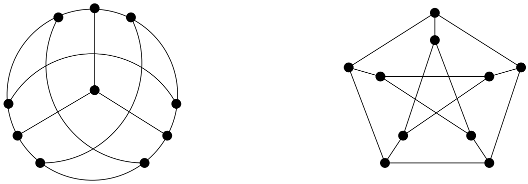
1. seriálová série

Téma: Teorie grafů

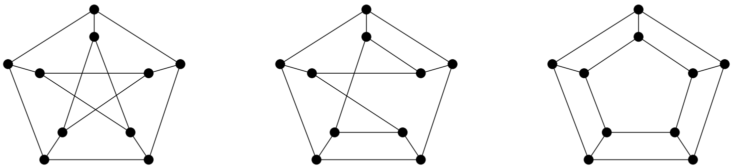
Termín odeslání: 6. ledna 2002

1. Úloha (5 bodů)

(a) Dokažte, že grafy na následujícím obrázku jsou isomorfní.



(b) Dokažte, že žádné dva z grafů na následujícím obrázku nejsou isomorfní.



2. Úloha (5 bodů)

(a) Dokažte podrobně tvrzení z cvičení 3.

(b) Dokažte podrobně tvrzení z cvičení 4.

3. Úloha (5 bodů)

(a) Rozhodněte, které z následujících posloupností jsou skóre nějakého grafu.

$$(1, 2, 3, 4, 5), \quad (1, 2, 3, 4, 5, 5, 5, 5).$$

Pro posloupnosti, které jsou skóre nějakého grafu, najděte příklad vhodného grafu s daným skóre.

(b) V závislosti na n rozhodněte, zda je posloupnost

$$(\underbrace{3, 3, \ldots, 3}_{n-\text{krát}}, 1)$$

skóre nějakého grafu. V případě, že ano, najděte příklad vhodného grafu s daným skóre.

2. seriálová série

Téma: Teorie grafů

Termín odeslání: 10. BŘEZNA 2003

4. ÚLOHA (5 BODŮ)

(a) Dokažte lemma 4 ze seriálu.

(b) Zjistěte, kolik existuje vzájemně neisomorfních stromů na šesti vrcholech. Nakreslete příklady všech.

5. ÚLOHA (5 BODŮ)

(a) Dokažte větu 4 ze seriálu.

(b) Nechť je dáno přirozené číslo k. Představme si n políček, z nichž v každém je napsána nula nebo jednička a která jsou uspořádána do kruhu (jako u rulety). Vybereme-li si jedno z políček a přečteme k po sobě jdoucích políček počínaje vybraným, dostaneme posloupnost nul a jedniček délky k. Zjistěte, pro jaké největší n (v závislosti na k) je možné vyplnit políčka nulami a jedničkami takovým způsobem, že žádné dvě takto vzniklé posloupnosti nul a jedniček délky k příslušné různým počátečním políčkům se neshodují.

6. ÚLOHA (5 BODŮ)

Řekneme, že orientovaný graf G je *slabě souvislý*, pokud jeho symetrizace $\mathrm{sym}(G)$ je souvislý (neorientovaný) graf. Řekneme, že orientovaný graf G je *silně souvislý*, pokud pro každé dva jeho vrcholy x a y v grafu G existuje orientovaná cesta, která začíná ve vrcholu x a končí ve vrcholu y.

(a) Najděte příklad orientovaného grafu, který je slabě souvislý, ale není silně souvislý.

(b) Dokažte, že vyvážený orientovaný graf je slabě souvislý právě tehdy, když je silně souvislý.

3. seriálová série

Téma: Teorie grafů

Termín odeslání: 12. KVĚTNA 2003

7. ÚLOHA (5 BODŮ)

(a) Dokažte větu 7 ze seriálu.

(b) V závislosti na čísle n určete maximální možný počet hran grafu G na n vrcholech, který má barevnost 2.

8. ÚLOHA (5 BODŮ)

(a) Dokažte větu 8 ze seriálu.

(b) Určete chromatický polynom grafu C_n (kružnice na n vrcholech, $n \geq 3$).

9. ÚLOHA (5 BODŮ)

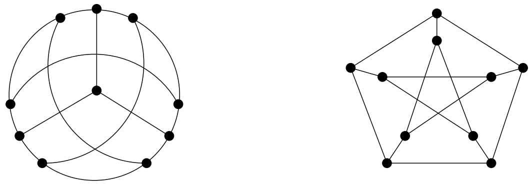
(a) Dokažte větu 14 (*ii*) ze seriálu.

(b) Najděte rovinný graf, jehož všechny vrcholy mají stupeň pět. Dokažte, že každý takový graf má alespoň 12 vrcholů.

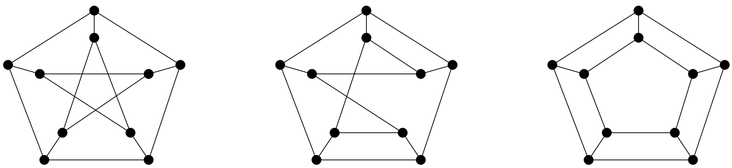
Řešení 1. části seriálu

1. úloha (42, 40, 4.00, 5.0)

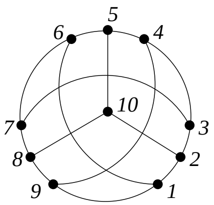
(a) Dokažte, že grafy na následujícím obrázku jsou isomorfní.

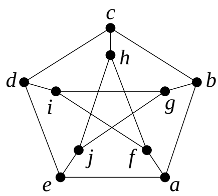


(b) Dokažte, že žádné dva z grafů na následujícím obrázku nejsou isomorfní.



(a) Označíme si vrcholy obou grafů tak, jako na následujícím obrázku.





Řešením naší úlohy je např. zobrazení, které přiřazuje vrcholům levého grafu vrcholy pravého grafu podle následujícího schématu (možností je samozřejmě více):

$$
\begin{array}{rr}
1 \to a & 6 \to e \\
2 \to b & 7 \to j \\
3 \to g & 8 \to h \\
4 \to i & 9 \to f \\
5 \to d & 10 \to c
\end{array}
$$

K úplnému řešení již schází jen rutinní ověření, že uvedené zobrazení je isomorfismus. To přenecháváme čtenáři.

Poznámka. Na uvedený isomorfismus lze přijít např. následujícím postupem. Zkusíme zobrazit vrchol 1 na vrchol a (jelikož graf v pravé části obrázku je dosti symetrický, můžeme si obraz vrcholu 1 takto vybrat). Nyní sousedy vrcholu 1 (tj. vrcholy 2, 6 a 9) musíme zobrazit na sousedy vrcholu a (tedy b, e a f). Zkusíme to v nějakém pořadí a pokračujeme analogickým způsobem dále tak dlouho, až dostaneme isomorfismus celého grafu.

(b) Úlohu by jistě bylo možné vyřešit tak, že pro každou dvojici zadaných grafů a pro každé vzájemně jednoznačné zobrazení mezi množinami jejich vrcholů bychom ověřili, že se nejedná o isomorfismus. Tento způsob by však byl velmi zdlouhavý (vzájemně jednoznačných zobrazení mezi množinami vrcholů je 10!) a neelegantní, i kdybychom využívali některých symetrií zadaných grafů. Ukážeme, že jistá vlastnost, která se při isomorfismu grafů zachovává, není společná zadaným grafům. Všimněme si, že zadané grafy mají všechny stejný počet vrcholů, hran, stejné skóre a jsou všechny souvislé. Musíme tedy využít nějaké jiné vlastnosti.

Předpokládejme pro spor, že některé dva z grafů na obrázku v zadání jsou isomorfní. Využijeme tvrzení z cvičení 3 ze seriálu. Podle něj mají tyto dva grafy tytéž podgrafy. Speciálně tedy mají stejný počet kružnic délky 4. Všimněme si, že všechny tři grafy mají některé vlastnosti stejné. Skládají se z „vnitřní“ a „vnější“ kružnice délky 5, každý vrchol vnitřní kružnice je spojen s právě jedním vrcholem vnější kružnice. Je tedy jasné, že kružnice délky 4 v libovolném z grafů nemůže používat pouze vrcholy vnitřní kružnice ani pouze vrcholy vnější kružnice. Stejnětak nemůže obsahovat jen jeden vrchol vnitřní (resp. vnější) kružnice, protože žádný vrchol vnitřní (resp. vnější) kružnice nesousedí se dvěma vrcholy vnější (resp. vnitřní) kružnice. Každá kružnice délky 4 v našich grafech je tedy tvořena dvojicí hran spojujících vnitřní a vnější vrchol, jejichž vnější (resp. vnitřní) konce jsou spojené hranou. Čtenář již snadno nahlédne, že taková dvojice v levém grafu neexistuje, v prostředním grafu existují dvě a v pravém grafu jich existuje pět. Je tedy vidět, že v našich grafech existují různé počty kružnic délky 4, a tedy tyto grafy nemají stejné podgrafy a nemohou být isomorfní (viz řešení 2. úlohy).

2. úloha (33, 28, 2.00, 3.0)

(a) Dokažte podrobně tvrzení z cvičení 3.

(b) Dokažte podrobně tvrzení z cvičení 4.

(a) Nechť tedy grafy G a H jsou isomorfní a buď $f : V(G) \to V(H)$ jejich isomorfismus. Dokážeme dokonce, že existuje vzájemně jednoznačné zobrazení F, které podgrafu G' grafu G přiřadí podgraf H' grafu H takový, že G' a H' jsou spolu isomorfní. Nechť tedy G' je podgraf grafu G. Definujeme jeho obraz H' při zobrazení F následujícím způsobem. Stačí definovat odděleně množiny $V(H')$ a $E(H')$. Definujeme

$$V(H') = \{f(v); v \in V(G')\} \text{ a } E(H') = \{\{f(u), f(v)\}; u, v \in V(G') \text{ a } \{u, v\} \in E(G')\},$$

tedy vrcholy grafu H' dostaneme jako obrazy vrcholů grafu G' při zobrazení f a hrany grafu H' dostaneme také jako „obrazy" hran grafu G' při zobrazení f (přesněji – pro každou hranu grafu G' zobrazíme její konce a tak získáme konce hrany grafu H'). Nyní již jen musíme ověřit, že takto definované zobrazení F je vzájemně jednoznačné zobrazení mezi podgrafy grafu G a podgrafy grafu H a že pro každý podgraf G' grafu G jsou grafy G' a $H' = F(G')$ isomorfní.

Poslední vlastnost je hned vidět. Zúžíme-li zobrazení f na množinu $V(G')$, dostaneme isomorfismus grafů G' a $H' = F(G')$, jak čtenář snadno ověří.

Ověříme také, že zobrazení F je prosté. Máme-li dva různé podgrafy G_1 a G_2 grafu G, pak se tyto dva grafy liší v množině svých vrcholů nebo v množině svých hran. Nechť např. $x \in V(G)$ je vrchol grafu G_1 a není vrchol grafu G_2. Pak podle definice zobrazení F bude $f(x)$ vrchol grafu $H_1 = f(G_1)$ a nebude vrchol grafu $H_2 = f(G_2)$. Analogický argument použijeme i v případě, kdy se grafy G_1 a G_2 neliší v množině vrcholů, ale liší se v množině hran.

Zbývá tedy ověřit, že zobrazení F je na. Nechť je tedy H' podgraf grafu H. Najdeme G' podgraf grafu G takový, že $F(G') = H'$. Definujeme

$$V(G') = \{v; f(v) \in V(H')\} \text{ a } E(G') = \{\{u, v\}; f(u), f(v) \in V(H') \text{ a } \{f(u), f(v)\} \in E(H')\}.$$

Snadno vidíme, že $F(G') = H'$.

(b) Nejprve dokážeme pomocné lemma.

Lemma. Nechť v grafu G existuje cesta mezi vrcholy x a y a mezi vrcholy y a z. Pak také v grafu G existuje cesta mezi vrcholy x a z.

Důkaz. Buď $P = (x = u_1, e_1, u_2, e_2, \ldots, e_{k-1}, u_k = y)$ cesta v grafu G mezi vrcholy x a y a buď $Q = (y = v_1, f_1, v_2, f_2, \ldots, f_{l-1}, v_l = z)$ cesta v grafu G mezi vrcholy y a z. Všimněme si, že cesty P a Q mají společný vrchol, totiž $u_k = y = v_1$. Buď tedy k' nejmenší index takový, že vrchol $u_{k'}$ je vrcholem cesty P i cesty Q. Buď l' takový index, že $v_{l'} = u_{k'}$. Z definice čísel k' a l' je zřejmé, že v posloupnosti

$$(x = u_1, e_1, u_2, e_2, \ldots, e_{k'-1}, u_{k'} = v_{l'}, f_{l'}, v_{l'+1}, f_{l'+1}, \ldots, f_{l-1}, v_l = z)$$

se neopakují vrcholy (a tedy ani hrany), a tedy že tato posloupnost je cesta v grafu G mezi vrcholy x a z. Tím je lemma dokázané.

Poznámka. Rozmyslete si, že toto lemma zůstává v platnosti i v případech, kdy některé dva z vrcholů x, y a z (případně všechny) jsou si rovny. Každý vrchol x v grafu G je sám se sebou spojený cestou – totiž cestou délky nula obsahující pouze vrchol x.

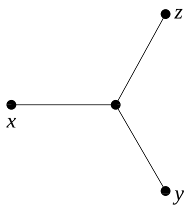
Nyní již můžeme dokázat tvrzení z cvičení 4 ze seriálu. Nechť jsou tedy x a y vrcholy grafu G. Rozlišíme dvě možnosti:

(1) Vrchol y není v grafu G dosažitelný z vrcholu x. Dokážeme, že pak jsou množiny $K[x]$ a $K[y]$ disjunktní. Pro spor předpokládejme, že tomu tak není a že existuje vrchol z společný množinám $K[x]$ a $K[y]$. Pak ale podle definice množin $K[x]$ a $K[y]$ v grafu G existují cesty mezi vrcholy x a z a mezi vrcholy y a z. Podle právě dokázaného lemmatu (uvědomme si, že cesta z vrcholu y do vrcholu z je také – uvažujeme-li příslušnou posloupnost vrcholů a hran v opačném pořadí – cestou z vrcholu z do vrcholu y) existuje cesta mezi vrcholy x a y. Tedy vrchol y je v grafu G dosažitelný z vrcholu x. Tím dostáváme kýžený spor.

(2) Vrchol y je v grafu G dosažitelný z vrcholu x. Tedy mezi vrcholy x a y existuje cesta. Dokážeme, že v tomto případě platí $K[x] = K[y]$. Předpokládejme pro spor, že tomu tak není. Pak bez újmy na obecnosti existuje vrchol z, který je obsažen v množině $K[y]$, ale není obsažen v množině $K[x]$. Pak tedy v grafu G mezi vrcholy y a z existuje cesta. Zároveň mezi vrcholy x a y v grafu G také existuje cesta. Podle dokázaného lemmatu existuje v grafu G také cesta mezi vrcholy x a z, a tedy $z \in K[x]$. Tím jsme dostali spor a úloha je vyřešena.

Poznámky k došlým řešením: Úloha měla dvě části, část (a) byla jednodušší a proto jsem její správné vyřešení odměňoval dvěma body; část (b) pak třemi body. S většinou řešení jsem však (hlavně v části (b)) spokojen nebyl. V části (a) patřila k nejčastějším chybám domněnka, že dva isomorfní grafy jsou nutně totožné. To samozřejmě není pravda. Typicky se dva isomorfní grafy liší jak v množině vrcholů, tak v množině hran.

V části (b) velká většina řešitelů podlehla mylnému dojmu, že vlastně není co dokazovat. Objevovala se argumentace typu „Pokud vrchol x leží v komponentě $K[y]$ a vrchol y v komponentě $K[z]$, pak také vrchol x leží v komponentě $K[z]$, protože z vrcholu z se dostanu do vrcholu x například tak, že půjdu nejdříve do vrcholu y a pak do vrcholu x“, což svědčí o špatném pochopení definice komponenty vrcholu x. V definici komponenty vrcholu x se požaduje, aby vrchol x a vrchol $y \in K[x]$ byly v grafu G spojeny *cestou*. Spojením cesty P spojující vrchol z s vrcholem y a cesty Q spojující vrchol y s vrcholem x nemusí vzniknout cesta. Viz například graf na následujícím obrázku.



Je dokonce vidět, že vrchol x a z nelze spojit cestou obsahující vrchol y. Jádro celého problému tedy spočívalo v důkazu tvrzení, že existuje-li cesta mezi vrcholy x a y a také cesta mezi vrcholy y a z, existuje pak také cesta mezi vrcholy x a z (viz vzorové řešení této úlohy). Tato vlastnost prostě neplatí automaticky pro jakýkoliv útvar „typu cesta“, jak se někteří řešitelé domnívali. Kdybychom například pro vrchol x grafu G definovali C-komponentu $C[x]$ grafu G jako podgraf grafu G indukovaný množinou vrcholů y, které leží s vrcholem x na společné kružnici, takovou pěknou vlastnost, že dvě C-komponenty jsou buď totožné anebo disjunktní bychom nedostali. (Podobná definice, kde vrcholy nahradíme hranami, ale tuto vlastnost zase má …)

3. úloha (44, 41, 3.00, 4.0)

(a) Rozhodněte, které z následujících posloupností jsou skóre nějakého grafu.

$$(1,2,3,4,5), \quad (1,2,3,4,5,5,5,5).$$

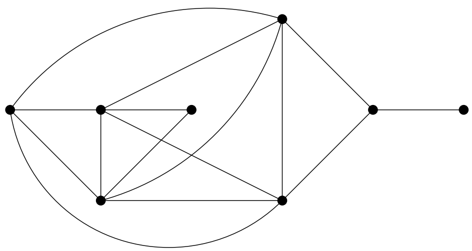
Pro posloupnosti, které jsou skóre nějakého grafu, najděte příklad vhodného grafu s daným skóre.
(b) V závislosti na n rozhodněte, zda je posloupnost

$$(\underbrace{3,3,\ldots,3}_{n-\text{krát}},1)$$

skóre nějakého grafu. V případě, že ano, najděte příklad vhodného grafu s daným skóre.

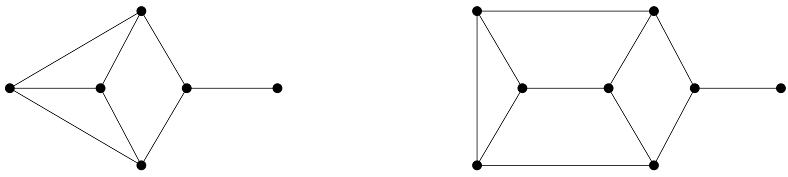
(a) Posloupnost $(1,2,3,4,5)$ není skóre grafu. To si uvědomíme např. tak, že v grafu o pěti vrcholech má každý vrchol stupeň nejvýše 4 – může být totiž spojený hranou pouze s ostatními čtyřmi vrcholy. Naše posloupnost však obsahuje číslo 5. Druhá možnost je nahlédnout, že v této posloupnosti se vyskytují právě tři lichá čísla, a tedy podle principu sudosti tato posloupnost nemůže být skóre grafu.

Posloupnost $(1,2,3,4,5,5,5,5)$ již skóre grafu je. Postupujeme analogicky jako v cvičení 5 v seriálu. Posloupnost postupně redukujeme na posloupnosti $(1,2,2,3,4,4,4)$, $(1,2,1,2,3,3)$ (po přerovnání podle velikosti $(1,1,2,2,3,3)$), $(1,1,1,1,2)$, $(1,1,0,0)$ (po přerovnání podle velikosti $(0,0,1,1)$) a $(0,0,0)$. Uvedený postup nám zároveň i napovídá, jak najít příklad grafu s daným skóre. Poslední posloupnost je skóre grafu se třemi vrcholy a žádnou hranou. K předposlední posloupnosti najdeme vhodný graf tak, že přidáme k sestrojenému grafu jeden vrchol, který spojíme s vrcholy odpovídající číslům v posloupnosti, které jsme zmenšili o jedna. Takto postupujeme dále, až se dostaneme k výslednému grafu, jehož skóre je zadaná posloupnost. Výsledný graf je zachycen na následujícím obrázku:



(b) Zadaná posloupnost obsahuje pouze lichá čísla. Má-li tato posloupnost být skóre nějakého grafu, musí podle principu sudosti mít sudou délku. Odtud vidíme, že pro n sudá zadaná posloupnost není skórem grafu. Uvažme nyní $n=1$. Posloupnost $(3,1)$ není skóre grafu, protože graf o dvou vrcholech nemůže obsahovat vrchol stupně většího než 1. Pro $n=3$ ukážeme, že posloupnost $(3,3,3,1)$ také není skóre grafu. Předpokládejme, že máme takový graf na čtyřech vrcholech. Vrchol stupně tři musí být spojen hranou se všemi ostatními vrcholy. Jsou-li v našem grafu tři vrcholy stupně tři, jsou již nutně všechny spojeny se čtvrtým vrcholem a ten tedy nemůže mít stupeň jedna. Nyní ukážeme, že pro $n \geq 5$ liché již zadaná posloupnost je skóre nějakého grafu. Nejdříve si uvědomíme, že existuje-li graf se správným skóre pro $n=k$, existuje také pro $n=k+4$. Stačí ke grafu pro $n=k$ přidat čtyři nové vrcholy a každou dvojici nových vrcholů spojit hranou (jinými slovy, ke grafu přidáme kopii úplného grafu na čtyřech vrcholech).

Nové vrcholy budou mít stupeň 3, takže je zřejmé, že vzniklý graf má správné skóre. Je tedy vidět, že stačí najít příklad vhodného grafu pro $n = 5$ a pro $n = 7$, existenci pro větší lichá n pak snadno dokážeme matematickou indukcí. Příklady vhodných grafů vidíme na následujícím obrázku (lze je získat podobným postupem jako v části (a)):



Příklady pro větší lichá n získáme dokreslením několika kopií úplného grafu na čtyřech vrcholech k levému nebo pravému grafu na obrázku.

Poznámky k došlým řešením: Až na několik výjimek řešitelům nedělalo používání věty o skóre žádné problémy. Tyto výjimky povětšinou zapomněly zkontrolovat její předpoklady (to se projevilo zejména v první části části a), kde věta o skóre použít nešla). V části b) byla nejčastějším řešením indukce. Její druhý krok byl buď založen na dělení (tj. „přikreslení vrcholu na hranu“) dvou hran a spojení takto vzniklých vrcholů, nebo byl podobný autorskému. Základem dalších řešení bylo vytvoření n-úhelníku s $\frac{n-1}{2}$ úhlopříčkami. Nemalá část si původní posloupnost upravila použitím věty o skóre. Za nalezení vhodného příkladu grafu jsem nakonec považoval i tento postup, protože graf se z věty o skóre dá zpětně rekonstruovat. Tento postup ale obvykle vedl k nepříliš elegantním řešením a ztrátě i.

Řešení 2. části seriálu

4. úloha (20, 18, 3.00, 3.0)

(a) Dokažte lemma 4 ze seriálu.

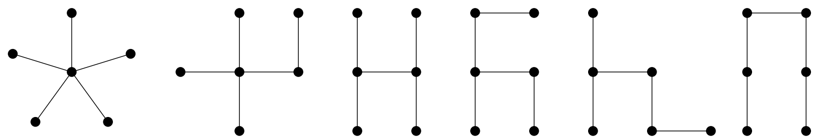
(b) Zjistěte, kolik existuje vzájemně neisomorfních stromů na šesti vrcholech. Nakreslete příklady všech.

(a) Buď tedy G graf a v jeho vrchol stupně 1. Dokážeme postupně obě implikace lemmatu 4. Nejprve předpokládejme, že graf G je strom. Musíme dokázat, že graf $G - v$ je také strom. Podle definice stromu musíme dokázat, že graf $G - v$ je souvislý a že neobsahuje kružnici jako podgraf. Druhá vlastnost je evidentní, protože graf $G - v$ je podgraf grafu G, který podle definice stromu neobsahuje kružnici. Abychom dokázali, že graf $G - v$ je souvislý, stačí ukázat, že každé jeho dva vrcholy x a y jsou spojeny cestou. Vrcholy x a y jsou spojeny cestou P v grafu G, jelikož ten je podle definice stromu souvislý. Stačí ukázat, že cesta P neobsahuje vrchol v (a tedy ani jedinou hranu, která s vrcholem v sousedí). Všimněme si, že každý vnitřní vrchol z cesty P má stupeň alespoň 2, protože na cestě P sousedí se dvěma vrcholy. Jelikož vrchol v má v grafu G stupeň 1, je zřejmé, že nemůže ležet na cestě P. Je tedy vidět, že cesta P spojuje vrcholy x a y i v grafu $G - v$. Dokázali jsme tedy, že graf $G - v$ je souvislý. Tím je první implikace dokázána.

Pro důkaz druhé implikace předpokládejme, že graf $G - v$ je strom. Podobným způsobem jako v první části důkazu ukážeme, že graf G je strom. Předpokládejme nejdříve pro spor, že graf G

obsahuje kružnici C. Každý vrchol kružnice C sousedí se dvěma dalšími vrcholy kružnice C a má tedy v grafu G stupeň alespoň 2. Je tedy vidět, že kružnice C neobsahuje vrchol v, který má stupeň 1 (a neobsahuje tedy ani jedinou hranu, která s vrcholem v sousedí). Vidíme, že kružnice C je také podgrafem grafu $G - v$, což je spor s předpokladem, že graf $G - v$ je strom. Zbývá ukázat, že graf G je souvislý. Označme si x (jediný) vrchol, který v grafu G sousedí s vrcholem v. Jelikož graf $G - v$ je podle definice stromu souvislý, obsahuje komponenta $K[x]$ grafu G všechny vrcholy grafu $G - v$. Jelikož vrcholy v a x jsou spojeny hranou (tvořící cestu délky 1), obsahuje komponenta $K[x]$ také vrchol v. Je tedy vidět, že komponenta $K[x]$ obsahuje všechny vrcholy grafu G a graf G je tedy souvislý. Tím je celé lemma dokázané.

(b) Tuto úlohu lze řešit mnoha způsoby, např. opětovným používáním lemmatu 4 a vybudováním všech stromů o šesti vrcholech ze stromu tvořeného jedním vrcholem postupným připojováním koncových vrcholů. My si zde ukážeme trochu jiný způsob. Vrchol grafu G o k vrcholech má zřejmě stupeň nejvýše $k - 1$. Rozdělme si tedy stromy na šesti vrcholech podle maximálního stupně jeho vrcholů. Nejdříve zkoumejme stromy, které obsahují vrchol stupně 5. Takový vrchol má nutně pět sousedů které již nemohou být vzájemně spojeny hranou (jinak by v daném grafu existovala kružnice). Vidíme, že všechny takové stromy jsou isomorfní grafu vlevo na obrázku. Nyní zkoumejme stromy s maximálním stupněm 4. Vrchol stupně 4 sousedí se čtyřmi sousedy, kteří vzájemně nesousedí (podobně jako v předchozím případu). Poslední vrchol našeho stromu musí být spojen s právě jedním ze čtyř sousedů vrcholu stupně 4 (výsledný graf je souvislý a neobsahuje kružnici). Snadno tedy vidíme, že každý takový strom je isomorfní druhému grafu zleva na obrázku. Nyní zkoumejme stromy s maximálním stupněm 3. Podobným postupem zjistíme, že každý takový strom je isomorfní s třetím, čtvrtým nebo pátým grafem zleva na obrázku. Pokud má strom T maximální stupeň nejvýše 2, pak je to cesta. To si snadno uvědomíme např. použitím matematické indukce podle počtu vrcholů stromu T. Pokud má strom T jediný vrchol, pak je to pravda. Nyní předpokládejme, že tvrzení platí pro stromy o $k - 1$ vrcholech a mějme strom o k vrcholech s maximálním stupněm nejvýše 2. Podle lemmatu 3 víme, že strom T obsahuje nějaký list v. Graf $T - v$ je podle lemmatu 4 strom, maximální stupeň se odebráním vrcholu v nezvětšil. Graf $T - v$ je tedy cesta a jelikož vrchol v sousedící s vrcholem v má v grafu T stupeň nejvýše dva, musí být koncový vrchol cesty $T - v$. Je tedy zřejmé, že i graf T je cesta (viz graf vpravo na obrázku). Celkem jsme tedy ukázali, že každý strom se šesti vrcholy je isomorfní s jedním ze šesti vzájemně neisomorfních stromů na obrázku.



5. úloha (15, 13, 3.00, 4.0)

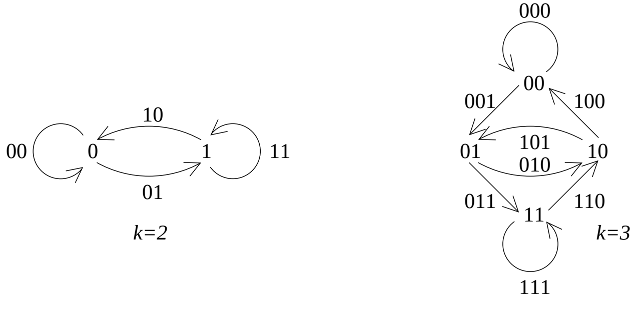
(a) Dokažte větu 4 ze seriálu.

(b) Nechť je dáno přirozené číslo k. Představme si n políček, z nichž v každém je napsána nula nebo jednička a která jsou uspořádána do kruhu (jako u rulety). Vybereme-li si jedno z políček a přečteme k po sobě jdoucích políček počínaje vybraným, dostaneme posloupnost nul a jedniček délky k. Zjistěte, pro jaké největší n (v závislosti na k) je možné vyplnit políčka nulami a jedničkami takovým způsobem, že žádné dvě takto vzniklé posloupnosti nul a jedniček délky k příslušné různým počátečním políčkům se neshodují.

(a) Důkaz věty 4 sleduje stejné myšlenky jako důkaz věty 3 (případ neorientovaných grafů). Proto ho zde uvedeme pouze ve stručnosti. Nejdříve ukážeme, že orientovaný eulerovský graf G je vyvážený a má souvislou symetrizaci. Nechť T je orientovaný eulerovský tah v grafu G a buď v vrchol grafu G. Při každém výskytu vrcholu v v tahu T sousedí s vrcholem v jedna vstupní hrana a jedna výstupní hrana. Je tedy vidět, že vstupní i výstupní stupeň vrcholu v je roven počtu výskytů vrcholu v v tahu T. Graf G je tedy vyvážený. Nyní ještě ukážeme, že symetrizace grafu G je souvislý graf. Mějme nějaké dva vrcholy x a y grafu G. Oba se v tahu T vyskytují alespoň jednou. Existuje tedy orientovaný tah T' začínající ve vrcholu x a končící ve vrcholu y. Uvažujme nyní nejkratší orientovaný tah U začínající ve vrcholu x a končící ve vrcholu y. Snadno dokážeme, že S je orientovaná cesta, podobně jako v důkazu lemmatu 2 ze seriálu. Symetrizace orientované cesty S je neorientovaná cesta v grafu $\mathrm{sym}(G)$ mezi vrcholy x a y. Ukázali jsme tedy, že graf $\mathrm{sym}(G)$ je souvislý.

Nyní dokážeme obtížnější implikaci. Předpokládejme, že orientovaný graf G je vyvážený a má souvislou symetrizaci. Vybereme si libovolný vrchol x v grafu G a uvažujeme nejdelší orientovaný tah (tedy tah obsahující největší počet hran) T začínající ve vrcholu x. Podobně jako v důkazu věty 3 dokážeme, že T končí také ve vrcholu x, jinak by díky vyváženosti grafu G bylo možné ho snadno prodloužit alespoň o jednu hranu. Nyní pro spor předpokládejme, že tah T neobsahuje všechny hrany grafu G. Podobně jako v důkazu věty 3 ukážeme díky souvislosti symetrizace grafu G, že existuje vrchol x, který se vyskytuje v tahu T, a orientovaná hrana e s počátečním vrcholem x, která se v tahu T nevyskytuje. Tah T nyní snadno prodloužíme stejně jako v důkazu věty 3.

(b) Ukážeme, že maximální n, pro které existuje vhodné rozmístění nul a jedniček, je rovno 2^k. Různých posloupností nul a jedniček délky k je 2^k. Pro $n > 2^k$ tedy z Dirichletova principu budou pro alespoň dvě pozice začátku příslušné posloupnosti stejné. Nyní ukážeme, že pro $n = 2^k$ už vhodné rozmístění nul a jedniček existuje. Definujeme orientovaný graf $G = (V, E)$ následujícím způsobem: vrcholy budou všechny posloupnosti nul a jedniček délky $k-1$, tedy $V = \{0,1\}^{k-1}$. Orientovaná hrana povede z vrcholu $v = (a_1, a_2, \ldots, a_{k-1})$ do vrcholu $w = (b_1, b_2, \ldots, b_{k-1})$ právě tehdy, když $a_2 = b_1$, $a_3 = b_2$, $\ldots$, $a_{k-2} = b_{k-1}$. Jinými slovy, orientované hrany budou uspořádané dvojice vrcholů tvaru $((a_1, a_2, \ldots, a_{k-1}), (a_2, a_3, \ldots, a_k))$; takovou hranu budeme pro krátkost zápisu ztotožňovat s posloupností $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$. Je tedy zřejmě $|E| = 2^k$. Pro představu vidíme graf G pro $k = 2$ a pro $k = 3$ na následujícím obrázku



Pro každý vrchol $v \in V$ zřejmě platí $\deg^+_G(v) = \deg^-_G(v) = 2$, protože vrchol $(a_1, a_2, \ldots)$ je počátečním vrcholem hran $(a_1, a_2, \ldots, a_{k-1}, 0)$ a $(a_1, a_2, \ldots, a_{k-1}, 1)$ a koncovým vrcholem hran $(0, a_1, a_2, \ldots, a_{k-1})$ a $(1, a_1, a_2, \ldots, a_{k-1})$. Ukážeme, že graf G je (dokonce silně) souvislý. Mějme vrcholy $u = (a_1, a_2, \dots, a_{k-1})$ a $v = (b_1, b_2, \dots, b_{k-1})$. Z vrcholu u do vrcholu v vede například tento orientovaný sled (zapsaný pomocí posloupnosti vrcholů a hran): $u = (a_1, a_2, \dots, a_{k-1}), (a_1, a_2, \dots, a_{k-1}, b_1), (a_2, a_3, \dots, a_{k-1}, b_1), (a_2, a_3, \dots, a_{k-1}, b_1, b_2), \dots,$ $(a_{k-1}, b_1, b_2, \dots, b_{k-2}),\ (a_{k-1}, b_1, b_2, \dots, b_{k-2}, b_{k-1}),\ (b_1, b_2, \dots, b_{k-1}) = v$. Orientovaný sled lze redukovat na orientovanou cestu. Tedy graf G je silně souvislý a vyvážený a podle věty 4 je eulerovský. Položme $K = 2^k = |E|$ a nechť $(e_1, e_2, \dots, e_K)$ je posloupnost hran v nějakém eulerovském tahu v grafu G. Hrana e_i je tvaru $e_i = (a_1^i, a_2^i, \dots, a_k^i)$. Hledané uspořádání čísel 0 a 1 v kruhu definujeme posloupností $(a_1^1, a_1^2, \dots, a_1^K)$ (tj. vzali jsme první prvek z každé posloupnosti e^i). Snadno si rozmyslíme, že začneme-li na i-té pozici a přečteme k po sobě jdoucích čísel, dostaneme posloupnost délky k odpovídající hraně e_i (díky vlastnostem eulerovského tahu je totiž první prvek hrany e_{i+1} roven druhému prvku hrany e_i atd.). Jelikož každá hrana – posloupnost $(a_1, \dots, a_k)$ čísel 0 a 1 – se v eulerovském tahu vyskytuje právě jednou, našli jsme vyhovující posloupnost čísel v kruhu délky 2^k. Tím je úloha vyřešena.

Poznámky k došlým řešením: Z celkových 5 bodů jsem dával 2 body za část (b) a 3 body za část (a), z toho 2 za implikaci G je vyvážený a $\mathrm{sym}(G)$ je souvislý $\Rightarrow$ G je eulerovský. Někteří řešitelé neměli jasno v pojmech orientovaný/neorientovaný graf/tah/sled/cesta/hrana a některé z nich zaměňovali, z čehož někdy plynula ztráta imaginárních bodů. V části (b) téměř všechna správná řešení kopírovala důkaz z knihy Kapitoly z diskrétní matematiky od Jiřího Matouška a Jaroslava Nešetřila, odkud je převzato i autorské řešení. Pavel Kocourek interpretoval zadání části (b) tak, že se k-tice mohou číst oběma směry, a tak řešil mnohem obtížnější úlohu (ale ne moc úspěšně).

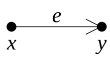
6. úloha **(19, 19, 4.00, 4.0)**

Řekneme, že orientovaný graf G je *slabě souvislý*, pokud jeho symetrizace $\mathrm{sym}(G)$ je souvislý (neorientovaný) graf. Řekneme, že orientovaný graf G je *silně souvislý*, pokud pro každé dva jeho vrcholy x a y v grafu G existuje orientovaná cesta, která začíná ve vrcholu x a končí ve vrcholu y.

(a) Najděte příklad orientovaného grafu, který je slabě souvislý, ale není silně souvislý.

(b) Dokažte, že vyvážený orientovaný graf je slabě souvislý právě tehdy, když je silně souvislý.

(a) Například graf na následujícím obrázku (sestává ze dvou vrcholů x a y, které jsou spojeny jednou orientovanou hranou e).



V tomto grafu zřejmě neexistuje orientovaná cesta z vrcholu y do vrcholu x. Symetrizace tohoto grafu je však již zřejmě (neorientovaná) cesta délky 1 a ta je souvislá.

(b) Je-li orientovaný graf G silně souvislý, je zřejmě i slabě souvislý. Stačí vlastně nahlédnout, že symetrizací orientované cesty je neorientovaná cesta. Máme-li dva vrcholy x a y v grafu $\mathrm{sym}(G)$, pak tyto dva vrcholy jsou spojeny orientovanou cestou v grafu G a jsou tedy také spojeny neorientovanou cestou v grafu $\mathrm{sym}(G)$.

Je-li orientovaný graf G vyvážený a slabě souvislý, pak je podle věty 4 graf G eulerovský. Mějme dva vrcholy x a y grafu G. Zřejmě v grafu G existuje orientovaný tah začínající ve vrcholu x a končící ve vrcholu y (stačí sledovat eulerovský tah v grafu G, který navštíví postupně oba vrcholy a je uzavřený). Uvažujme tedy nejkratší orientovaný tah U začínající ve vrcholu x

a končící ve vrcholu y. Podobně jako v důkazu lemmatu 2 vidíme, že U je orientovaná cesta začínající ve vrcholu x a končící ve vrcholu y. Graf G je tedy silně souvislý. Tím je důkaz hotov.

Poznámky k došlým řešením: Část (a) většině řešitelů problémy nedělala – hledaný příklad grafu je velmi jednoduchý. Hodnotil jsem ji dvěma body. V části (b) (na kterou zbyly tři body) většina řešitelů stejně jako ve vzorovém řešení využívala větu 4 dokazovanou v úloze 5, velké části řešení však chybělo do dokonalosti ověření, že obsahuje-li orientovaný graf orientovaný sled začínající ve vrcholu x a končící ve vrcholu y, obsahuje také orientovanou cestu začínající ve vrcholu x a končící ve vrcholu y (jakási orientovaná verze lemmatu 2).

Velmi elegantní řešení části (b) zcela nezávislé na větě 4 poslal *Saša Kazda*.

Řešení 3. části seriálu

7. úloha (21, 19, 3.00, 4.0)

(a) Dokažte větu 7 ze seriálu.

(b) V závislosti na číslu n určete maximální možný počet hran grafu G na n vrcholech, který má barevnost 2.

(a) Dokážeme postupně všechny potřebné implikace.

$(i) \Leftrightarrow (ii)$. Mějme graf $G = (V, E)$, který je bipartitní a nechť V_1 a V_2 jsou jeho partity (tj. množiny takové, že každá hrana grafu G spojuje vrchol množiny V_1 s vrcholem množiny V_2), jedna z nich může být případně i prázdná. Pak zřejmě můžeme obarvit vrcholy množiny V_1 barvou 1 a vrcholy množiny V_2 barvou 2. Jelikož vrcholy stejné partity nejsou spojeny hranou, je právě zkonstruované přiřazení skutečně obarvením grafu G nejvýše dvěma barvami.

Naopak máme-li graf $G = (V, E)$ barevnosti nejvýše 2, lze jeho vrcholy obarvit nejvýše dvěma barvami. Zvolme jako V_1 množinu těch vrcholů, které mají v tomto obarvení barvu 1 a jako V_2 množinu těch vrcholů, které mají v tomto obarvení barvu 2. Zřejmě množiny V_1 a V_2 tvoří disjunktní rozklad množiny V. Jelikož vrcholy stejné barvy nejsou spojené hranou, zřejmě každá hrana grafu G spojuje vrchol množiny V_1 s vrcholem množiny V_2. Graf G je tedy bipartitní.

$(ii) \Rightarrow (iii)$. Mějme graf G barevnosti nejvýše 2. Pak zřejmě každý jeho podgraf má také barevnost nejvýše 2. Předpokládejme pro spor, že graf G má podgraf isomorfní kružnici C_{2n+1} pro nějaké n přirozené. Pak tedy kružnici C_{2n+1} lze obarvit dvěma barvami. Předpokládejme bez újmy na obecnosti, že vrchol 1 kružnice C_{2n+1} je obarven barvou 1. Pak sousedící vrchol 2 musí mít barvu 2. Vrchol 3 sousedící s vrcholem 2 musí mít barvu 1. Opakováním tohoto postupu zjišťujeme, že barvy vrcholů na kružnici se musí pravidelně střídat – liché vrcholy mají barvu 1 a sudé barvu 2. To však není možné, protože vrchol $2n + 1$ i vrchol 1 jsou liché a sousedí. Kružnice C_{2n+1} má tedy barevnost alespoň 3. Tím dostáváme kýžený spor.

$(iii) \Rightarrow (ii)$. Předpokládejme, že graf G neobsahuje jako podgraf kružnici liché délky. Dokážeme, že potom graf G již nutně má barevnost nejvýše 2. Nejdříve dokážeme pomocné lemma:

Lemma. Nechť graf G obsahuje uzavřený sled liché délky. Pak obsahuje i kružnici liché délky.

Důkaz. Graf G obsahuje alespoň jeden uzavřený sled liché délky. Ze všech uzavřených sledů liché délky uvažujme ten nejkratší, tj. obsahující nejmenší počet hran (pokud je takových více, uvažujme libovolný z nich) a označme ho C. Je $C = (v_0, e_1, v_1, \ldots, v_{2n}, e_{2n+1}, v_{2n+1} = v_0)$

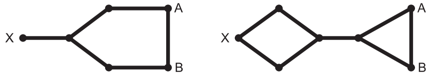
Ukážeme, že ve sledu C se již neopakují vrcholy (a tudíž ani hrany) a je to tedy kružnice liché délky. Předpokládejme pro spor, že $v_k = v_l$ pro nějaké $k < l$. Pak uzavřené sledy $C_1 = (v_k, e_{k+1}, v_{k+1}, \ldots, v_l)$ a $C_2 = (v_l, e_{l+1}, v_{l+1}, \ldots, v_{2n+1} = v_0, e_1, v_1, \ldots, v_k)$ mají dohromady délku $2n+1$. Jeden z nich má tedy lichou délku menší, než je délka C. Dostáváme tedy kýžený spor. Důkaz lemmatu je hotov.

Bez újmy na obecnosti lze předpokládat, že graf G je souvislý (stačí totiž dokázat, že každá jeho komponenta souvislosti lze obarvit nejvýše dvěma barvami – dva vrcholy z různých komponent nejsou spojené hranou). Zvolme si pevně vrchol v souvislého grafu G a přiřaďme mu barvu 1. Vrchol x grafu G nazveme *sudý*, pokud všechny cesty spojující vrchol x s vrcholem v mají sudou délku, *lichý*, pokud všechny cesty spojující vrchol x s vrcholem v mají lichou délku a *obojetný*, pokud není ani sudý ani lichý. Dokážeme, že graf G neobsahuje obojetné vrcholy. Pro spor předpokládejme, že vrchol x je obojetný. Pak existují cesty P_1 a P_2 spojující vrchol v a x, první je sudé délky, druhá je liché délky. Spojením těchto dvou cest vznikne uzavřený sled liché délky v grafu G. Podle právě dokázaného lemmatu existuje v grafu G kružnice liché délky, což je kýžený spor.

Nyní již stačí obarvit všechny sudé vrcholy grafu G barvou 1 a všechny liché vrcholy barvou 2. Dokážeme, že takto zkonstruované přiřazení barev vrcholům je korektní obarvení grafu G. Pro spor předpokládejme, že existují dva sousední vrcholy x a y, které jsou obarvené stejnou barvou. Pak zřejmě existují cesty P_x a P_y spojující vrchol v s vrcholem x (resp. y), které mají délky stejné parity. Spojením cesty P_x, P_y a hrany $\{x, y\}$ vznikne uzavřený sled liché délky v grafu G. Podle dokázaného lemmatu v grafu G existuje také kružnice liché délky, což je kýžený spor. Důkaz poslední implikace je tedy hotov.

(b) Graf $G = (V, E)$ na n vrcholech, který má barevnost 2 je podle právě dokázané věty 7 bipartitní. Množina jeho vrcholů lze tedy rozložit na disjunktní množiny V_1 a V_2 (označíme si jejich velikosti n_1 a $n_2 = n - n_1$) takové, že každá hrana spojuje vrchol z množiny V_1 s vrcholem z množiny V_2. Počet hran takového grafu tedy nepřevyšuje číslo $n_1 \cdot n_2$. Najdeme maximum funkce $f(n_1) = n_1(n - n_1)$. Funkce f je kvadratický polynom v proměnné n_1 se záporným vedoucím koeficientem a kořeny v bodech 0 a n. Jeho maximum je tedy v bodě $\frac{n}{2}$ (uprostřed mezi kořeny). Nás však zajímají pouze hodnoty $n_1 \in \mathbb{N}$. Pro n sudé je $\frac{n}{2}$ přirozené číslo a maximální hodnotu skutečně dostaneme volbou $n_1 = \frac{n}{2}$. Pro n liché si ještě musíme uvědomit, že funkce f je pro $n_1 < \frac{n}{2}$ rostoucí a pro $n_1 > \frac{n}{2}$ klesající a tedy maximální hodnotu dostaneme volbou $n_1 = \frac{n-1}{2}$ nebo $n_1 = \frac{n+1}{2}$ (v těchto dvou bodech má funkce f stejnou hodnotu). Celkem jsme dostali, že graf G barevnosti nejvýše 2 na n bodech má nejvýše $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor (n - \lfloor \frac{n}{2} \rfloor)$ hran. Ještě zbývá ověřit, že graf barevnosti 2 na n vrcholech o tolika hranách existuje. To je však již jednoduché. Stačí množinu V vrcholů grafu G rozdělit na dvě disjunktní množiny V_1 a V_2 velikosti $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ a $n - \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$. Hrany grafu G budou všechny hrany spojující vrchol množiny V_1 s vrcholem množiny V_2. Takto sestrojený graf G má zřejmě požadovaný počet hran a je bipartitní. Podle věty 7 má tedy barevnost nejvýše 2.

Poznámky k došlým řešením: Řešitelé této úlohy se často dopouštěli formálních chyb tvrzením typu: „Graf bez kružnic je strom.“ Správně les, strom musí být souvislý. „Jsou-li vrcholy a, x spojené cestou, b, x spojené cestou a a, b je hrana, pak $x, \ldots, a, b, \ldots, x$ je kružnice.“ Správně uzavřený sled, protože hrany i vrcholy se mohou opakovat, viz obrázek. Tyto chyby jsem opravoval, ale nestrhával jsem body. V části b) někteří řešitelé nedokázali, že jejich řešení je maximální, nebo jejich důkaz byl špatný. Za to šly body dolů.



8. úloha (12, 7, 2.00, 2.0)

(a) Dokažte větu 8 ze seriálu.

(b) Určete chromatický polynom grafu C_n (kružnice na n vrcholech, $n \geq 3$).

(a) Druhá část tvrzení věty 8, že pro každý graf G a každé nezáporné celé číslo $k < \chi(G)$ je $f_G(k) = 0$ je zřejmá z definice funkce f_G. Stačí tedy, když budeme dokazovat, že funkce f_G je normovaný polynom stupně $n = |V(G)|$ s celočíselnými koeficienty. Toto tvrzení budeme dokazovat matematickou indukcí podle počtu hran grafu G. Předpokládejme tedy nejprve, že graf G nemá žádnou hranu. Pak graf G má n vrcholů z nichž žádné dva nejsou spojeny hranou. Máme-li x barev, zřejmě lze graf G obarvit přesně x^n způsoby. Je tedy $f_G(x) = x^n$ a tvrzení věty 8 pro graf G platí.

Nyní předpokládejme, že máme graf G o $m > 0$ hranách a předpokládejme, že naše tvrzení platí pro všechny grafy o méně než m hranách. Nejdříve si zavedeme následující značení: Nechť G je graf a e jeho hrana. Symbolem $G - e$ budeme značit graf, který vznikne z grafu G odstraněním hrany e (má tedy stejnou množinu vrcholů jako graf G). Symbolem $G\%e$ budeme značit graf, který vznikne z grafu G tzv. kontrakcí hrany e. Nechť koncové vrcholy hrany e jsou u a v. Množina vrcholů graf $G\%e$ vznikne z množiny V vrcholů grafu G odstraněním vrcholů u a v a místo nich přidáním nového vrcholu w. Množina hran grafu $G\%e$ bude následující: vrcholy $p, q \neq w$ grafu $G\%e$ budou spojeny hranou právě tehdy, když byly spojeny hranou v grafu G. Vrchol $p \neq w$ bude spojený hranou v grafu $G\%e$ s vrcholem w právě tehdy, když byl v grafu G spojen s vrcholem u nebo s vrcholem v. Kontrakci hrany e si lze představit (v obrázkové reprezentaci grafu G) tak, že hranu e zkrátíme na nulovou délku, vrcholy u a v „splynou" v jeden vrchol w.

Nyní zpět k úloze. Graf G má alespoň jednu hranu. Zvolme si pevnou hranu grafu G a označme ji e a její koncové vrcholy u a v. Nechť je dán pevný počet barev x. Uvažujme nějaké obarvení grafu $G - e$ pomocí x barev. Rozlišíme dvě možnosti:

• Vrcholy u a v mají různou barvu. Pak naše obarvení grafu $G - e$ je zřejmě také obarvením grafu G.

• Vrcholy u a v mají stejnou barvu. Pak naše obarvení zřejmě jednoznačně odpovídá obarvení grafu $G\%e$, které vznikne tak, že všechny vrcholy grafu $G\%e$ kromě vrcholu w obarvíme stejně jako v grafu $G - e$ a vrchol w obarvíme společnou barvou vrcholů u a v.

Je tedy zřejmě vidět, že platí $f_{G-e}(x) = f_G(x) + f_{G\%e}(x)$ neboli $f_G(x) = f_{G-e}(x) - f_{G\%e}(x)$. Všimněme si, že grafy $G - e$ a $G\%e$ mají méně hran než graf G. Graf $G - e$ má n vrcholů a graf $G\%e$ má $n - 1$ vrcholů. Podle indukčního předpokladu je funkce f_{G-e} normovaný polynom stupně n s celočíselnými koeficienty a funkce $f_{G\%e}$ normovaný polynom stupně $n - 1$ s celočíselnými koeficienty. Jejich rozdíl je tedy zřejmě také normovaný polynom stupně n s celočíselnými koeficienty. Důkaz věty 8 je hotov.

(b) Nejdříve určíme chromatický polynom cesty P_n o n vrcholech. Mějme dán počet barev x a začněme barvit cestu od jednoho okraje. Krajní vrchol lze obarvit x barvami, jeho soused pak lze obarvit $x - 1$ barvami (musíme se vyhnout barvě krajního vrcholu), soused jeho souseda také $x - 1$ barvami, atd ... Vidíme, že $f_{P_n}(x) = x(x-1)^{n-1}$. Zvolme si nyní pevně hranu e grafu C_n. Zřejmě graf $C_n - e$ je isomorfní grafu P_n a pro $n \geq 4$ graf $C_n\%e$ grafu C_{n-1}. Pro $n = 3$ snadno určíme (jelikož graf C_3 je isomorfní grafu K_3) $f_{C_3}(x) = x(x-1)(x-2)$. Pro určení chromatických polynomů grafu C_n pro vyšší n užijeme vzoreček dokázaný v části (a) $f_G(x) = f_{G-e}(x) - f_{G\%e}(x)$ užitý pro graf $G = C_n$. Dostáváme $f_{C_n}(x) = f_{P_n}(x) - f_{C_{n-1}}(x)$. Ještě dosadíme $f_{P_n}(x) = x(x-1)^{n-1}$. Po dosazení několika málo prvních hodnot n odvodíme vzoreček $f_{C_n}(x) = (x-1)((x-1)^{n-1}+(-1)^n)$, který již snadno dokážeme matematickou indukcí.

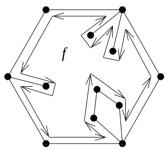
9. úloha (20, 18, 3.00, 4.0)

(a) Dokažte větu 14 (*ii*) ze seriálu.

(b) Najděte rovinný graf, jehož všechny vrcholy mají stupeň pět. Dokažte, že každý takový graf má alespoň 12 vrcholů.

(a) Myšlenka důkazu bude stejná jako v části (*i*) věty 14, několik technických odlišností však bude potřeba.

Pokud ke grafu G lze při zachování rovinnosti a zachování neexistence kružnice délky 3 přidat hranu, přidáme ji. Toto budeme opakovat tak dlouho, dokud již nebude možné žádnou hranu přidat. Podobně jako v části (*i*) je zřejmé, že pokud dokazovaná nerovnost platí pro vzniklý graf, platila i pro graf původní (který má stejně vrcholů a ne více hran). Bez újmy na obecnosti tedy náš vzniklý graf označíme G – stejně jako původní graf. Stejně jako v části (*i*) dokážeme, že graf G je souvislý. Pro každou stěnu f našeho grafu G a projděme vrcholy na hranici stěny f proti směru hodinových ručiček tak, jak je naznačeno na obrázku.



Rozlišíme dva případy:

• Při procházení některé stěny se některý vrchol v opakoval. Vynecháním vrcholu v a hran s ním sousedícím z grafu G dostaneme nesouvislý graf s komponentami danými množinami vrcholů V_1, V_2, … ,V_m, $m \geq 2$. Ke grafu G lze jistě přidat nějaká hrana mezi vrcholy různých komponent V_i při zachování rovinnosti, pro některé hrany v grafu G vznikne kružnice délky 3 – to nastane v případě, že bychom spojili dva vrcholy, které oba sousedí s vrcholem v. Jsou-li všechny komponenty V_i jednobodové, je zřejmě graf G strom a platí $|E| = |V| - 1 \leq 2|V| - 4$ pro $|V| \geq 3$. V takovém případě tedy vzorec platí. Můžeme tedy předpokládat, že $|V_1| \geq 2$. Uvažujme nějakou stěnu f grafu G, která má na své hranici nějaký vrchol z komponenty V_1 a také alespoň jeden vrchol z jiné komponenty. Vrchol $v_1 \in V_1$ na hranici f Každé dva vrcholy ležící je zřejmě spojen hranou s nějakým dalším vrcholem $v_2 \in V_1$ na hranici f. Jelikož graf G neobsahuje kružnici délky 3, alespoň jeden z vrcholů v_1 a v_2 není spojen hranou s vrcholem v. Tento vrchol lze spojit hranou uvnitř stěny f s nějakým vrcholem jiné komponenty, než V_1 tak, že vzniklý graf bude stále rovinný a nebude obsahovat kružnici délky 3. Dostali jsme spor s maximalitou grafu G.

• Při procházení každé stěny f grafu G se žádný vrchol neopakoval. Každá stěna f je tedy ohraničena kružnicí, která má zřejmě délku alespoň 4 (z maximality grafu G lze dokonce dokázat, že délka každé takové kružnice je 4 nebo 5). Vidíme, že v grafu G každá hrana sousedí s právě dvěma stěnami a každá stěna sousedí s alespoň čtyřmi hranami. Označíme-li si pro stěnu f

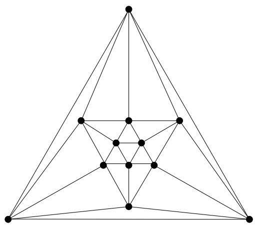
a hranu e symbolem $I(e,f)$ číslo 1 pokud hrana e leží na hranici f a 0 v opačném případě, dostáváme pro každou hranu e grafu G

$$\sum_{f\in F} I(e,f) = 2 \text{ a } \sum_{e\in E} I(e,f) \geq 4$$

pro každou stěnu f grafu G. Dohromady tedy dostáváme

$$2|E| = \sum_{e\in E}\sum_{f\in F} I(e,f) = \sum_{f\in F}\sum_{e\in E} I(e,f) \geq 4|F|.$$

Dosadíme-li vzniklou nerovnost $|E| \geq 2|F|$ do Eulerova vztahu, dostáváme $|E| \leq 2|V| - 4$.
(b) Požadavky zadání splňuje např. graf na následujícím obrázku (jde o tzv. graf pravidelného dvacetistěnu – viz závěrečný díl seriálu), který má dvanáct vrcholů:



Nyní zbývá ukázat, že každý rovinný graf G, jehož všechny vrcholy mají stupeň 5, má alespoň 12 vrcholů. Každý vrchol sousedí s pěti hranami. Každá hrana je sousedem dvěma vrcholům, je tedy zřejmé, že $5|V| = 2|E|$. Podle věty 14 (i) navíc platí nerovnost $|E| \leq 3|V| - 6$. Po vynásobení dvěma a dosazením za $2|E|$ dostáváme $|V| \geq 12$ což jsme chtěli dokázat.

Poznámky k došlým řešením: Drtivá většina řešitelů v části a) chybně předpokládala, že graf G má všechny stěny ohraničené kružnicí, čímž si postup značně zjednodušila. Někteří pak tvrdili, že na hranici každé stěny leží alespoň čtyři hrany a že každá hrana sousedí s právě dvěma stěnami, což také nemusí být pravda. Část b) dělala většině řešitelů mnohem menší problémy.

0