupnost není omezená.

8. úloha (7, 7, 4.43, 5.0)

Pro n přirozené označme $j(n)$ jediné takové přirozené číslo, že $(j(n)+1)! > n \geq (j(n))!$. Mějme posloupnost

$$a_0 = 1, \ , a_1 = 0,$$

$$a_n = \left(j(n) - \left\lfloor \frac{n}{(j(n))!} \right\rfloor \right) (j(n))! + a_{\left\{ \frac{n}{(j(n))!} \right\} (j(n))!}, \ n \geq 2.$$

Najděte největší možnou hodnotu výrazu $|n - a_n|$ pro $n \leq 2003$.

K řešení této úlohy použijeme zajímavého zápisu přirozených čísel.

Lemma. *Každé $m \in \mathbb{N}_0$ lze jednoznačně zapsat ve tvaru: $m = b_1 1! + b_2 2! + \cdots + b_k k!$, kde $k \in \mathbb{N}$ a $b_i \in \{0, 1, 2, \ldots i\}$, je-li $k > 1$, potom $b_k \neq 0$.*

Důkaz. Když si rozmyslíme, co lemma říká, je intuitivně zřejmé, že platí. Nicméně to nemění nic na skutečnosti, že je ho potřeba dokázat.

Nejprve dokážeme, že každé číslo v onom tvaru zapsat lze. Pro $m = 0$ stačí volit $k = 1, b_k = 0$. Pro přirozená m provedeme důkaz indukcí podle $j(m)$. Zároveň budeme ještě dokazovat, že existuje zápis, pro který $k = j(m)$.

(*i*) $j(m) = 1$, tedy $2! > m \geq 1!$, odkud plyne $m = 1$. Potom je zápis nasnadě: $k = 1, b_k = 1$.

(*ii*) Pro všechna $m \in \mathbb{N}, j(m) < h$ tvrzení platí. Dokážeme pro $m \in \mathbb{N}, j(m) = h$. Označme

$$b_h = \left\lfloor \frac{m}{j(m)!} \right\rfloor.$$

Víme, že $(h+1)! = (j(m)+1)! > m \geq j(m)!$, což přesně znamená, že $(h+1) > b_h \geq 1$, neboli volba b_h je korektní. Potom označme $m' = m - b_h h!$. Tedy[2]

$$m' = m - \left\lfloor \frac{m}{j(m)!} \right\rfloor j(m)! = m - j(m)! \left(\frac{m}{j(m)!} - \left\{ \frac{m}{j(m)!} \right\} \right) = j(m)! \left\{ \frac{m}{j(m)!} \right\}.$$

Desetinná část je vždy menší než jedna, větší rovna nule, odkud plyne, že $0 \leq m' < j(m)! = h!$. Je-li $m' = 0$, potom $m = b_h h!$, čím jsme našli požadovaný zápis. Jinak $0 < j(m') < h$. Z indukčního předpokladu: $m' = b_1 1! + b_2 2! + \cdots + b_{j(m')} j(m')!$. Potom $m = m' + b_h h! = b_1 1! + b_2 2! + \cdots + b_{j(m')} j(m')! + b_h h!$, což je potřebný zápis.

Nyní přejděme k důkazu jednoznačnosti. Vzhledem k tomu, že pro $k > 1$ je nutně $b_k > 0$, nemůže být pro $m = 0$ povolený jiný zápis než $0 = 0 \cdot 1!$.

Dále přejděme k důkazu pro přirozená m. Pro spor předpokládejme, že $m = b_1 1! + b_2 2! + \cdots + b_k k!$ a $m = b'_1 1! + b'_2 2! + \cdots + b'_l l!$ jsou dva různé zápisy čísla m. Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že $k \geq l$ a dodefinujme (pokud existují) $b'_{l+1} = 0, \ldots, b'_k = 0$, tedy z druhého zápisu lze m zapsat jako $m = b'_1 1! + b'_2 2! + \cdots + b'_k k!$. Označme i nejmenší takový index, pro který je b_i různé od b'_i (nějaký takový index existuje, jinak by čísla měly stejné zápisy). Potom čísla $b_i i!$ a $b'_i i!$ dávají různý zbytek při dělení $(i+1)!$. Ovšem čísla $b_r r!$ a $b'_r r!$ pro $r \neq i$ dávají stejný zbytek (pro $r < i$ je $b_r = b'_r$, pro $r > i$ je $r!$ dělitelné $(i+1)!$. Tedy tyto dva zápisy m dávají různé zbytky při dělení $(i+1)!$, což je spor s tím , že se sobě rovnají. Lemma je dokázáno.

[2]Připomeňme, že desetinná část je definována jako $\{x\} = x - \lfloor x \rfloor$.

Nyní si v souvislosti s lemmatem zaveďme o něco jednodušší značení. Místo zápisu $m = b_1 1! + b_2 2! + \cdots + b_k k!$ pišme $m = \overline{b_k b_{k-1} \cdots b_1}$.

Nadále už budeme zkoumat vlastnosti posloupnosti. Pro číslo $m = \overline{b_k b_{k-1} \cdots b_1}$ definujme $f(b_1) = 1 - b_1$, $f(b_i) = i - b_i$ pro $i > 1, b_i > 0$, $f(b_i) = 0$ pro $i > 1, b_i = 0$. Funkce f je ve skutečnosti funkce dvou proměnných (i a b_i), my budeme považovat hodnotu i za známou (poznáme ji podle b_i), a tak ji nebudeme zvýrazňovat.

Matematickou indukcí (podle $j(m)$) dokážeme, že $a_n = \overline{f(b_k) f(b_{k-1}) \cdots f(b_1)}$, kde $n = \overline{b_k b_{k-1} \cdots b_1}$ (zde se nám může stát, že několik prvních členů $f(b_k)$, $f(b_{k-1})$, $\cdots$, $f(b_i)$ je nulových, v tom případě bychom je sem správně psát neměli, nám bude stačit, že si to uvědomíme, abychom nemuseli složitě diskutovat nulovost těchto koeficientů; vždy můžeme alespoň poslední koeficient zapsat, jelikož u něj nám nevadí, když je nulový). Jinými slovy. Zapíšeme-li číslo n ve tvaru podle lemmatu, vznikne z něho číslo, kde se člen b_i nahradí členem $i - b_i$ s výjimkou nul (které nejsou na konci čísla), ty se nezmění. Tedy například $a_{\overline{220300}} = \overline{430001}$.

Důkaz. Protože není $j(0)$ definováno, musíme vypsat zvlášť $a_{\overline{0}} = a_0 = 1 = \overline{1}$. Dále už můžeme zapisovat indukci.

(i) $j(m) = 1 \Rightarrow m = 1$, $a_{\overline{1}} = a_1 = 0 = \overline{0}$.

(ii) Pro všechna $n \in \mathbb{N}, j(n) < h$ tvrzení platí. Dokážeme pro $n \in \mathbb{N}, j(n) = h$. Z důkazu lemmatu víme, že n lze napsat jako $n = \overline{b_h b_{h-1} \cdots b_1}$. Dále si uvědomme, že pro $m = \overline{c_k c_{k-1} \cdots c_1}$ platí $m < (k+1)!$. Kdyby tomu tak nebylo, je $j(m) > k$, čím lze podle důkazu lemmatu zapsat jako $m = \overline{d_{j(m)} d_{j(m)-1} \cdots d_1}$, což je spor s jednoznačností. Speciálně $\overline{b_s b_{s-1} \cdots b_1} < (s+1)! \leq h!$ pro každé $s \leq h-1$. Označme s největší takové i, že $i < h$ a $b_i \neq 0$, v případě, že jsou všechny b_i nulové, volme $s = 1$. Potom $n = \overline{b_h 00 \cdots 0 b_s b_{s-1} \cdots b_1} = b_h h! + \overline{b_s b_{s-1} \cdots b_1}$.
Následně

$$\left(j(n) - \left\lfloor \frac{n}{(j(n))!} \right\rfloor\right)(j(n))! = \left(h - \left\lfloor \frac{\overline{b_h b_{h-1} \cdots b_1}}{h!} \right\rfloor\right) h! =$$

$$= \left(h - \left\lfloor b_h + \frac{\overline{b_s \cdots b_1}}{h!} \right\rfloor\right) h! = (h - b_h)h!.$$

A

$$\left\{\frac{n}{(j(n))!}\right\}(j(n))! = \left\{\frac{b_h h! + \overline{b_s b_{s-1} \cdots b_1}}{h!}\right\} h! = \left\{\frac{\overline{b_s b_{s-1} \cdots b_1}}{h!}\right\} h! =$$

$$= \frac{\overline{b_s b_{s-1} \cdots b_1}}{h!} h! = \overline{b_s b_{s-1} \cdots b_1}.$$

V úpravách jsme využili skutečnosti, že $\frac{\overline{b_s b_{s-1} \cdots b_1}}{h!} < 1$ a vztahů, že pro $x \in \mathbb{Z}, y \in \mathbb{R}$ platí: $\lfloor x + y \rfloor = x + \lfloor y \rfloor$ a $\{x + y\} = \{y\}$, které si snadno rozmyslíte z definice dolní celé respektive desetinné části.

Nyní už stačí využít rekurentního vztahu:

$$a_n = \left(j(n) - \left\lfloor \frac{n}{(j(n))!} \right\rfloor\right) + a_{\left\{\frac{n}{(j(n))!}\right\}(j(n))!} = (h - b_h)h! + a_{\overline{b_s b_{s-1} \cdots b_1}} =$$

$$= (h - b_h)h! + \overline{f(b_s) f(b_{s-1}) \cdots f(b_1)} =$$

$$= (h - b_h)h! + f(b_{h-1})(h-1)! + f(b_{h-2})(h-2)! + \cdots + f(b_{s+1})(s+1)! + \overline{f(b_s) \cdots f(b_1)} =$$

$$= f(b_h)h! + f(b_{h-1})(h-1)! + f(b_{h-2})(h-2)! + \cdots + f(b_{s+1})(s+1)! + \overline{f(b_s) \cdots f(b_1)} =$$

$$= \overline{f(b_h)f(b_{h-1})\cdots f(b_1)}.$$

V rovnosti mezi prvním a druhým řádkem jsme využili indukčního předpokladu, v následující rovnosti jsme využili skutečnosti, že $b_{h-1} = b_{h-2} = \cdots = b_{s+1} = 0$, a tak i $f(b_{h-1}) = f(b_{h-2}) = \cdots = f(b_{s+1}) = 0$. Tyto členy samozřejmě nemusí existovat. Předposlední rovnost je zřejmá, neboť $b_h \neq 0$. K poslední je třeba uvědomit si, že $f(b_i) \in \{1, 2, \dots i\}$, což není obtížné si z definice f uvědomit. Zde opět několik prvních členů jak ve výrazu $\overline{f(b_s)f(b_{s-1})\cdots f(b_1)}$, tak ve výrazu $\overline{f(b_h)f(b_{h-1})\cdots f(h_1)}$ může být nulových, nicméně úpravy to neovlivní.

Tím je důkaz indukcí ukončen.

Nyní už je velmi snadné určit maximum výrazů $|n - a_n|$ pro $n \leq 2003$. Nejprve si rozepišme: $2003 = 2 \cdot 6! + 4 \cdot 5! + 3 \cdot 4! + 3! + 2 \cdot 2! + 1! = \overline{243121}$. Tedy jakékoliv $n \leq 2003$ lze zapsat jako $\overline{b_6b_5b_4b_3b_2b_1}$, kde $b_6 < 3$ (nyní povolujeme i možnost $b_6 = 0$). Vzhledem k tomu, že $f(0) = 0$ (nejedná-li se o nulu na posledním místě, která je vždy součástí zápisu čísla), zůstává tak platnost vztahu $a_{\overline{b_6b_5b_4b_3b_2b_1}} = \overline{f(b_6)f(b_5)f(b_4)f(b_3)f(b_2)f(b_1)}$ zachována. Tedy

$$|a_n - n| = |\sum_{i=1}^{6}(f(b_i) - b_i)i!| \leq \sum_{i=1}^{6}|f(b_i) - b_i|i!.$$

Kde $|f(b_i) - b_i| \leq |i - 2b_i|$ (pro $i > 1, b_i = 0$ je levý výraz nulový, v ostatních případech nastává rovnost). Vzhledem k tomu, že $0 \leq b_i \leq i$, je $|i - 2b_i| \leq i$. Odtud plyne nerovnost $\sum_{i=1}^{k} |f(b_i) - b_i|i! < (k+1)!$, tuto nerovnost lze velmi snadno dokázat indukcí nebo úvahami (které jsme již jednou provedli) o jednoznačném zápise čísla (nebudeme-li psát nuly na začátku). Nyní už snadno dokážeme, že pro číslo $n = \overline{111110}$ (nikoliv jediné n) je výraz $|n - a_n|$ maximální. Jeho hodnota je $4 \cdot 6! + 3 \cdot 5! + 2 \cdot 4! + 3! + 1!$. Je-li $b_6 \neq 1$, potom $|f(b_6) - b_6| \leq 2$, a tak je

$$|a_n - n| \leq \sum_{i=1}^{6}|f(b_i) - b_i|i! = |f(b_6) - b_6|6! + \sum_{i=1}^{6}|f(b_i) - b_i|i! < (2+1)6!,$$

spor! Tedy $b_6 = 1$. Potom

$$|a_n - n| = |\sum_{i=1}^{6}(f(b_i) - b_i)i!| = |4 \cdot 6! + \sum_{i=1}^{5}(f(b_i) - b_i)i!| = 4 \cdot 6! + \sum_{i=1}^{5}(f(b_i) - b_i)i!.$$

Poslední rovnost plyne z faktu, že

$$\sum_{i=1}^{5}(f(b_i) - b_i)i! \geq -\sum_{i=1}^{5}|(f(b_i) - b_i)|i! > -6! > -4 \cdot 6!.$$

Nyní podobným způsobem jako u $b_6 = 1$ postupně odvodíme $b_5 = 1$, $b_4 = 1$, $b_3 = 1$ (pouze odstraníme absolutní hodnoty). Pro hodnoty b_2 a b_1 je asi nejsnazší probrat všech 6 možností. Zjistíme, že kromě $n = \overline{111110}$ nabývá maximální hodnoty i pro $n = \overline{111100}$. Nyní už stačí spočítat: $4 \cdot 6! + 3 \cdot 5! + 2 \cdot 4! + 3! + 1! = 2880 + 360 + 48 + 6 + 1 = 3295$.