Několik poznatků, které se Ti mohou hodit

Úlohy 7. série se týkají řešení funkcionálních rovnic, což jsou rovnice, ve kterých hledaná neznámá je nějaká funkce. V tomto textu popíšeme základní metody řešení funkcionálních rovnic. Kromě toho se budeme zabývat vlastnostmi spojitých funkcí. Většinu jejich vlastností nebudeme dokazovat, ale při řešení příkladů se na ně můžeš bez důkazu odvolávat. Podrobněji se problematice funkcionálních rovnic věnuje např. sbírka Školy mladých matematiků 55, Ljubomir Davidov: Funkcionální rovnice, Mladá Fronta, Praha 1984.

Základní metoda řešení funkcionálních rovnic je tzv. substituční. Spočívá, řečeno co nejobecněji, v následujícím postupu: Předpokládáme, že už máme nějaké řešení funkcionální rovnice, a vhodnou volbou proměnných se snažíme najít explicitní tvar tohoto řešení. Poté ověříme, zda takto získaná funkce dané funkcionální rovnici skutečně vyhovuje. Objasníme to na jednoduchém příkladu.

Příklad: Najděte všechny funkce $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, splňující $f(x+y)=f(x)+y$ pro každé $x,y\in\mathbb{R}$.
Řešení: Předpokládejme, že již máme nějakou funkci f řešící rovnici. Pak musí platit (označíme si $c=f(0)$ a dosadíme $x=0$ do zadání) $f(y)=c+y$. Naopak dosadíme-li funkci f v takto zjištěném tvaru do zadání, zjistíme, že $f(y)=c+y$ řeší rovnici pro každé $c\in\mathbb{R}$. Tím je úloha vyřešena.

Teď se budeme zabývat spojitými funkcemi. Přesnou definici uvádět nebudeme, postačí nám intuitivní představa. Spojité funkce si můžeme přibližně představit jako ty, jejichž graf lze nakreslit jedním tahem — je souvislý. V podstatě většina běžných funkcí je spojitých. Funkce $f(x)=x$ je spojitá. Platí, že součet a součin dvou spojitých funkcí je spojitý. Odtud lze indukcí odvodit, že libovolná polynomická funkce[1] je spojitá. Dále pro $f(x),g(x)$ spojité je funkce $\frac{f(x)}{g(x)}$ spojitá v těch bodech, kde $g(x)\neq 0$. Další spojité funkce jsou např. $\sin x,\cos x,a^x,\log_a x$ pro $a>0$. Je-li obor hodnot funkce $f(x)$ částí definičního oboru funkce $g(x)$, pak $g(f(x))$ je také spojitá. Dále je-li funkce $f(x)$ spojitá a ryze monotónní (rostoucí nebo klesající), pak i funkce inverzní k funkci $f(x)$ je spojitá. Pomocí těchto vlastností lze budovat z uvedených spojitých funkcí funkce nové.

Důležitá vlastnost spojitých funkcí je tzv. Darbouxova vlastnost nabývání mezihodnot. Je-li $f(x)$ spojitá, pak pro $x_1<x_2, f(x_1)\neq f(x_2)$ funkce $f(x)$ nabývá na intervalu (x_1,x_2) všech hodnot mezi $f(x_1),f(x_2)$. Důsledkem tohoto je tvrzení, že je-li $f(x_1)<0$ a $f(x_2)>0$ (nebo naopak), pak existuje číslo $x_0\in(x_1,x_2)$, pro něž $f(x_0)=0$.

Dále vyložíme tzv. Cauchyovu metodu řešení funkcionálních rovnic, ve kterých hledáme pouze spojitá řešení. Nejdřív ale budeme potřebovat několik pojmů a tvrzení.

Řekneme, že množina $M\subseteq\mathbb{R}$ je *hustá* v $\mathbb{R}$, jestliže pro každé $a,b\in\mathbb{R},a<b$ existuje číslo $m\in M$, pro které $m\in(a,b)$.

Tedy každý otevřený interval musí obsahovat nějaké číslo z husté množiny. Lze ukázat, že každý otevřený interval už nutně obsahuje nekonečně mnoho čísel libovolné husté množiny.

Lemma 1. *Množina $\mathbb{Q}$ všech racionálních čísel je hustá v $\mathbb{R}$.*

Důkaz: Nechť $a<b$ jsou libovolná reálná čísla. Jelikož $b-a>0$, tak jistě existuje $n\in\mathbb{N}$, pro které $n(b-a)>1$. Pak ale interval (na,nb) nutně obsahuje číslo $z\in\mathbb{Z}$, konkrétně např. $z=\lfloor na+1\rfloor$. Pak ale interval (a,b) obsahuje racionální číslo $\frac{z}{n}$. Tím je lemma 1 dokázáno.

[1] Tedy funkce, kterou lze vyjádřit ve tvaru $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$, kde $n\in\mathbb{N},a_n\neq 0$.

Podobně lze ukázat, že množina všech dyadických racionálních čísel, tedy těch, jež je možno vyjádřit ve tvaru $\frac{z}{2^n}$, kde $z \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}_0$, je hustá v $\mathbb{R}$.

Lemma 2. *Nechť $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jsou spojité funkce a množina $M \subseteq \mathbb{R}$ je hustá v $\mathbb{R}$. Navíc platí $f(m) = g(m)$ pro každé $m \in M$. Pak platí $f(x) = g(x)$ pro každé $x \in \mathbb{R}$.*

Toto lemma je intuitivně jasné a nebudeme ho zde dokazovat. Pokud někoho zajímá precizní důkaz, najde ho např. v již zmíněné knížečce Funkcionální rovnice od L. Davidova.

Teď už můžeme formulovat samotnou Cauchyho metodu. Řekněme, že máme funkcionální rovnici, u které nás zajímají pouze spojitá řešení. Pak můžeme nejdříve určit všechna řešení dané funkcionální rovnice, která jsou definovaná pouze na nějaké husté množině (nejčastěji $\mathbb{Q}$), a pak využít spojitosti tohoto řešení k rozšíření na celou množinu $\mathbb{R}$ (lemma 2 nám říká, že to lze provést nanejvýš jedním způsobem). Objasníme to na následujícím příkladu.

Příklad: Najděte všechny spojité funkce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ splňující $f(x + y) = f(x)f(y)$ pro každé $x, y \in \mathbb{R}$.

Řešení: Předpokládejme, že máme nějaké řešení f této rovnice. Je-li pro nějaké t reálné $f(t) = 0$, pak volbou $x = z - t, y = t$ dostáváme $f(z) = f(z - t + t) = f(z - t)f(t) = 0$ pro každé $z \in \mathbb{R}$. Dále se tedy budeme zajímat jen o nenulová řešení. Předně pro každé $x \in \mathbb{R}$ platí $f(x) = f(\frac{x}{2} + \frac{x}{2}) = f(\frac{x}{2})f(\frac{x}{2}) = \left(f(\frac{x}{2})\right)^2 > 0$. Tedy funkce $f(x)$ nabývá všude kladných hodnot. Označme si $f(1) = c > 0$. Předpokládejme, že pro nějaké $n \in \mathbb{N}$ platí $f(n) = c^n$. Pak $f(n + 1) = f(n)f(1) = c^n c = c^{n+1}$. Odtud matematickou indukcí plyne $f(n) = c^n$ pro každé přirozené číslo n. Analogicky dokážeme $f(nx) = \left(f(x)\right)^n$ pro každé $n \in \mathbb{N}, x \in \mathbb{R}$. Tedy jsou-li $m, n \in \mathbb{N}$, pak $f(\frac{m}{n}) = \sqrt[n]{\left(f(\frac{m}{n})\right)^n} = \sqrt[n]{f(n\frac{m}{n})} = \sqrt[n]{f(m)} = \sqrt[n]{c^m} = c^{\frac{m}{n}}$. Tedy vztah $f(x) = c^x$ platí pro každé kladné racionální číslo x. Dále $f(0) = f(0 + 0) = \left(f(0)\right)^2 > 0$, tedy $f(0) = 1 = c^0$. Tudíž pro každé kladné racionální x platí $1 = f(0) = f(x - x) = f(x)f(-x) \Rightarrow f(-x) = \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{c^x} = c^{-x}$. Dostali jsme tedy platnost výrazu $f(x) = c^x$ pro všechna racionální čísla x. Definujeme-li funkci $g(x) = c^x$ pro všechna $x \in \mathbb{R}$, pak $f(x)$ i $g(x)$ jsou spojité funkce (o $f(x)$ to víme ze zadání), které se shodují v každém racionálním čísle. Jelikož množina $\mathbb{Q}$ všech racionálních čísel je podle lemmatu 1 hustá v $\mathbb{R}$, tak podle lemmatu 2 platí $f(x) = g(x)$ pro každé $x \in \mathbb{R}$. Tedy pro každé reálné číslo x platí $f(x) = c^x$, kde $c > 0$. Dosadíme-li funkci $f(x) = c^x$ do zadání, zjistíme, že $f(x) = c^x$ je skutečně řešením dané rovnice pro každé $c > 0$. Úloha má tedy spojitá řešení[2] $f(x) = 0$ a $f(x) = c^x$ pro každé $c > 0$. Tím je úloha vyřešena.

7. série

Téma:	Funkcionální rovnice
Termín odeslání:	21. DUBNA 2003

[2]Lze ukázat, že tato funkcionální rovnice má mnoho nespojitých řešení.

1. ÚLOHA (3 BODY)

Najděte všechny funkce $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ takové, že pro všechna $p, q \in \mathbb{Q}$ platí

$$f(p+q) + f(p-q) = p + 1 + f(pq).$$

2. ÚLOHA (3 BODY)

Najděte všechny funkce $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ takové, že pro všechna $x, y > 0$ platí

$$\log(x + y + 2f(xy)) = 2\log(f(x) + f(y)).$$

3. ÚLOHA (3 BODY)

Najděte všechny funkce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takové, že pro všechna x, y reálná platí

$$f(x+y) - 2f(x-y) + f(x) - 2f(y) = y - 2.$$

4. ÚLOHA (5 BODŮ)

Určete všechny funkce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takové, že pro všechna reálná x, y, z platí

$$\frac{1}{2}f(xy) + \frac{1}{2}f(xz) - f(x)f(yz) \geq \frac{1}{4}.$$

5. ÚLOHA (5 BODŮ)

Najděte všechny dvojice funkcí $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takové, že pro všechna reálná x, y platí

$$f(x-y) = f(x)g(y) + f(y)g(x).$$

6. ÚLOHA (5 BODŮ)

Dokažte, že neexistuje funkce $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ taková, že pro všechna $m, n \in \mathbb{Z}$ platí

$$f(m + f(n)) = f(m) - n.$$

7. ÚLOHA (5 BODŮ)

Mějme funkce $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takové, že pro všechna x, y reálná platí $f(x+y)+f(x-y) = 2f(x)g(y)$, f není identicky rovna nule (tj. existuje z reálné takové, že $f(z) \neq 0$) a pro všechna x platí $|f(x)| \leq 1$. Dokažte, že pro všechna y platí $|g(y)| \leq 1$.

8. ÚLOHA (5 BODŮ)

Nalezněte všechny rostoucí funkce $f : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+$ takové, že pro všechna $x, y \geq 0$ platí

$$f(yf(x)) = x^2 f(xy).$$

✉ *Korespondenční seminář, KAM MFF UK, Malostranské náměstí 25, 118 00 Praha 1* ✉

Řešení 7. série

1. úloha (28, 26, 2.00, 3.0)

Najděte všechny funkce $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ takové, že pro všechna $p, q \in \mathbb{Q}$ platí

$$f(p+q) + f(p-q) = p + 1 + f(pq).$$

Nejprve si za p a q dosadíme nulu, dostaneme $f(0) + f(0) = 1 + f(0)$, a tedy $f(0) = 1$. Nyní si za q dosadíme nulu, p nechť je libovolné, máme $f(p) + f(p) = p + 1 + 1$. Vidíme, že jediný kandidát na hledanou funkci je $f(p) = \frac{p+2}{2}$. Ověřme, zda tato funkce splňuje původní rovnici.

$$f(p+q) + f(p-q) = p + 1 + f(pq),$$

$$\frac{p+q+2}{2} + \frac{p-q+2}{2} = p + 1 + \frac{pq+2}{2},$$

$$2p + 4 = 2p + 4 + pq.$$

Rovnost je splněna jen pro $pq = 0$, nalezená funkce proto není řešením a daná rovnice tak nemá žádné řešení.

Poznámky k došlým řešením: Většina řešení se podobala vzorovému. Za zmínku však stojí alternativní postup několika řešitelů, kteří dosazením $p = q = 0$ a $p = q = 2$ dospěli ke spornému $1 = f(0) = 3$, za což si vysloužili $+i$.

2. úloha (31, 12, 1.00, 1.0)

Najděte všechny funkce $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ takové, že pro všechna $x, y > 0$ platí

$$\log(x + y + 2f(xy)) = 2\log(f(x) + f(y)).$$

Funkce logaritmus je prostá, proto $\log(x) = \log(y)$, právě když $x = y$ (a $x > 0$). Tím dostáváme rovnici

$$x + y + 2f(xy) = (f(x) + f(y))^2,$$

přičemž funkce f bude řešením původní rovnice, pokud bude řešením této rovnice a výraz $f(x) + f(y)$ bude kladný pro všechna $x, y \in \mathbb{R}^+$ (aby byl definovaný logaritmus). Položíme-li $x = y$, vidíme, že musí být $f(x) > 0$ pro všechna $x \in \mathbb{R}^+$. Dosaďme $x = y = 1$, dostaneme tak kvadratickou rovnici pro $f(1)$ s řešením $\frac{1 \pm 3}{4}$, vyhovuje jen $f(1) = 1$. Nyní nechť $y = 1$ a x je libovolné, dostaneme rovnici

$$x + 1 + 2f(x) = (f(x) + 1)^2,$$

což je kvadratická rovnice s kladným řešením $f(x) = \sqrt{x}$. To je tedy jediný kandidát na hledanou funkci, dosadíme-li tuto funkci do zadání, vidíme, že vyhovuje. Funkce $f(x) = \sqrt{x}$ je tedy jediným řešením původní rovnice.

Poznámky k došlým řešením: Správný výsledek měli téměř všichni, správné řešení neměl téměř nikdo. Mezi nejčastější chybu patřila tvrzení typu $f(x) = \pm\sqrt{x}$, máme tedy dvě možné funkce, $f(x) = \sqrt{x}$ je první a $f(x) = -\sqrt{x}$ je druhá. To ovšem není pravda, těch funkcí vyhovující podmínce $f(x) = \pm\sqrt{x}$ je mnohem více. Například funkce $f(x) = \sqrt{x}$ pro x přirozené a $f(x) = -\sqrt{x}$ pro ostatní kladná reálná x požadovanou podmínku také splňuje. Za tuto chybu (pokud se nedala snadno opravit) jsem strhával dva body. Další častou chybou bylo dosazování nuly, napříč tomu, že funkce byla definována pouze pro kladná reálná čísla (což mělo svůj význam kvůli logaritmům – většina řešitelů si myslela, že logaritmy v zadání jsou jen pro okrasu a bez ošetřování nějakých podmínek se jich zbavili). I za dosazování nuly jsem strhával dva body, neboť takto byla řešena zcela jiná úloha. Při kumulování více chyb se občas stalo, že i řešení se správným výsledkem bylo za nula bodů. Téměř nikdo (z těch, kteří zkoušku dělali) se také nezabýval tím, že při zkoušce dosazuje do logaritmů kladná čísla (ono to často bylo vidět, ale je potřeba to zmínit), a tak jsem se nakonec rozhodl udělovat $+i$ těm, kteří se o tom, že kladná čísla dosazují, zmínili.

3. úloha (27, 15, 1.00, 2.0)

Najděte všechny funkce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takové, že pro všechna x, y reálná platí

$$f(x+y) - 2f(x-y) + f(x) - 2f(y) = y - 2.$$

Zvolíme-li $x = y = 0$, dostaneme $-2f(0) = -2$, tedy $f(0) = 1$. Nyní nechť x je nulové a y libovolné, vyjde vztah

$$-f(y) - 2f(-y) = y - 3. \qquad (\heartsuit)$$

Dále vezmeme opět x nulové a y tentokráte s opačným znaménkem (tedy „$y = -y$“), po úpravě dostaneme $f(-y) = -2f(y) + y + 3$, po dosazení tohoto vztahu do $(\heartsuit)$ vyjde $f(y) = y + 1$. Toto je jediný kandidát na hledanou funkci, dosazením do původního zadání zjistíme, že tato funkce opravdu vyhovuje, $f(x) = x + 1$ je tudíž jediným řešením dané rovnice.

Poznámky k došlým řešením: Za důkaz, že funkce musí splňovat $f(x) = x + 1$, jsem dával 2 body a za nějaké nalezení (např. si někteří řešitelé řekli, že by funkce mohla být lineární) této funkce a důkaz, že tato funkce rovnici vyhovuje, jeden bod. Někteří řešitelé zkoušeli dokázat, že funkce musí být lineární nahlédnutím na zadanou rovnost nebo na rovnici $f(2x) = f(x) + x$, kterou získali po dosazení $x = y$. Jenže ani tato rovnost nedokazuje, že funkce musí být lineární. Např. $f(x) = x + 1$ pro $x \in Q$ a $f(x) = x$ pro $x \notin Q$ splňuje tuto rovnost (stačí si uvědomit, že $x \in Q \Leftrightarrow 2x \in Q$).

4. úloha (23, 20, 3.00, 5.0)

Určete všechny funkce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takové, že pro všechna reálná x, y, z platí

$$\frac{1}{2}f(xy) + \frac{1}{2}f(xz) - f(x)f(yz) \geq \frac{1}{4}.$$

Po substituci $x = y = z = 0$ dostáváme $f(0) - f(0)^2 \geq \frac{1}{4}$, tedy $(f(0) - \frac{1}{2})^2 \leq 0$ a $f(0) = \frac{1}{2}$. Stejně tak substitucí $x = y = z = 1$ získáme $f(1) = \frac{1}{2}$. Nechť dále $y = z = 0$ a x je libovolné, dostáváme (s využitím $f(0) = \frac{1}{2}$) $f(x) \leq \frac{1}{2}$. Volbou $y = z = 1$ vyjde $f(x) \geq \frac{1}{2}$. Dostali jsme tedy, že nutně $f(x) = \frac{1}{2}$, dosazením do původní nerovnice se přesvědčíme, že tato funkce je skutečně řešením.

Poznámky k došlým řešením: Většina řešení se podobala autorskému a byla ohodnocena plným počtem bodů. Jen bych rád připomenul, že funkcionální rovnice se obvykle řeší následovně:

Předpokládáme, že nějaké řešení existuje. Dále z rovnic postupně usoudíme, jaký má mít tvar, co musí splňovat a podobně. No a závěrem je potřeba ověřit předpoklad, tj. dosadit naši nalezenou funkci do rovnice. Mnozí jste na to zapomněli.

5. úloha (23, 11, 2.00, 1.0)

Najděte všechny dvojice funkcí $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takové, že pro všechna reálná x, y platí

$$f(x - y) = f(x)g(y) + f(y)g(x).$$

Nejprve si dosadíme za x nulu a y přejmenujeme na x, potom nulu za y při libovolném x, dostaneme tak dvě rovnice se shodnou pravou stranou, shodují se tedy i levé strany a máme $f(x) = f(-x)$. Nyní zvolíme $y = -x$, po úpravě dostaneme

$$f(2x) = f(x)(g(x) + g(-x)) \qquad (1),$$

dále volbou $y = x$ získáme

$$f(0) = 2f(x)g(x) \qquad (2)$$

a volbou $y = 0$ po drobné úpravě

$$f(x)(1 - g(0)) = f(0)g(x). \qquad (3)$$

Rozlišíme některé případy:

a) $f(0) \neq 0$. Potom z (2) plyne $f(x) \neq 0$, $g(x) \neq 0$, z (3) plyne $g(x) = af(x)$ pro nějaké a reálné nenulové, tedy g je také sudá. Potom z (1) a (2) plyne $f(2x) = 2f(x)g(x) = f(0)$, tedy $f(x) = c$, kde c je nenulová konstanta. Z (2) máme $c = 2cg(x)$, a tedy $g(x) = \frac{1}{2}$.

b) $f(0) = 0$. Pokud $f(x) = 0$ pro všechna x, potom zřejmě g může být libovolná funkce. Nechť tedy existuje c reálné takové, že $f(c) \neq 0$. Z (2) plyne pro každé x $f(x) = 0$ nebo $g(x) = 0$, tedy $g(c) = 0$. Ze sudosti f máme $f(-c) \neq 0$, a tedy $g(-c) = 0$. Dosazením $x = x$, $y = -c$ a $x = c$, $y = -x$ dostaneme dvě rovnice se shodnou levou stranou, rovnají se tedy i pravé strany a využitím sudosti f máme $g(x) = g(-x)$, tedy g je sudá. Potom ale z (1) máme $f(2x) = 2f(x)g(x)$, tedy $f(2x) = 0$ pro každé x, volbou $x = \frac{c}{2}$ dostaneme $f(c) = 0$, což je spor, vidíme tedy, že pokud $f(0) = 0$, potom $f(x) = 0$ pro všechna x.

Řešením jsou tedy dvojice funkcí $f(x) = c$, $c \in \mathbb{R}$, $g(x) = \frac{1}{2}$ a $f(x) = 0$, g libovolná.

Poznámky k došlým řešením: Překvapilo mě, kolik řešitelů se dopustilo následující (nebo podobné) chyby: Z toho, že $\forall x \in \mathbb{R} f(x)g(x) = 0$, usoudili, že buď $\forall x \in \mathbb{R} f(x) = 0$ nebo $\forall x \in \mathbb{R} g(x) = 0$. Uvědomte si, že to není pravda. Protipříkladem mohou být třeba $f = 0$ pro $x \leq 0$, $f(x) = x^2$ pro $x > 0$ a $g(x) = x^2$ pro $x \leq 0$, $g(x) = 0$ pro $x > 0$. f ani g nejsou identicky nulové, jejich součin přitom ano. Podobně jednoduchou úvahou lze vyvrátit jiný chybný (a také velmi častý) závěr, a to následující: Pokud $\forall x \in \mathbb{R} |f(x)| = \frac{1}{2}$, tak $\forall x \in \mathbb{R} f(x) = \frac{1}{2}$ nebo $\forall x \in \mathbb{R} f(x) = -\frac{1}{2}$. Zde si stačí uvědomit, že f nemusí být spojitá, takže klidně může být například v nule rovna $\frac{1}{2}$ a $-\frac{1}{2}$ všude jinde.

Za takovéto chyby jsem nemilosrdně strhávala body, neboť řešení neúměrně zjednodušovaly.

6. úloha (21, 15, 3.00, 5.0)

Dokažte, že neexistuje funkce $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ taková, že pro všechna $m, n \in \mathbb{Z}$ platí

$$f(m + f(n)) = f(m) - n.$$

Všimněme si, že pro $n \neq 0$ je $f(n) \neq 0$ (jinak bychom dostali $f(m) = f(m) - n$) a funkce f je neomezená (je $f(m+f(1)) = f(m) - 1$, $f(m+2f(1)) = f((m+f(1))+f(1)) = f(m+f(1)) - 1 = f(m) - 2$ a indukcí $f(m+kf(1)) = f(m) - k$. Nyní volme $n = 0$, dostaneme $f(m + f(0)) = f(m)$. Pokud by $f(0) \neq 0$, byla by f periodická s periodou $f(0)$, a tudíž by byla omezená, což je spor s předchozím zjištěním. Je tedy $f(0) = 0$. Volme dále $m = 0$, vyjde vztah $f(f(n)) = -n$. Z toho vidíme, že pro $f(-1) = a$ musí nutně být $f(a) = 1$, $f(1) = -a$, $f(-a) = -1$. Nyní volbou $n = a$, $m = 0$ dostáváme $f(1) = -a$, $f(2) = f(1+1) = f(1) - a = -2a$, indukcí $f(n) = -an$ pro $n \in \mathbb{N}$. Volbou $n = -a$, $m = 0$ získáme $f(-1) = a$, $f(-2) = f(-1-1) = f(-1) + a = 2a$, indukcí $f(-n) = an$ pro $n \in \mathbb{N}$. Vyšlo nám tedy, že pokud je nějaká funkce řešením zadané rovnice, potom je tvaru $f(z) = -az$, kde $a = f(1)$. Dosaďme tuto funkci do původní rovnice, dostáváme $-a(m + (-an)) = -am - n$, tedy po úpravě $a^2 = -1$. Řešení této rovnice spadá do komplexních čísel, konkrétně jsou to čísla $\pm i$, nicméně tato nevyhovují, protože funkční hodnoty takové funkce by byla imaginární čísla, nikoliv celá. Dokázali jsme tedy, že žádná vyhovující funkce neexistuje.

7. úloha **(11, 8, 3.00, 5.0)**

Mějme funkce $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takové, že pro všechna x, y reálná platí $f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)g(y)$, f není identicky rovna nule (tj. existuje z reálné takové, že $f(z) \neq 0$) a pro všechna x platí $|f(x)| \leq 1$. Dokažte, že pro všechna y platí $|g(y)| \leq 1$.

Důkaz provedeme sporem. Nechť tedy existuje c takové, že $|g(c)| > 1$. Potom dosazením $y = c$ dostaneme $f(x + c) + f(x - c) = 2f(x)g(c)$, takže $2|f(x)| < |f(x + c) + f(x - c)| \leq |f(x + c)| + |f(x - c)|$, tedy $|f(x + c)| > |f(x)|$ nebo $|f(x - c)| < |f(x)|$. Zvolme d takové, že $f(d) \neq 0$, BÚNO $|f(d+c)| > |f(d)|$ (případ $|f(d-c)| > |f(d)|$ se řeší stejně). Pro $|f(d+c)|$ máme $|f(d+c-c)| > |f(d+c)|$ nebo $f|(d+c+c)| > |f(d+c)|$. Vidíme, že první možnost nastat nemůže, je tedy $|f(d + 2c)| > |f(d + c)|$. Takto můžeme pokračovat a matematickou indukcí dostaneme $|f(d + (k+1)c| > |f(d + kc)|$ pro všechna k přirozená, posloupnost $(|f(d + kc)|)_{k=1}^{\infty}$ je tedy ostře rostoucí. Dále platí pro $k \in \mathbb{N}$ $|f(d + (k + 1)c)| - |f(d + kc)| > |f(d + kc)| - |f(d + (k - 1)c)|$, proto pro všechna k přirozená je $|f(d + (k + 1)c)| - |f(d + kc)| > (|f(d + c)| - |f(d)|) = b > 0$, a tedy $|f(d+kc)| > kb$. Potom ale pro $k > \frac{1}{b}$ dostaneme $f(d+kc) > 1$, což je spor s předpoklady úlohy. Tím jsme ukázali, že pro všechna $x \in \mathbb{R}$ je $|g(x)| \leq 1$.

Poznámky k došlým řešením: Řešitelé většinou dokazovali úlohu sporem – za předpokladu existence reálného čísla x, pro které je $|g(x)| > 1$, našli číslo y, pro něž $|f(y)| > 1$), nebo požadovanou nerovnost dokázali přímo s využitím suprema funkce f, případně oba postupy kombinovali. Tři řešitelé při výpočtech používali maximum funkce $f(x)$ (resp. $|f(x)|$) na množině reálných čísel, to ale na rozdíl od suprema nemusí existovat.

8. úloha **(16, 12, 3.00, 3.0)**

Nalezněte všechny rostoucí funkce $f : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+$ takové, že pro všechna $x, y \geq 0$ platí

$$f(yf(x)) = x^2 f(xy).$$

Zvolme $y = 1$, dostáváme $f(f(x)) = x^2 f(x)$. Pokud $f(a) = f(b)$, je z předešlého vzorečku $a^2 = b^2$, a tedy $a = b$ vzhledem k definičnímu oboru, funkce f je prostá. Nyní nechť $y = f(z)$, máme $f(f(z)f(x)) = x^2(xf(z)) = x^2z^2f(xz) = f(f(xz))$, a tedy $f(xz) = f(x)f(z)$. Nechť pro nějaké x je $f(x) > x^2$. Potom $f(f(x)) > f(x^2) = f(x)f(x)$, ale $f(f(x)) = x^2 f(x)$, tedy $x^2 f(x) > f(x)f(x)$ a $x^2 > f(x)$, což je spor. Obdobně nechť $f(x) < x^2$, potom $f(f(x)) < f(x^2) = f(x)f(x)$, $f(f(x)) = x^2 f(x)$ a dostáváme $x^2 < f(x)$, což je opět spor. Je tedy nutně $f(x) = x^2$ pro všechna $x \in \mathbb{R}_0^+$, dosadíme-li tuto funkci do zadání, vidíme, že vyhovuje, je proto jediným řešením dané úlohy.

Poznámky k došlým řešením: Všetci riešitelia našli riešenie úlohy $f(x) = x^2$, asi polovica aj dokázala, že je jediné. Stručné pekné riešenia, v ktorých riešiteľ väčšinou ukázal, že $\frac{f(x)}{x} > x$ aj $\frac{f(x)}{x} < x$ (pre nejaké $x > 0$) vedie ku sporu s rastúcosťou f, si vyslúžila $+i$. Najčastejšou chybou bolo, keď riešiteľ dokázal $f(x) = x^2$ len pre x nejakého tvaru (napr. $x = f(y) \cdot y$, kde $y \in \mathbb{R}_0^+$), no nedokázal, že všetky $x \in \mathbb{R}_0^+$ sa dajú v tomto tvare zapísať.