✉ *Korespondenční seminář, KAM MFF UK, Malostranské náměstí 25, 118 00 Praha 1* ✉

3. série

Téma: …

Termín odeslání: 8. PROSINCE 2003

1. ÚLOHA (3 BODY)

Kolik existuje uspořádaných n-tic $(A_1, A_2, \dots, A_n)$ (ne nutně disjunktních) podmnožin množiny $A = \{1, \dots, m\}$ takových, že $\bigcup_{1\le i\le n} A_i = A$ a $\bigcap_{1\le i\le n} A_i = \emptyset$ – tedy že sjednocením všech množin A_i je celá množina A a jejich průnik je prázdný?

2. ÚLOHA (3 BODY)

Nechť k je celé liché číslo a $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$, $B = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$ jsou množiny celých čísel splňující $a_1 - b_1 = a_2 - b_2 = \dots = a_n - b_n = k$. Označme $C = -B$, tj. množinu takových c, že $-c \in B$. Dokažte, že $|A \cap C|$ (počet prvků, které jsou zároveň v množinách A i C) je sudé číslo.

3. ÚLOHA (3 BODY)

Mějme čísla $a_1, a_2, \dots, a_n$, která mohou být 1 nebo 0. Na počátku nechť jsou všechna rovna nule. Následuje n kroků, v i-tém kroku změníme hodnotu těch a_j, pro něž j je dělitelné i (tedy v prvním kroku změníme všechna, v druhém ta na sudých pozicích, …). Dokažte, že po n-tém kroku bude a_i jedna, právě když i je druhá mocnina.

4. ÚLOHA (5 BODŮ)

Nechť $x_1, x_2, \dots, x_n$ jsou kladná reálná čísla. Vyřešte soustavu rovnic

$$\begin{aligned} 2\sqrt{\frac{x_1}{x_2}} - \frac{1}{x_3} &= x_1, \\ 2\sqrt{\frac{x_2}{x_3}} - \frac{1}{x_4} &= x_2, \\ &\vdots \\ 2\sqrt{\frac{x_n}{x_1}} - \frac{1}{x_2} &= x_n. \end{aligned}$$

5. ÚLOHA (5 BODŮ)

Ukažte, že $\left|\frac{f(1)}{1} + \frac{f(2)}{2} + \dots + \frac{f(n)}{n} - \frac{2n}{3}\right| < 1$, kde f(i) je největší lichý dělitel i.

6. ÚLOHA (5 BODŮ)

Nechť k, z, n jsou přirozená čísla a $a_1, a_2, \dots, a_n$ je posloupnost celých nenulových čísel taková, že součet každých k po sobě jdoucích členů je kladný a součet každých z po sobě jdoucích členů je záporný. Jaká je největší možná hodnota n (v závislosti na k a z)?

7. ÚLOHA (5 BODŮ)

Nechť $X_1, X_2, \dots, X_n$, $n > 1$, jsou body ve čtverci o straně délky 1. Nechť r_i značí vzdálenost bodu X_i od nejbližšího jiného bodu X_j. Dokažte nerovnost $r_1^2 + r_2^2 + \dots + r_n^2 \le 4$.

✉ *Korespondenční seminář, KAM MFF UK, Malostranské náměstí 25, 118 00 Praha 1* ✉

8. ÚLOHA (5 BODŮ)

Rozhodněte, pro které n-tíce kladných reálných čísel $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ platí

$$\frac{x_1}{x_2+x_3}+\frac{x_2}{x_3+x_4}+\cdots+\frac{x_n}{x_1+x_2}\geq\frac{n}{2}.$$

Řešení 3. série

1. úloha (31, 18, 1,00, 3,0)

Kolik existuje uspořádaných n-tic $(A_1, A_2, \dots, A_n)$ (ne nutně disjunktních) podmnožin množiny $A = \{1, \dots, m\}$ takových, že $\bigcup_{1\leq i\leq n} A_i = A$ a $\bigcap_{1\leq i\leq n} A_i = \emptyset$ – tedy že sjednocením všech množin A_i je celá množina A a jejich průnik je prázdný?

Vezměme si konkrétní prvek i z A, tedy přirozené číslo nejvýše rovné m. Umisťujeme i do n množin, přičemž do každé ho buď dáme, nebo ne, celkově je tedy pro i 2^n možností umístění. Ovšem protože ve sjednocení těchto množin i leží, musíme odečíst možnost, že ho nedáme do žádné z nich, a protože průnik je prázdný, musíme odečíst možnost, že ho dáme do všech. Máme tedy pro každý prvek $i \in A$ $2^n - 2$ možností, jak ho poumisťovat do množin $A_1, \dots, A_n$ (abychom neporušili podmínku zadání), prvků je m, celkový počet (navzájem různých) umístění všech m prvků je proto $(2^n - 2)^m$.

Poznámky k došlým řešením: Většina řešitelů si s touto úlohou poradila dobře. Nejčastější chybou bylo tvrzení, že má-li být průnik množin prázdný, nesmí žádný prvek ležet ve více než jedné množině.

2. úloha (67, 58, 2,00, 3,0)

Nechť k je celé liché číslo a $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$, $B = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$ jsou množiny celých čísel splňující $a_1 - b_1 = a_2 - b_2 = \dots = a_n - b_n = k$. Označme $C = -B$, tj. množinu takových c, že $-c \in B$. Dokažte, že $|A \cap C|$ (počet prvků, které jsou zároveň v množinách A i C) je sudé číslo.

Na začátek se omlouváme, že se v zadání objevila drobná chyba (v tomto textu je už opravena), množiny A, B tedy mají být množiny celých čísel.

Pro $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ označme $c_i = -b_i$, tedy $C = \{c_1, c_2, \dots, c_n\}$. Dále nám podmínka ze zadání říká, že $a_1 + c_1 = a_2 + c_2 = \dots = a_n + c_n = k$. Předpokládejme, že pro nějaké i $a_i \in A \cap C$, tedy $a_i \in C$, odkud existuje j, že $a_i = c_j$. Potom ale $a_j + c_j = a_i + c_i$, tedy $a_j = c_i$ a $a_j \in A \cap C$. Všimněme si ještě, že $i \neq j$, jinak $k = a_i + c_i = a_i + c_j = 2a_i$, což je spor s tím, že k je liché. Nakonec si všimněme, že pokud jsme k nějakému a_i přiřadili a_j, které je řešením, potom stejným způsobem k a_j přiřadíme a_i. Tedy všechny prvky $A \cap C$ se nám podaří takto rozdělit do skupin po dvou, odkud je velikost tohoto průniku sudá.

3. úloha (65, 57, 2,00, 3,0)

Mějme čísla a_1, a_2, … , a_n, která mohou být 1 nebo 0. Na počátku nechť jsou všechna rovna nule. Následuje n kroků, v i-tém kroku změníme hodnotu těch a_j, pro něž j je dělitelné i (tedy v prvním kroku změníme všechna, v druhém ta na sudých pozicích, …). Dokažte, že po n-tém kroku bude a_i jedna, právě když i je druhá mocnina.

Lemma. Nechť $n = p_1^{s_1} p_2^{s_2} \cdots p_r^{s_r}$, kde p_i jsou navzájem různá prvočísla. Potom počet dělitelů čísla n je roven $(s_1 + 1)(s_2 + 1) \cdots (s_r + 1)$.

Důkaz. Každý dělitel n je tvaru $p_1^{t_1} p_2^{t_2} \cdots p_r^{t_r}$, kde $t_r \in \{0, 1, \dots, s_r\}$, odtud již tvrzení plyne.

Vezměme si nějaké a_k pro k pevné. Jeho hodnotu změníme v i-tém kroku právě tehdy, když i je dělitel k. Z toho plyne, že na konci bude a_k rovno 1, právě když k má lichý počet dělitelů.

Podle lemmatu to znamená přesně tolik, že všechna s_i v rozkladu k na prvočísla jsou sudá, což jinak řečeno znamená, že k je druhou mocninou, tím je úloha dokázána.

4. úloha (39, 33, 3,00, 5,0)

Nechť $x_1, x_2, \ldots, x_n$ jsou kladná reálná čísla. Vyřešte soustavu rovnic

$$2\sqrt{\frac{x_1}{x_2}} - \frac{1}{x_3} = x_1,$$
$$2\sqrt{\frac{x_2}{x_3}} - \frac{1}{x_4} = x_2,$$
$$\vdots$$
$$2\sqrt{\frac{x_n}{x_1}} - \frac{1}{x_2} = x_n.$$

Když celou soustavu sečteme, dostaneme

$$2\left(\sqrt{\frac{x_1}{x_2}} + \sqrt{\frac{x_2}{x_3}} + \cdots + \sqrt{\frac{x_n}{x_1}}\right) - \left(\frac{1}{x_3} + \frac{1}{x_4} + \cdots + \frac{1}{x_2}\right) = x_1 + x_2 + \cdots + x_n.$$

Po převedení části rovnosti na druhou stranu a prohození pořadí sčítanců máme

$$2\left(\sqrt{\frac{x_1}{x_2}} + \sqrt{\frac{x_2}{x_3}} + \cdots + \sqrt{\frac{x_n}{x_1}}\right) = \left(x_1 + \frac{1}{x_2}\right) + \left(x_2 + \frac{1}{x_3}\right) + \cdots + \left(x_n + \frac{1}{x_1}\right).$$

Nyní si uvědomme, že kdykoliv máme kladná čísla a, b, potom platí[1]

$$2\sqrt{\frac{a}{b}} \le a + \frac{1}{b}$$

a rovnost nastává, právě když $a = \frac{1}{b}$. Vyjdeme z nerovnosti

$$\left(\sqrt{a} - \sqrt{\frac{1}{b}}\right)^2 \ge 0,$$

rovnost nastává, právě když $\sqrt{a} = \sqrt{\frac{1}{b}}$. Ekvivalentními úpravami dostáváme

$$a - 2\sqrt{\frac{a}{b}} + \frac{1}{b} \ge 0,$$

$$a + \frac{1}{b} \ge 2\sqrt{\frac{a}{b}},$$

[1] Tato nerovnost je speciálním případem nerovnosti mezi aritmetickým a geometrickým průměrem, o které jsi pravděpodobně již slyšel(a).

což je přesně to, co jsme chtěli, a díky ekvivalenci úprav rovnost nastává, právě když $\sqrt{a} = \sqrt{\frac{1}{b}} \Leftrightarrow a = \frac{1}{b}$.

Nyní s využitím této nerovnosti pro dvojice (x_1, x_2), (x_2, x_3), $\dots$, (x_{n-1}, x_n), (x_n, x_1) dostáváme

$$2\left(\sqrt{\frac{x_1}{x_2}} + \sqrt{\frac{x_2}{x_3}} + \cdots + \sqrt{\frac{x_n}{x_1}}\right) \le \left(x_1 + \frac{1}{x_2}\right) + \left(x_2 + \frac{1}{x_3}\right) + \cdots + \left(x_n + \frac{1}{x_1}\right).$$

My ovšem chceme rovnost, tedy musí nastat rovnost ve všech dílčích nerovnostech, která nastává, právě když $x_1 = \frac{1}{x_2} = x_3 = \frac{1}{x_4} = \cdots$.

Je-li n liché, dostáváme tak $x_1 = x_3 = \cdots = x_n = \frac{1}{x_1} = x_2 = x_4 = \cdots = x_{n-1}$, tedy všechny hodnoty jsou si rovny a navíc z $x_1 = \frac{1}{x_1}$ plyne (x_1 je kladné), že jsou všechny tyto hodnoty rovny 1.

Je-li n sudé, dostaneme pouze $x_1 = \frac{1}{x_2} = x_3 = \frac{1}{x_4} = \cdots = \frac{1}{x_n}$, označme $p = x_1$ (p je tedy kladné reálné číslo) tedy $p = x_1 = x_3 = \cdots x_{n-1}$ a $\frac{1}{p} = x_2 = x_4 = \cdots = x_n$. Dosazením například do první rovnice (všimni si, že toto dosazení funguje i pro $n = 2$), dostáváme $2\sqrt{p^2} - \frac{1}{p} = p$, odkud po jednoduchých úpravách plyne, že $p = 1$, má-li být kladné. Tedy opět jsou všechny hodnoty rovny jedné.

Naopak všechny hodnoty rovny jedné vyhovují, neboť na levé straně každé z rovnic máme $2 - 1$ a na pravé 1.

5. úloha (29, 22, 3,00, 5,0)

Ukažte, že $\left|\frac{f(1)}{1} + \frac{f(2)}{2} + \cdots + \frac{f(n)}{n} - \frac{2n}{3}\right| < 1$, kde f(i) je největší lichý dělitel i.

Nejprve si uvědomme, že pro n liché je $\frac{f(n)}{n} = 1$ a $f(2m) = f(m)$, tedy $\frac{f(1)}{1} + \frac{f(3)}{3} + \cdots + \frac{f(2m-1)}{2m-1} = m$, $\frac{f(2)}{2} + \frac{f(4)}{4} + \cdots \frac{f(2m)}{2m} = \frac{1}{2}(\frac{f(1)}{1} + \frac{f(2)}{2} + \cdots + \frac{f(m)}{m})$. Označíme-li si $g(n) = \frac{f(1)}{1} + \frac{f(2)}{2} + \cdots + \frac{f(n)}{n}$, dostali jsme vztahy $g(2n+1) = g(2n) + 1$ a $g(2n) = n + \frac{g(n)}{2}$. Nyní už snadno indukcí dokážeme vztahy $\frac{2n}{3} < g(n) < \frac{2n}{3} + \frac{5}{6}$ pro n liché a $\frac{2n}{3} < g(n) < \frac{2n}{3} + \frac{1}{2}$ pro n sudé, čímž dokážeme i požadované tvrzení.

Je $g(1) = 1$ a jistě $\frac{2}{3} < 1 < \frac{2}{3} + \frac{5}{6}$, tedy pro $n = 1$ tvrzení platí. Nechť tedy tvrzení platí pro všechna čísla menší než n, dokážeme jej pro n. Je-li n liché, máme $\frac{2(n-1)}{3} < g(n-1) < \frac{2(n-1)}{3} + \frac{1}{2}$. Ale $g(n) = g(n-1) + 1$, tedy $\frac{2(n-1)}{3} + 1 < g(n) < \frac{2(n-1)}{3} + \frac{1}{2} + 1$. Ovšem $\frac{2(n-1)}{3} + 1 > \frac{2n}{3}$ a $\frac{2(n-1)}{3} + \frac{1}{2} + 1 = \frac{2n}{3} + \frac{5}{6}$, tedy pro n liché jsme tvrzení dokázali. Pro $n = 2m$ máme (z indukčního předpokladu) $\frac{2m}{3} < g(m) < \frac{2m}{3} + \frac{5}{6}$ (odhad na pravé straně je možná lepší (je-li m sudé), ale toto platí určitě. Protože $g(m) = 2g(n) - n$, dostali jsme $\frac{n}{3} < 2g(n) - n < \frac{n}{3} + \frac{5}{6}$, po úpravě $\frac{2n}{3} < g(n) < \frac{2n}{3} + \frac{5}{12}$, ale $\frac{5}{12} < \frac{1}{2}$, dokázali jsme proto tvrzení i v případě sudého n, celkově dostáváme, že náš odhad platí a tím je dokázán i vztah ze zadání.

6. úloha (11, 6, 1,00, 2,0)

Nechť k, z, n jsou přirozená čísla a $a_1, a_2, \dots, a_n$ je posloupnost celých nenulových čísel taková, že součet každých k po sobě jdoucích členů je kladný a součet každých z po sobě jdoucích členů je záporný. Jaká je největší možná hodnota n (v závislosti na k a z)?

V následujícím textu pojem „r-tice“ bude vždy znamenat „r-tice po sobě následujících členů“. BÚNO můžeme předpokládat, že $k \le z$. Označme $s = NSD(k,z)$, $k_1 = \frac{k}{s}$, $z_1 = \frac{z}{s}$.

Nejprve dokážeme, že $n \le k+z-s-1$: pro spor předpokládejme, že $n > k+z-s$. Nechť $A_i = a_{s(i-1)+1} + a_{s(i-1)+2} + \cdots + a_{si}$ pro každé $i \in \{1,2,\ldots,k_1+z_1-1\}$. V posloupnosti A_1, A_2, … , $A_{k_1+z_1-1}$ je součet každé k_1-tice kladný a součet každé z_1-tice záporný. Napišme tato čísla do obdélníkové tabulky o k_1 řádcích a z_1 sloupcích tak, že v i-tém řádku a j-tém sloupci je číslo A_{i+j-1}. Součet čísel v každém řádku je záporný, součet čísel v každém sloupci je kladný, tedy součet všech čísel v tabulce je současně záporný i kladný, což je hledaný spor.

Pro $n = k+z-s-1$ již zkonstruujeme posloupnost, která vyhovuje zadání. Nejprve si členy a_1, a_2, … , $a_{k+z-s-1}$ rozdělíme do třech množin M_1, M_2, M_3 a pak pro každé $i \in \{1,2,3\}$ určíme celočíselnou hodnotu h_i, kterou přiřadíme všem prvkům množiny M_i.

M_3 bude množina všech členů a_j $(1 \le j \le k+z-s-1)$ takových, že j není násobkem s. Zbylé členy a_s, a_{2s}, … , $a_{(k_1+z_1-2)s}$ rozdělíme do množin M_1 a M_2 následovně: na začátku jsou obě množiny prázdné. Dál v každém kroku přidáme jeden člen do množiny M_2. V prvním kroku přidáme člen $a_{k_1 s}$. Pokud jsme v m-tém kroku přidali a_{ps}, kde $p < z_1 - 1$, přidáme v $(m+1)$-tém kroku člen $a_{(p+k_1)s}$. Pokud $p > z_1$, přidáme v $(m+1)$-tém kroku člen $a_{(p-z_1)s}$. V případě $z_1 - 1 \le p \le z_1$ skončíme a všechny zbylé členy dáme do množiny M_1.

Z postupu vyplývá, že množiny M_1 i M_2 jsou neprázdné (protože $a_{k_1 s} \in M_2$ a v M_2 je nejvýše jeden z členů $a_{(z_1-1)s}, a_{z_1 s}$) a každé dva členy a_{is}, a_{js} $(1 \le i,j \le k_1+z_1-2)$, kde $is+k = js$ nebo $is+z = js$, jsou ve stejné množině: pokud $is+k = js$, pak $i = j-k_1 \le k_1+z_1-2-k_1 < z_1-1$. Pokud tedy $a_{is} \in M_2$, pak také $a_{js} \in M_2$ (a_{js} bylo přidáno do M_2 o krok později než a_{is}). Pokud je a_{js} prvkem M_2, pak nebylo přidáno hned v prvním kroku, a protože $j+z_1 > k_1+z_1-2$, musel být v předchozím kroku přidán člen $a_{(j-k_1)s} = a_{is}$. Podobně se dokáže i případ $is+z = js$: platí $j = i+z_1 > z_1$, takže pokud a_{js} byl přidán do M_2, byl a_{is} přidán v následujícím kroku. Pokud byl do M_2 přidán a_{is}, nemohlo to být v prvním kroku (nemůže platit $k_1 = i$, protože $i = j - z_1 \le k_1 - 2$), a tedy v předchozím kroku byl do M_2 přidán člen a_{js}.

V každé k-tici je tedy stejný počet prvků množiny M_1, stejný počet prvků M_2, a tedy i stejný počet prvků M_3 (z předešlého pozorování to plyne pro všechny dvojice k-tic překrývajících se v $k-1$ členech, a tedy i pro všechny k-tice), podobně to platí i pro z-tice. Označme si a, b, c počty prvků množin M_1, M_2, M_3 v každé k-tici a d, e, f počty prvků množin M_1, M_2, M_3 v každé z-tici. Hodnoty h_i tedy stačí určit tak, aby byly splněny nerovnosti $ah_1+bh_2+ch_3 > 0$ a $dh_1+eh_2+fh_3 < 0$. Rovnou zvolíme $h_3 = 1$. Najdeme celá čísla x, y tak, aby byly splněny nerovnosti $ax+by > 0$ a $dx+ey < 0$ (hodnoty h_1, h_2 určíme později jako vhodné násobky x, y): víme, že čísla a, b, d, e jsou kladná, $a+b = k_1$, $d+e = z_1$, čísla k_1 a z_1 jsou nesoudělná, a tedy $ae - bd \ne 0$ (v opačném případě by bylo $ae+ad = bd+ad$, tedy i $\frac{a}{d} = \frac{a+b}{d+e}$, jenže zlomek na pravé straně je v základním tvaru a nemůže se tedy rovnat zlomku s menším kladným čitatelem i jmenovatelem.) Pokud $\frac{b}{a} > \frac{e}{d}$, budeme volit $y > 0$ a $x < 0$ tak, aby $-\frac{b}{a} < \frac{x}{y} < -\frac{e}{d}$ (např. $x = -(b+e)$, $y = a+d$), v opačném případě zvolíme $y < 0$ a $x > 0$ tak, aby $-\frac{e}{d} < \frac{x}{y} < -\frac{b}{a}$ (např. $x = b+e$, $y = -(a+d)$). Nakonec položíme $h_1 = zx$ a $h_2 = zy$. Součet členů v každé k-tici je tedy $ah_1+bh_2+ch_3 = azx+bzy+c = z(ax+by)+c > 0$, součet členů v každé z-tici je $dh_1+eh_2+fh_3 = dzx+ezy+f = z(dx+ey)+f \le -z+f < -z+z = 0$.

Závěr: Největší hledaná hodnota n je rovna $k+z-NSD(k,z)-1$.

Poznámky k došlým řešením: Body jsem rozděloval takto: 2 body za důkaz $n \le k+z-NSD(k,z)-1$, z toho 1 bod za slabší (dokázaný) odhad $n \le k+z-2$ (za vyšší odhady jsem body neuděloval), zbylé 3 body za důkaz $n \ge k+z-NSD(k,z)-1$ (tedy důkaz existence nebo zkonstruování nějaké vyhovující posloupnosti maximální délky). Druhou část dokazovali dva řešitelé, ale bez chyby se to podařilo jen *Danielu Petríkovi*.

7. úloha (17, 1, 0,00, 0,0)

Nechť X_1, X_2, … , X_n, $n > 1$, jsou body ve čtverci o straně délky 1. Nechť r_i značí vzdálenost bodu X_i od nejbližšího jiného bodu X_j. Dokažte nerovnost $r_1^2 + r_2^2 + \cdots + r_n^2 \leq 4$.

Označme $ABCD$ daný čtverec, $r = r_1^2 + r_2^2 + \cdots + r_n^2$. Pro každou uzavřenou lomenou čáru $X_{i_1}X_{i_2}\ldots X_{i_n}X_{i_1}$, kde $(i_1, i_2, \ldots, i_n)$ je nějaká permutace čísel 1, 2, … , n, je součet druhých mocnin délek jednotlivých úseků (dále jen součet) větší nebo roven r, protože $|X_{i_j}X_{i_{j+1}}| \geq |r_{i_j}|$ pro každé $j \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$ a $|X_{i_n}X_{i_1}| \geq |r_{i_n}|$. Stejná nerovnost platí i pro každou uzavřenou lomenou čáru, která má kromě vrcholů X_1, X_2, … , X_n navíc ještě dva vrcholy A, C. Pokud jsou totiž X, Y ty vrcholy, které na této lomené čáře sousedí s vrcholem A, získáme nahrazením úseků XA a AY úsekem XY lomenou čáru s menším nebo stejným součtem (z kosinové věty pro trojúhelník XAY plyne $|XA|^2 + |AY|^2 \geq |XY|^2$, protože úhel XAY je menší nebo roven $90°$). Podobným způsobem nahradíme i dvojici úseků, na nichž leží bod C, a získáme lomenou čáru s menším nebo stejným součtem, o kterém již víme, že je větší nebo roven r.

K důkazu dané nerovnosti tedy stačí najít uzavřenou lomenou čáru s vrcholy X_1, X_2, … , X_n, A, C, která má součet menší nebo roven 4. Rozdělme daný čtverec úhlopříčkou AC na dva trojúhelníky a rozdělme množinu $M = \{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$ na dvě podmnožiny M_B, M_D tak, že v M_B jsou všechny body M, které leží v trojúhelníku ABC včetně úhlopříčky AC a v M_D jsou všechny body M ležící v trojúhelníku CDA, ale ne na úhlopříčce AC. Hledanou uzavřenou lomenou čáru zkonstruujeme spojením dvou lomených čar, kde jedna začíná v A, prochází všemi vrcholy množiny M_B a končí v C, druhá začíná v C, prochází všemi vrcholy množiny M_D a končí v A. Stačí tedy dokázat následující tvrzení:

(*) Nechť X_1, X_2, … , X_n, $n \geq 0$, jsou body v pravoúhlém trojúhelníku ABC s přeponou AC a délkami odvěsen a, b. Pak existuje permutace $(i_1, i_2, \ldots, i_n)$ čísel 1, 2, … , n taková, že lomená čára $AX_{i_1}X_{i_2}\ldots X_{i_n}C$ má součet druhých mocnin délek všech $n+1$ úseků menší nebo roven $a^2 + b^2$ $(= |AC|^2)$.

(Toto tvrzení použijeme pro trojúhelníky ABC a CDA, v obou případech bude délka nalezené lomené čáry menší nebo rovna 2, jejich složením tedy vznikne uzavřená lomená čára se součtem nejvýše 4.)

Důkaz: budeme postupovat indukcí podle n. Pro $n = 0$ je hledanou lomenou čárou úsečka AC, pro $n = 1$ je to lomená čára AX_1C (úhel AX_1C je větší nebo roven $90°$, a tedy podle kosinové věty pro trojúhelník AX_1C je $|AX_1|^2 + |X_1C|^2 \leq |AC|^2$). Předpokládejme, že (*) platí pro všechna $n \leq k$, kde k je nějaké přirozené číslo, a mějme v trojúhelníku ABC daných $k+1$ bodů. Rozdělme trojúhelník výškou z vrcholu B na trojúhelníky AB_0B a BB_0C (oba jsou podobné trojúhelníku ABC). Mohou nastat dva případy:

(1) Pokud je v každém z těchto dílčích trojúhelníků aspoň jeden z daných $k+1$ bodů, můžeme tyto body rozdělit do dvou neprázdných disjunktních množin M_1, M_2 tak, že M_1 je částí trojúhelníka AB_0B a M_2 je částí BB_0C. Podle indukčního předpokladu existuje lomená čára začínající v A, procházející všemi body M_1, končící v B, jejíž součet je nejvýše $|AB|^2$, a lomená čára začínající v B, procházející všemi body M_2, končící v C, jejíž součet je nejvýše $|BC|^2$. Jejich spojením získáme lomenou čáru z A do C procházející všemi danými body a navíc s vrcholem B, která má součet nejvýše $|AB|^2 + |BC|^2 = |AC|^2$. Pokud X, Y jsou vrcholy sousedící s B, nahradíme úseky XB a BY jediným úsekem XY (tím se součet nezvětší) a získáme hledanou lomenou čáru.

(2) V případě, že v jednom z dílčích trojúhelníků (BÚNO v trojúhelníku AB_0B) nebude žádný z daných $n+1$ bodů, pokusíme se nejprve sestrojit požadovanou lomenou čáru pro trojúhelník BB_0C (začínající v B, procházející všemi danými body, končící v C, se součtem nejvýše $|BC|^2$), a to rekurzivním postupem – tedy rozdělíme tento trojúhelník kolmicí z bodu B_0 na přeponu, a pokud v každém z dílčích trojúhelníků bude aspoň jeden z daných bodů (případ (1)), umíme lomenou čáru s požadovanými vlastnostmi sestrojit. V opačném případě pokračujeme dělením dílčího trojúhelníku, v němž jsou všechny dané body (označíme jej T_1), atd. Takové dělení ale nemůže probíhat do nekonečna, protože délka přepony m-tého dílčího trojúhelníku (tedy vzniklého po j-tém dělení výškou) obsahujícího všechny dané vrcholy je shora omezená hodnotou $|AC|\cdot(\frac{\max(|AB|,|BC|)}{|AC|})^j$, která pro dostatečně velké j bude menší než vzdálenost bodů X_1 a X_2. Takže po konečném počtu (označme jej m) dělení nastane případ (1). Sestrojíme tedy požadovanou lomenou čáru pro dílčí trojúhelník T_{m-1}. Nyní ji budeme postupně rozšiřovat na trojúhelníky $T_{m-2}, T_{m-3}, \dots, T_1, T_0 = ABC$: máme-li sestrojenou lomenou čáru $EX_{i_1}X_{i_2}\dots X_{i_n}G$ pro trojúhelník $T_j = EFG$ s přeponou EG, rozšíříme ji na trojúhelník $T_{j-1} = DEG$ s přeponou DG takto: nejprve přidáme krajní úsek DE, tím získáme lomenou čáru se součtem nejvýše $|DE|^2+|EG|^2=|DG|^2$ a pak nahradíme úseky DE a EX_{i_1} jediným úsekem DX_{i_1}. Součet této lomené čáry pak bude nejvýše druhá mocnina délky přepony trojúhelníka T_{j-1}. Tímto postupem získáme nakonec hledanou lomenou čáru pro trojúhelník $T_0 = ABC$, takže indukční krok je dokončen.

8. úloha (9, 1, 0,00, 0,0)

Rozhodněte, pro které n-tíce kladných reálných čísel $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ platí

$$\frac{x_1}{x_2+x_3}+\frac{x_2}{x_3+x_4}+\dots+\frac{x_n}{x_1+x_2}\ge\frac{n}{2}.$$

Za tuto úlohu se musím omluvit. Když jsem úlohu zadával, moje idea byla, že nerovnost platí pro všechny n-tice kladných reálných čísel. Zdálo se mi, že mám i myšlenku důkazu. Naneštěstí se ukázalo, že nerovnost pro všechny n-tice neplatí a žádný z organizátorů nepřišel na rozumný způsob, jak n-tice, pro které úloha platí, popsat.

To je také důvod, proč jsme se rozhodli snížit maximum z této úlohy na 2 body, a tedy z celé série na 23 bodů.

Úlohu se podařilo objevit na internetu s tím, že se (v trochu poupravené verzi) jedná o známý problém. Zadaná nerovnost platí pro $n\le 23$ lichá a pro $n\le 12$ sudá. Pro jiná n ovšem neplatí.

Pouze ilustrativně si zde ukážeme důkaz pro $n=3$. Máme tedy dokázat, že

$$\frac{x_1}{x_2+x_3}+\frac{x_2}{x_3+x_1}+\frac{x_3}{x_1+x_2}\ge\frac{3}{2}.$$

Zavedeme-li substituci $a=x_1+x_2$, $b=x_3+x_1$, $c=x_2+x_3$, máme dokázat nerovnost

$$\frac{a+b-c}{2c}+\frac{a-b+c}{2b}+\frac{-a+b+c}{2a}\ge\frac{3}{2}.$$

Nejprve si uvědomme, že pro x , y kladná plyne z nerovnosti mezi aritmetickým a geometrickým průměrem, že $\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\ge 2\sqrt{\frac{xy}{yx}}=2$. Sečtením tří takových nerovností pro dvojice (a,b), (b,c) a (c,a) dostáváme

$$\frac{a+b}{c}+\frac{a+c}{b}+\frac{b+c}{a}\ge 6.$$

Odtud už jednoduchou úpravou dostaneme požadovanou nerovnost.

Důkaz pro $n = 4$ je možno provést například upravením výrazů na společného jmenovatele, roznásobením vzniklých závorek a použitím několika nerovností mezi aritmetickým a geometrickým průměrem. Nicméně je technický a není na něm mnoho zajímavého, proto si ho zde neuvedeme.

Pro vyšší n, pro která nerovnost platí, pravděpodobně půjde nerovnost dokázat podobným způsobem jako pro $n = 4$. Alternativní cestou jsou nějaké analytické metody. Ještě dodejme, že substituce, kterou jsme použili pro $n = 3$, nám nepomůže (pro n sudá z ní neumíme vyjádřit x_i, pro n lichá sice ano, ale ztratíme jí nějaké informace, čímž dostaneme obecnější nerovnost, která už neplatí).

Jen pro zajímavost ještě dodejme, že pro n-tice kladných reálných čísel platí o něco slabší nerovnost

$$\frac{x_1}{x_2 + x_3} + \frac{x_2}{x_3 + x_4} + \cdots + \frac{x_n}{x_1 + x_2} \geq \lambda n,$$

kde $\lambda \doteq 0,4946$, a tato konstanta je nejlepší možná.

Poznámky k došlým řešením: Príklad bol v podstate neriešiteľný (pozri vzorové riešenie), preto som za príklad udeloval maximálne dva body. Tie som dal *Pavlovi Kocourkovi* za vyhladanie „vzorového riešenia“. Ostatní ktorí sa pokúsili nerovnosť dokázať, dostali jeden bod, ak ich „dôkaz“ mal hlavu a pätu.