1. série

Téma: Rekurence

Termín odeslání: 13. října 2003

1. ÚLOHA (3 BODY)

Nechť $a_1 = 1$ a $a_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1}$ (tedy každý následující člen posloupnosti je součtem všech předchozích). Najděte $a_{20032004}$.

2. ÚLOHA (3 BODY)

Nechť $a_1 = \frac{1}{6}$ a pro $n > 1$ je $a_n = a_{n-1} + \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$. Dokažte, že pro každé přirozené číslo n je $a_n < \frac{1}{4}$.

3. ÚLOHA (3 BODY)

Rozhodněte, zda pro každé přirozené číslo n existuje posloupnost prvočísel $\{p_i\}_{i=1}^{n}$ splňující rekurentní formuli $p_i = p_1 \cdot p_2 \cdots p_{i-1} + 1$ pro $2 < i \le n$ (druhý člen je nezávislý na prvním!) .

4. ÚLOHA (5 BODŮ)

Nechť posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je dána předpisem $a_1 = 56$, $a_{n+1} = a_n - \frac{1}{a_n}$. Ukažte, že $a_n < 0$ pro nějaké $0 < n < 2003$.

5. ÚLOHA (5 BODŮ)

Posloupnost $\{G_n\}_{n=0}^{\infty}$ je definovaná takto: $G_0 = 0$, $G_1 = 0$, $G_2 = 1$ a pro $n \ge 3$ je $G_n = G_{n-1} + G_{n-2} + G_{n-3}$. Pro $n \ge 0$ označme $a_n = G_n^2$. Dokažte, že pro všechna $n \ge 6$ platí $a_n = 2a_{n-1} + 3a_{n-2} + 6a_{n-3} - a_{n-4} - a_{n-6}$.

6. ÚLOHA (5 BODŮ)

Nechť posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ splňuje $a_{n+1} = a_n + f(a_n)$, kde $f(m)$ značí součin cifer čísla m. Je posloupnost omezená pro všechna a_1 přirozená?

7. ÚLOHA (5 BODŮ)

Posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je zadána následovně: $a_1 = a_2 = 1$, $a_n = a_{a_{n-1}} + a_{n-a_{n-1}}$ pro $n \ge 3$. Určete hodnotu a_n pro $n = 2^k$, $k \in \mathbb{N}$.

8. ÚLOHA (5 BODŮ)

Posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je zadána rekurentně: $a_0 = a_1 = 1$, $(n+1)a_{n+1} = (2n+1)a_n + 3na_{n-1}$. Dokažte, že všechny členy posloupnosti jsou celá čísla.

Řešení 1. série

1. úloha (117, 55, 1,00, 1,0)

Nechť $a_1 = 1$ a $a_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1}$ (tedy každý následující člen posloupnosti je součtem všech předchozích). Najděte $a_{20032004}$.

Je $a_n = a_{n-1} + a_{n-2} + \cdots + a_1$, zároveň $a_{n-1} = a_{n-2} + \cdots + a_1$. Dosazením druhého vztahu do prvního dostáváme $a_n = 2a_{n-1}$, přičemž tato rovnost platí pro $n > 2$. Protože $a_2 = 1 = 2^{2-2}$, dostaneme snadno matematickou indukcí, že pro každé $n > 2$ je $a_n = 2^{n-2}$. Konkrétně tedy $a_{20032004} = 2^{20032002}$.

Poznámky k došlým řešením: Většina řešitelů dokazovala $a_n = 2^{n-2}$ tímto způsobem: $a_1 = 1$, $a_2 = 1 = 2^0$, $a_3 = 2 = 2^1$, $a_4 = 4 = 2^2$, ..., $a_n = 2^{n-2}$ nebo takto: $a_n = 2a_{n-1} = 2 \cdot 2 \cdot a_{n-2} = \cdots = 2^{n-2} \cdot a_2$, což není korektní matematický důkaz. Možná vám připadá, že řešení je vidět na první pohled, ale u takto lehkého příkladu očekáváme, že řešení napíšete pořádně. Tj. napíšete, že používáte matematickou indukci, a napíšete první a druhou část indukce. Úloha se dala pěkně řešit i pomocí geometrické posloupnosti, avšak ti, kteří ji použili, často přehlédli, že posloupnost je geometrická až od druhého členu.

2. úloha (71, 39, 1,00, 2,0)

Nechť $a_1 = \frac{1}{6}$ a pro $n > 1$ je $a_n = a_{n-1} + \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$. Dokažte, že pro každé přirozené číslo n je $a_n < \frac{1}{4}$.

Pokud si spočítáme několik prvních členů posloupnosti, může nás napadnout, že by mohlo platit $a_n = \frac{1}{4} - \frac{1}{2(n+1)(n+2)}$. Máme-li takovéto podezření, je snadné jej dokázat indukcí. Pro $n = 1$ vztah platí, $a_1 = \frac{1}{6} = \frac{1}{4} - \frac{1}{2(1+1)(1+2)}$. Nechť tvrzení platí pro $n = k - 1$, dokážeme jej pro $n = k$.

$$a_k = a_{k-1} + \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{4} - \frac{1}{2k(k+1)} + \frac{1}{k(k+1)(k+2)} =$$

$$= \frac{1}{4} - \frac{(k+2) - 2}{2k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{4} - \frac{k}{2k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{4} - \frac{1}{2(k+1)(k+2)}.$$

Protože $\frac{1}{2(n+1)(n+2)}$ je kladné pro všechna n přirozená, dokázali jsme též platnost tvrzení ze zadání.

Poznámky k došlým řešením: Asi polovina řešitelů pouze vyzkoušela několik prvních členů. To v žádném případě nelze považovat za důkaz. Ostatní buď nějak „uhodli“ vzorec pro částečný součet a korektně ho dokázali matematickou indukcí, nebo výraz rozložili na parciální zlomky, které se od sebe vzájemně odečetly.

3. úloha (52, 34, 1,00, 3,0)

Rozhodněte, zda pro každé přirozené číslo n existuje posloupnost prvočísel $\{p_i\}_{i=1}^{n}$ splňující rekurentní formuli $p_i = p_1 \cdot p_2 \cdots p_{i-1} + 1$ pro $2 < i \le n$ (druhý člen je nezávislý na prvním!) .

Budeme dokazovat, že pro $n \geq 5$ taková posloupnost neexistuje. Pro spor předpokládejme, že taková posloupnost existuje. Nejprve si všimněme, že jedno z prvočísel p_1, p_2 je sudé, kdyby totiž byla obě lichá, potom $p_3 = p_1p_2+1$, tedy p_3 je sudé a větší než 10 ($p_1, p_2 \geq 3$), což je spor, neboť jediné sudé prvočíslo je 2. Tedy $p_1 = 2$ nebo $p_2 = 2$. Všimněme si, že pokud zaměníme hodnoty p_1 a p_2, nebude rekurentní vztah porušen, můžeme tedy bez újmy na obecnosti předpokládat, že $p_1 = 2$. Nyní rozeberme, jaký zbytek dává p_2 při dělení třemi.

i) $p_2 = 3k$. Potom je nutně $p_2 = 3$, neboť se jedná o prvočíslo. Dále pak $p_3 = p_1p_2+1 = 3\cdot 2+1 = 7$, $p_4 = p_1p_2p_3 + 1 = 7 \cdot 3 \cdot 2 + 1 = 43$ a $p_5 = p_1p_2p_3p_4 + 1 = 43 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 2 + 1 = 1807 = 13 \cdot 139$, tedy p_5 není prvočíslo, spor.

ii) $p_2 = 3k + 1$. Potom $p_3 = p_1p_2 + 1 = 2(3k + 1) + 1 = 3(2k + 1)$, tedy p_3 je dělitelné třemi, avšak $p_3 = p_1p_2 + 1 \geq 2 \cdot 2 + 1 = 5$, tudíž $p_3 \neq 3$, což je spor s tím, že se jedná o prvočíslo.

iii) $p_2 = 3k+2$. Potom $p_3 = p_1p_2+1 = 2(3k+2)+1 = 6k+5$, $p_4 = p_1p_2p_3+1 = 2(3k+2)(6k+5)+1 = 3(12k^2 + 18k + 7)$, tedy p_4 je dělitelné třemi, avšak $p_4 = p_1p_2p_3 + 1 \geq 2 \cdot 2 \cdot 2 + 1 = 7$, tedy $p_4 \neq 3$, což je spor s tím, že se jedná o prvočíslo.

4. úloha (56, 44, 3,00, 4,0)

Nechť posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je dána předpisem $a_1 = 56$, $a_{n+1} = a_n - \frac{1}{a_n}$. Ukažte, že $a_n < 0$ pro nějaké $0 < n < 2003$.

Úlohu dokážeme sporem. Předpokládejme tedy, že $a_n \geq 0$ pro $n \in \{1, \ldots, 2002\}$. Nejprve ukážeme, že není možné $a_n = 0$. Nechť pro spor $a_n = 0$, potom $0 = a_{n-1} - \frac{1}{a_{n-1}}$, z čehož s přihlédnutím k $a_{n-1} \geq 0$ dostáváme $a_{n-1} = 1$. Potom ale $1 = a_{n-2} - \frac{1}{a_{n-2}}$, po vynásobení a_{n-2} a vyřešení kvadratické rovnice dostáváme (opět kvůli předpokladu) $a_{n-2} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Ovšem nyní si všimněme, že pokud je člen posloupnosti racionální (nenulové) číslo, je následující člen též racionální. Protože a_1 je racionální, nedostaneme se nikdy k iracionálnímu číslu, a tudíž ani k nule (dva kroky před ní by muselo být iracionální číslo).

Jsme tedy nyní v situaci, kdy předpokládáme, že pro $0 < n < 2003$ je $a_n > 0$. Všimněme si, že naše posloupnost je klesající (odečítáme kladná čísla), tedy pro $m > n$ je $a_m < a_n$ a též $-\frac{1}{a_m} < -\frac{1}{a_n}$. Proto

$$a_3 = a_2 - \frac{1}{a_2} < a_1 - \frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_1} = a_1 - 2\frac{1}{a_1},$$

$$a_4 = a_3 - \frac{1}{a_3} < a_1 - 2\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_1} = a_1 - 3\frac{1}{a_1},$$

obecně takto dostaneme pro $i > 2$ $a_i < a_1 - (i-1)\frac{1}{a_1}$. To nám umožní odhad $a_{897} < a_1 - 896\frac{1}{a_1} = 56 - \frac{896}{56} = 40$. Použijeme-li podobné úvahy znovu (začneme u obecného členu a_n místo u a_1), dostaneme postupně

$$a_{1497} < a_{897} - 600\frac{1}{a_{897}} < 40 - \frac{600}{40} = 25,$$

$$a_{1872} < a_{1497} - 375\frac{1}{a_{1497}} < 25 - \frac{375}{25} = 10,$$

$$a_{1972} < a_{1872} - 100\frac{1}{a_{1872}} < 10 - \frac{100}{10} = 0.$$

To ovšem není možné, předpokládali jsme totiž, že $a_{1972} > 0$, dostali jsme tak spor a nutně pro nějaké $i < 2003$ musí být $a_i < 0$.

Poznámky k došlým řešením: Většina řešitelů této úlohy zapomněla diskutovat případ $a_n = 0$, jinak řešení sledovala myšlenku totožnou s ideou vzorového řešení.

5. úloha (43, 39, 4,00, 5,0)

Posloupnost $\{G_n\}_{n=0}^{\infty}$ je definovaná takto: $G_0 = 0$, $G_1 = 0$, $G_2 = 1$ a pro $n \geq 3$ je $G_n = G_{n-1} + G_{n-2} + G_{n-3}$. Pro $n \geq 0$ označme $a_n = G_n^2$. Dokažte, že pro všechna $n \geq 6$ platí $a_n = 2a_{n-1} + 3a_{n-2} + 6a_{n-3} - a_{n-4} - a_{n-6}$.

Mějme $n \geq 6$. Pro $i, j \geq 0$ označme $b_{ij} = G_{n-i}G_{n-j}$ $(= b_{ji})$. V následujících úpravách využijeme vztahy

$$b_{ij} = b_{i+1,j} + b_{i+2,j} + b_{i+3,j},$$

$$b_{ii} = b_{i+1,i+1} + b_{i+2,i+2} + b_{i+3,i+3} + 2b_{i+1,i+2} + 2b_{i+1,i+3} + 2b_{i+2,i+3},$$

které platí pro každé $0 \leq i \leq n-3$ a $j \geq 0$ a plynou z rekurentního vztahu ze zadání. Platí tedy

$$a_n = b_{00} = b_{11} + 2b_{12} + 2b_{13} + b_{22} + 2b_{23} + b_{33}.$$

Přičtením rovností

$$0 = b_{11} - b_{22} - 2b_{23} - 2b_{24} - b_{33} - 2b_{34} - b_{44},$$
$$0 = -2b_{12} + 2b_{22} + 2b_{23} + 2b_{24},$$
$$0 = -2b_{13} + 2b_{23} + 2b_{33} + 2b_{34}$$

získáme

$$b_{00} = 2b_{11} + 2b_{22} + 4b_{23} + 2b_{33} - b_{44}.$$

(Tím jsme dostali koeficient 2 u členu b_{11} a nahradili jsme všechny ostatní členy, které měly jeden z indexů roven 1.) Podobně pokračujeme přičtením rovností

$$0 = b_{22} - b_{33} - 2b_{34} - 2b_{35} - b_{44} - 2b_{45} - b_{55},$$
$$0 = -4b_{23} + 4b_{33} + 4b_{34} + 4b_{35}$$

a dostaneme

$$b_{00} = 2b_{11} + 3b_{22} + 5b_{33} + 2b_{34} + 2b_{35} - 2b_{44} - 2b_{45} - b_{55}.$$

Nakonec přičteme

$$0 = b_{33} - b_{44} - 2b_{45} - 2b_{46} - b_{55} - 2b_{56} - b_{66},$$
$$0 = -2b_{34} + 2b_{44} + 2b_{45} + 2b_{46},$$
$$0 = -2b_{35} + 2b_{45} + 2b_{55} + 2b_{56}$$

a dostaneme rovnost

$$b_{00} = 2b_{11} + 3b_{22} + 6b_{33} - b_{44} - b_{66},$$

kterou jsme chtěli dokázat.

Poznámky k došlým řešením: Téměř všichni řešitelé úlohu upočítali „hrubou silou“. Někteří však zapomněli na to, že nerovnost platí pro $n \geq 6$, a tvrdili, že je splněna pro n přirozené. Několik řešitelů při úpravách zašlo i do odmocnin, kde však bylo třeba dokázat, že použité úpravy jsou ekvivalentní.

6. úloha (27, 19, 3,00, 5,0)

Nechť posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ splňuje $a_{n+1} = a_n + f(a_n)$, kde $f(m)$ značí součin cifer čísla m. Je posloupnost omezená pro všechna a_1 přirozená?

Odpověď zní ano. Předpokládejme pro spor, že tomu tak není, mějme tedy takové a_1 přirozené, že posloupnost není omezená. Ciferný součin je nezáporný, posloupnost je tedy neklesající. Pokud by ciferný součin nějakého členu byl nulový (což nastává v případě, kdy se v zápisu tohoto členu vyskytuje nula), byla by posloupnost od tohoto členu konstantní, a tudíž omezená, je proto posloupnost nutně rostoucí. To také znamená, že žádný člen ve svém zápise neobsahuje nulu. Zajímejme se o situace, kdy posloupnost „přeskakuje řády", to znamená, kdy jeden člen posloupnosti je menší než 10^k a další člen je větší než 10^k, tedy člen a_n je nejvýše $\underbrace{99\dots9}_{k}$ a a_{n+1} je alespoň $\underbrace{11\dots1}_{k+1}$ (jinak by se v něm vyskytovala nula). Musí být proto $a_{n+1} - a_n > 10^{k-1}$, zároveň je však $a_{n+1} - a_n = f(a_n) \le 9^k$. Pokud by byla posloupnost neomezená, muselo by pro všechna k přirozená platit $10^{k-1} < 9^k$, to si můžeme přepsat na $\left(\frac{10}{9}\right)^{k-1} < 9$. Ovšem na levé straně máme člen geometrické posloupnosti, která roste nade všechny meze, od jistého k budou tedy členy větší než 9 (první takové k je 22). Tím jsme dostali spor s předpokladem, že se nám při „přeskocích řádů" v posloupnosti nevyskytne člen s nulou v desítkovém zápise, takový člen se proto vyskytne, posloupnost je od tohoto členu konstantní a celkově je tedy omezená.

7. úloha (35, 11, 1,00, 1,0)

Posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je zadána následovně: $a_1 = a_2 = 1$, $a_n = a_{a_{n-1}} + a_{n-a_{n-1}}$ pro $n \ge 3$. Určete hodnotu a_n pro $n = 2^k$, $k \in \mathbb{N}$.

Označme $b_n = a_{n-1}$, $c_n = n - a_{n-1}$ pro $n \ge 3$ (platí tedy $a_n = a_{b_n} + a_{c_n}$). Spočítáme několik prvních hodnot těchto posloupností: $a_3 = a_{a_2} + a_{3-a_2} = a_1 + a_2 = 1 + 1 = 2$, $a_4 = a_{a_3} + a_{4-a_3} = a_2 + a_2 = 2$, $b_3 = a_2 = 1$, $b_4 = a_3 = 2$, $c_3 = 3 - a_2 = 2$, $c_4 = 4 - a_3 = 2$. Nejprve dokážeme indukcí toto tvrzení:

Tvrzení. $(*)$ Pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $1 \le a_1 \le a_2 \le \dots \le a_n \le n$, pro $n \ge 2$ $a_n \le a_{n-1} + 1$ a pro $n \ge 4$ $b_{n-1} \le b_n \le b_{n-1} + 1$ a $c_{n-1} \le c_n \le c_{n-1} + 1$.

Víme, že $(*)$ platí pro $n \le 4$. Předpokládejme, že $(*)$ platí pro $n = k \ge 4$ a dokažme, že platí pro $n = k+1$. Z nerovnosti $a_{k-1} \le a_k$ plyne $b_k \le b_{k+1}$ a $c_{k+1} = k+1-a_k \le k+1-a_{k-1} = c_k+1$, z nerovnosti $a_k \le a_{k-1} + 1$ plyne $b_{k+1} \le b_k + 1$ a $c_k = k - a_{k-1} \le k - a_k + 1 = c_{k+1}$. Čísla b_{k+1}, c_{k+1} jsou obě menší než $k+1$, takže platí $a_{b_k} \le a_{b_{k+1}}$ a $a_{c_k} \le a_{c_{k+1}}$, což po sečtení dává $a_k \le a_{k+1}$. Pokud $b_{k+1} = b_k$, pak $c_{k+1} = c_k + 1$, $a_{b_k} = a_{b_{k+1}}$ a $a_{c_{k+1}} = a_{c_k+1} \le a_{c_k} + 1$. V opačném případě $b_{k+1} = b_k + 1$, $c_{k+1} = c_k$, $a_{c_k} = a_{c_{k+1}}$ a $a_{b_{k+1}} = a_{b_k+1} \le a_{b_k} + 1$. V obou případech tedy dostaneme $a_{k+1} \le a_k + 1 \le k + 1$, čímž je indukční krok dokončen.

Pro $n \ge 2$ označme $d_n = a_n - a_{n-1}$. Víme již, že d_n může nabývat pouze hodnot 0 a 1, $d_2 = 0$, $d_3 = 1$ a $d_4 = 0$. Nyní dokážeme (opět indukcí) následující tvrzení.

Tvrzení. $(**)$ Pro každé $n \ge 1$ je v posloupnosti $d_{2^n+1}, d_{2^n+2}, \dots, d_{2^{n+1}}$ právě 2^{n-1} nul a 2^{n-1} jedniček, přičemž $d_{2^{n+1}} = 0$ a $a_{2^n} = 2^{n-1}$.

Víme, že $(**)$ platí pro $n = 1$. Předpokládejme, že platí pro nějaké $n = k \ge 1$. Ihned dostáváme $a_{2^{k+1}} = a_{2^k} + d_{2^k+1} + d_{2^k+2} + \dots + d_{2^{k+1}} = 2^{k-1} + 2^{k-1} = 2^k$ a $a_{2^{k+1}-1} = a_{2^{k+1}} - d_{2^{k+1}} = a_{2^{k+1}} = 2^k$, a tedy $b_{2^{k+1}} = 2^k$, $c_{2^{k+1}} = 2^k$, $b_{2^{k+1}+1} = 2^k$, $c_{2^{k+1}+1} = 2^k + 1$. Již dříve jsme dokázali, že pro každé $m \geq 4$ platí právě jedna z těchto dvou možností:

$$b_m = b_{m-1} + 1 \text{ a } c_m = c_{m-1}, \tag{B_m}$$

$$b_m = b_{m-1} \text{ a } c_m = c_{m-1} + 1. \tag{C_m}$$

Speciálně víme, že nastává $C_{2^{k+1}+1}$.

Pokud pro nějaké $m \geq 4$ nastává B_m a navíc $d_{b_m} = 1$, pak $a_m = a_{b_m} + a_{c_m} = a_{b_m - 1} + 1 + a_{c_m} = a_{b_{m-1}} + 1 + a_{c_{m-1}} = a_{m-1} + 1$. Pokud nastává C_m a zároveň $d_{c_m} = 1$, pak $a_m = a_{b_m} + a_{c_m - 1} + 1 = a_{b_{m-1}} + a_{c_{m-1}} + 1 = a_{b_m} + a_{c_m - 1} + 1$. V obou těchto případech platí $d_m = 1$ a $b_{m+1} = a_m = a_{m-1} + 1 = b_m + 1$, tedy nastává situace B_{m+1}. Pokud nastává B_m a zároveň $d_{b_m} = 0$, pak $a_m = a_{b_m - 1} + a_{c_m} = a_{b_{m-1}} + a_{c_{m-1}} = a_{m-1}$. Pokud nastává C_m a zároveň $d_{c_m} = 0$, pak $a_m = a_{b_m} + a_{c_m - 1} = a_{b_{m-1}} + a_{c_{m-1}} = a_{m-1}$. V těchto dvou případech tedy platí $d_m = 0$ a nastává C_{m+1}.

Z toho plyne, že pro každá dvě přirozená čísla $m_2 > m_1 \geq 4$, pro která platí B_{m_1}, $d_{b_{m_1}} = 0$, B_{m_2}, $d_{b_{m_2}} = 0$, musí existovat $m_3 \in (m_1; m_2)$, pro které nastává C_{m_3} a $d_{c_{m_3}} = 1$. Podobně pokud platí C_{m_1}, $d_{b_{m_1}} = 1$, C_{m_2}, $d_{b_{m_2}} = 1$, pak musí existovat $m_3 \in (m_1; m_2)$, pro které nastává B_{m_3} a $d_{c_{m_3}} = 0$.

Z toho dále plyne, že pro každé $m \in \langle 2^{k+1} + 1; 2^{k+2} \rangle$ je rozdíl počtu jedniček v posloupnosti $D^c_m = (d_{c_{2^{k+1}+1}}, \ldots, d_{c_m})$ a počtu nul v posloupnosti $D^b_m = (d_{b_{2^{k+1}+1}}, \ldots, d_{b_m})$ roven 0 nebo 1. (S rostoucím m se postupně střídají případy, kdy v první posloupnosti přibude 1 a kdy ve druhé posloupnosti přibude 0.) Nyní již dokážeme, že $b_{2^{k+2}} = c_{2^{k+2}} = 2^{k+1}$. Nechť m je nejmenší takové, že $b_m = 2^{k+1}$ nebo $c_m = 2^{k+1}$. Z indukčního předpokladu víme, že $d_{2^{k+1}} = 0$. Pokud je $b_m < c_m = 2^{k+1}$ (nastala situace C_m), pak posloupnost D^b_m obsahuje stejný počet nul jako posloupnost D^c_m jedniček. Z předpokladu víme, že D^c_m má právě 2^{k-1} jedniček, tedy posloupnost D^b_m musí obsahovat prvek $d_{2^{k+1}}$, což je spor s volbou m. Je tedy $c_m < b_m = 2^{k+1}$. V posloupnosti D^c_m je tedy právě 2^{k-1} jedniček (a méně než 2^{k-1} nul). Nastala situace B_m, $d_{b_m} = 0$, dále tedy nastává C_{m+1} a $d_{c_{m+1}} = 0$, C_{m+2} a $d_{c_{m+2}} = 0$, ..., $C_{2^{k+2}}$ a $d_{c_{2^{k+2}}} = 0$, tedy platí $b_{2^{k+2}} = 2^{k+1}$ a $c_{2^{k+2}} = 2^{k+1}$, z čehož plyne $a_{2^{k+2}} = a_{2^{k+1}} + a_{2^{k+1}} = 2^k + 2^k = 2^{k+1}$. Z toho již je také vidět, že v posloupnosti $d_{2^{k+1}+1}, \ldots, d_{2^{k+2}}$ je právě 2^k nul a 2^k jedniček. A konečně $d_{2^{k+2}} = a_{2^{k+2}} - a_{2^{k+2}-1} = 2^{k+1} - a_{b_{2^{k+2}-1}} - a_{c_{2^{k+2}-1}} = 2^{k+1} - a_{2^{k+1}} - a_{c_{2^{k+2}} - 1} = 2^{k+1} - 2^k - a_{2^{k+1}-1} = 2^k - a_{2^{k+1}} + d_{2^{k+1}} = 0$. Tím je indukční krok dokončen.

Odpověď tedy zní: Pro $n = 2^k, k \in \mathbb{N}$, je $a_n = 2^{k-1}$.

Poznámky k došlým řešením: Řešitele této úlohy bych rozdělil na dvě skupiny – ty, co výsledek uhodli, a ty, co se ho i pokusili dokázat. Podle několika prvních správně vypočtených členů posloupnosti nebylo obtížné odhadnout výsledek. Za správný odhad jsem dával jeden bod. Někteří řešitelé se zapomněli přesvědčit, že posloupnost opravdu existuje (tj. že $0 < a_n < n$). Nejlepší řešení měli *Franta Konopecký* a *Daniel Petrík*.

8. úloha (9, 2, 1,00, 0,0)

Posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je zadána rekurentně: $a_0 = a_1 = 1$, $(n+1)a_{n+1} = (2n+1)a_n + 3na_{n-1}$. Dokažte, že všechny členy posloupnosti jsou celá čísla.

Podle *Daniela Petríka*. Označme

$$b_n = \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2j}\binom{2j}{j} = \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \frac{n!}{(j!)^2(n-2j)!}.$$

Matematickou indukcí dokážeme, že $a_n = b_n$.

Ještě si uvědomme některé rovnosti (všechny dostaneme z volby b_n pouze posouváním indexů a občas přičítáním nuly).

$$b_{n+1} = \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor} \frac{(n-1)!}{(j!)^2(n-2j+1)!} n(n+1).$$

$$b_n = \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor} \frac{(n-1)!}{(j!)^2(n-2j+1)!} n(n-2j+1).$$

$$b_{n-1} = \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \frac{(n-1)!}{(j!)^2(n-2j-1)!} = \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor} \frac{(n-1)!}{(j!)^2(n-2j+1)!}(n-2j)(n-2j+1).$$

$$b_{n-1} = \sum_{j=1}^{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor} \frac{(n-1)!}{((j-1)!)^2 (n-2j+1)!} = \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor} \frac{(n-1)!}{(j!)^2(n-2j+1)!} j^2.$$

Nyní snadno spočítáme, že $b_0 = 1 = a_0$, $b_1 = 1 = a_1$. Dále za předpokladu, že rovnost platí pro menší n, dokážeme, že $b_{n+1} = a_{n+1}$ pro $n \geq 1$. Totiž

$$(n+1)a_{n+1} = (2n+1)a_n + 3na_{n-1} = (2n+1)b_n + 3nb_{n-1} = (2n+1)b_n + 4nb_{n-1} - nb_{n-1} =$$

$$= \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor} \frac{(n-1)!}{(j!)^2(n-2j+1)!} \left((2n+1)n(n-2j+1) + 4nj^2 - n(n-2j)(n-2j+1)\right) =$$

$$= \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor} \frac{(n-1)!}{(j!)^2(n-2j+1)!} n(n+1)^2 = (n+1) \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor} \frac{(n-1)!}{(j!)^2(n-2j+1)!} n(n+1) = (n+1)b_{n+1}.$$

Po vydělení $n+1$ dostaneme požadovanou rovnost. Odtud je pak už zřejmé, že $a_n = \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2j}\binom{2j}{j}$ je celé číslo.

Poznámka. Pro zajímavost dodejme, že z dokázaného vztahu mezi posloupnostmi a_n a b_n není těžké si uvědomit, že a_n je koeficient u x^n ve výrazu $(x^2+x+1)^n$. Další možnou interpretací je, že a_n je počet posloupností nul, jedniček a minus jedniček délky n, jejichž součet je nula.

Poznámky k došlým řešením: Správná řešení došla dvě. Řešení od *Daniela Petríka* si vysloužilo jeden imaginární bod a bylo použito jako vzorové. *Saša Kazda* se spoustou úprav také dopracoval ke kýženému cíli. Ostatní řešení neukazovala ani náznak správného postupu. Jednou z chyb byl například důkaz indukcí, který dokazoval tvrzení pro n a využíval indukčního předpokladu pro $n+1$. Korektní důkaz indukcí využívá indukčního předpokladu pro $n-1$ a menší hodnoty.