Povídání k 5. sérii

V 5. sérii jsme v zadáních použili nějaké pojmy, které by Ti nemusely být přímo jasné, proto jsme se rozhodli udělat drobné povídání k této sérii.

Nejprve se budeme věnovat podobnostem. V 7. úloze je úkolem rozhodnout, jestli jsou nějaké dvě množiny podobné, mohli bychom tedy říci, co přesně znamená, že nějaké dvě množiny jsou podobné.

Zobrazení P (z roviny do roviny / z prostoru do prostoru) přiřazující[1] bodu X bod X' nazveme podobné, právě když existuje[2] nějaké $k > 0$ takové, že pro každé dva body A, B platí $|A'B'| = k|AB|$. Všimni si například, že každé podobné zobrazení je prosté (když $A' = B'$, potom $|AB| = |A'B'| = 0$, což znamená, že $A = B$). Dále se zkus rozmyslet, že podobné zobrazení je i na (tj. pro každý bod Y (z roviny / z prostoru) existuje nějaký bod X takový, že $Y = X'$, tj. $Y = S(X)$. Dále si všimni, že inverzní zobrazení k podobnému zobrazení je opět podobné. A nakonec, že složení dvou podobných zobrazení je opět podobné zobrazení.

Dvě množiny M, N pak, celkem přirozeně, nazveme podobné, právě když existuje podobné zobrazení zobrazující M na N (což nastane (přechodem k inverzi), právě když existuje podobné zobrazení zobrazující N na M).

5th series

Topic: Similarities

Date due: February 16, 2004

PROBLEM 1 (3 POINTS)

Let two regular 2004-gons be given in a plane. The area of the first one is twice as large as the area of the second one. Determine the ratio of their circumradii. Justify your answer thoroughly.

PROBLEM 2 (3 POINTS)

Find all convex quadrilaterals Q such that all four triangles given by cutting Q along both of its diagonals are similar.

PROBLEM 3 (3 POINTS)

Let C be a common point of given circles k and l. Construct a rectangle $ABCD$ such that $B \in k$, $D \in l$ and $\frac{|AB|}{|AD|} = 2$. Discuss the number of solutions.

PROBLEM 4 (5 POINTS)

Let ABC be a given triangle and let T be its center of gravity. The line through T parallel to BC meets the lines AB and AC at B' and C', respectively. Let A'' be the midpoint of BC, let C'' be the intersection of the lines $B'C$ and BT and let B'' be the intersection of the lines $C'B$ and CT. Prove that the triangles ABC and $A''B''C''$ are similar.

[1] Tedy $P(X)$ značíme X'.

[2] Takové k existuje samozřejmě nejvýše jedno a nazývá se koeficientem podobnosti.

PROBLEM 5 (5 POINTS)
Construct a cyclic quadrilateral $ABCD$ if the lengths of its sides are given. Discuss the number of solutions. The quadrilateral $ABCD$ is said to be cyclic if it can be inscribed into some circle.

PROBLEM 6 (5 POINTS)
Let $A_1A_2 \dots A_n$ and $B_1B_2 \dots B_n$ be two given similar polygons (points A_i and B_i, $i = 1, 2, \dots, n$ correspond in some similarity) and let both of them be oriented counterclockwise. Let C_i be the midpoint of A_iB_i. Prove that the points $C_1, C_2, \dots, C_n$ either all coincide or determine a polygon similar to the polygon $A_1A_2 \dots A_n$.

PROBLEM 7 (5 POINTS)
Let O be a given point in three-dimensional space. Let us have a finite number of segments OA_1, OA_2, ... , OA_k. By lattice[3] given by these segments we mean a set of all points X for which there exists a sequence of points $O = B_1$, B_2, ... , B_{l-1}, $B_l = X$ for some l such that every segment B_iB_{i+1} can be obtained as a translation of some segment OA_j $(1 \leq j \leq k)$. Note that in particular the point O is a point of this lattice.
Let $OABC$ be a regular tetrahedron and let $ODEFO'D'E'F'$ be a cube with center S. Let M_1 be the lattice given by the segments OA, OB and OC. Let M_2 be the lattice given by the segments OD, OO' and OS. Prove or disprove the following statements:
(a) The set M_1 is similar to some subset of M_2.
(b) The set M_2 is similar to some subset of M_1.
(c) The sets M_1 and M_2 are similar.

PROBLEM 8 (5 POINTS)
In a plane with given (Cartesian) coordinate system graphs of three mutually different quadratic functions $f_i(x) = a_ix^2 + b_ix + c_i$, $i = 1, 2, 3$ are drawn. In addition, every two of these graphs have two common tangents. Let P_{ij}, $i, j = 1, 2, 3, i < j$ denote the intersection of the two common tangents of the graphs of f_i and f_j. Prove that the points P_{12}, P_{13} and P_{23} are collinear.

La 5. série

Sujet: Similitudes

Date d'expedition: 16. FÉVRIER 2004

PROBLÈME 1 (3 POINTS)
Dans un plan, soit deux 2004-polygones réguliers (polygones réguliers avec 2004 sommets) semblables. La surface du premier est le double de la surface du deuxième 2004-polygone. Indiquer le quotient des rayons de cercles circonscrits š ces 2004-polygones.

PROBLÈME 2 (3 POINTS)
Trouvez tous les quadrilatères convexes Q tels que les quatres triangles créés par le découpage

[3]For those familiar with the notion of vectors we can say that lattice given by these segments is the set of all points X such that $\overrightarrow{OX} = m_1\overrightarrow{OA_1} + m_2\overrightarrow{OA_2} + \dots + m_k\overrightarrow{OA_k}$ for some integers $m_1, m_2, \dots, m_k$.

du quadrilatère Q selon ses diagonales sont semblables entre eux.

PROBLÈME 3 (3 POINTS)
Soit C le point commun de deux cercles fixes k et l. Construisez le rectangle $ABCD$ tel que $B \in k$, $D \in l$ et $\frac{|AB|}{|AD|} = 2$. Faites en plus la discussion du nombre de solutions.

PROBLÈME 4 (5 POINTS)
Soit le triangle ABC, T son centre de masse. La droite parallèle š BC passante par T coupe le côté AB au point B' et le côté AC au point C'. Soit A'' le centre du côté BC, C'' l'intersection de $B'C$ et BT, B'' l'intersection de $C'B$ et CT. Démontrez que le triangle $A''B''C''$ est semblable au triangle ABC.

PROBLÈME 5 (5 POINTS)
Construisez le quadrilatère de corde si on connat les longuers de ses côtés. Faites en plus la discussion du nombre de solutions. Ajoutons encore qu'on appelle le quadrilatère de corde chaque quadrilatère auquel on peut circonscrire un cercle.

PROBLÈME 6 (5 POINTS)
Soit deux n-polygones semblables $A_1A_2\dots A_n$ et $B_1B_2\dots B_n$ (une des semblabilité transforme le point A_i au B_i, pour chaque i), tous les deux n-polygones sont orientés dans le sens de figures du montre. Désignons C_i centre du segment A_iB_i, démontrez que $C_1C_2\dots C_n$ est un polygone semblable š $A_1A_2\dots A_n$, où les points C_1, C_2, …, C_n sont joints dans un point.

PROBLÈME 7 (5 POINTS)
Dans un espace de trois dimension, soit le point O. Soit finiment beaucoup de segments OA_1, OA_2, … , OA_k. On comprend par un réseau[4] créé par ces segments l'ensemble des points X tel qu'il existe $l \in \mathbb{N}$ et ils existent les points $O = B_1$, B_2, B_3, …, B_{l-1}, $B_l = X$ tels que pour chaque $i \in \{1, 2, \dots, l-1\}$, le segment B_iB_{i+1} est créé seulement par une translation d'un des segments OA_j (pro $j \in \{1, 2, \dots, k\}$). Specialement on devrait se rendre compte qu'on comprend mme le point O entre les points du réseau. Soit un tétraèdre régulier $OABC$ et une cube $ODEFO'D'E'F'$ avec le centre S. Prénons pour le réseau M_1 le réseau créé par les segments OA, OB, OC. Prénons pour le réseau M_2 le réseau créé par les segments OD, OO', OS.
(a) Décidez si M_1 est semblable š un sousensemble de M_2.
(b) Décidez si M_2 est semblable š un sousensemble de M_1.
(c) Décidez si M_1 et M_2 sont semblables.

PROBLÈME 8 (5 POINTS)
Dans un plan muni d'un répère orthonormé on a les courbes de trois fonctions carrées différentes $f_i(x) = a_ix^2 + b_ix + c_i$, pour $i \in \{1, 2, 3\}$. En plus, chaque couple de ces courbes a deux tangeantes communes. Désignons P_{ij}, pour $i, j = 1, 2, 3, i < j$, l'intersection de tangeantes communes de courbes f_i et f_j. Démontrez que les points P_{12}, P_{13} a P_{23} sont allignés.

Serie N. 5

[4] Si tu connais quelque chose sur vecteurs, le réseau fait par ces segment est donc l'ensemble des points X tels que $\overrightarrow{OX} = m_1\overrightarrow{OA_1} + m_2\overrightarrow{OA_2} + \cdots + m_k\overrightarrow{OA_k}$, où m_i sont des nombres entiers quelconques.

Thema: Ähnlichkeiten

Termin der Absendung: 16. FEBRUAR 2004

AUFGABE N. 1 (3 PUNKTE)

In der Ebene seien zwei ähnliche, regelmäßige 2004–Ecke gegeben. Der Inhalt des Ersten sei doppelt so groß wie der des Zweiten. Bestimmen Sie das Verhältnis der Radius der Umkreislinien dieser 2004–Ecke. Begründen Sie Ihre Aussage präzise!

AUFGABE N. 2 (3 PUNKTE)

Suchen Sie alle konvexen Vierecke Q, so dass die vier Vierecke, die durch Zerschneidung von Q längst der Diagonalen von Q entstehen, zueinander ähnlich sind.

AUFGABE N. 3 (3 PUNKTE)

C sei ein gemeinsamer Punkt von zwei fest gegeben Kreislinien k, l. Konstruieren Sie ein Rechteck $ABCD$, so dass $B \in k$, $D \in l$ und $\frac{|AB|}{|AD|} = 2$ sind. Diskutieren Sie außerdem die Anzahl der Lösungen.

AUFGABE N. 4 (5 PUNKTE)

Sei ABC ein Dreieck mit Schwerpunkt T. Die Gerade, die durch T verläuft und parallel zu BC ist, schneide die Seite AB im Punkt B' und die Seite AC im Punkt C'. A'' sei die Mitte der Seite BC, C'' der Schnittpunkt von $B'C$ und BT und B'' sei der Schnittpunkt von $C'B$ und CT. Beweisen Sie, dass das Dreieck $A''B''C''$ ähnlich zu dem Dreieck ABC ist.

AUFGABE N. 5 (5 PUNKTE)

Konstruieren Sie ein Sehnenviereck, wenn nur die Längen seiner Seiten bekannt sind. Bestimmen Sie überdies die Anzahl der Lösungen. Beachten Sie, dass ein Sehnenviereck jedes Viereck ist, das einen Umkreis besitzt.

AUFGABE N. 6 (5 PUNKTE)

Es seien zwei ähnliche n–Ecke $A_1A_2\dots A_n$ und $B_1B_2\dots B_n$ gegeben. Die Ecken seien so nummeriert, dass die Ähnlichkeitsabbildung den Punkt A_i auf B_i für jedes i abbildet. Die beiden n–Ecken seien gegen den Uhrzeitsinn orientiert. Als C_i bezeichnen wir die Mitte der Strecke A_iB_i. Beweisen Sie, dass entweder $C_1C_2\dots C_n$ ein dem Vieleck $A_1A_2\dots A_n$ ähnliches Vieleck ist oder die Punkte $C_1, C_2, \dots, C_n$ alle übereinstimmen.

AUFGABE N. 7 (5 PUNKTE)

Der Punkt O sei im dreidimensionalen Raum gegeben. Nehmen wir endlich viele Strecken OA_1, OA_2, ... ,OA_k. Unter dem mit diesen Strecken gebildeten Gitter[5] verstehen wir die Menge der Punkte X, so dass für eines $l \in N$ es die Punkte $B_1, B_2, \dots, B_l$ gibt mit $B_1 = O$ und $B_l = X$, so dass jede Stecke B_iB_{i+1} für $i \in \{1, 2, \dots, l-1\}$ bis auf eine Translation und Orientation mit einer Strecke OA_j für ein $j \in \{1, 2, \dots, k\}$ übereinstimmt. Beachten Sie speziell, dass auch O der Punkt des Gitters ist.

[5]Falls Sie etwas über Vektoren wissen, so ist das mit diesene Strecken gebildete Gitter also die Menge der Punkten X mit $\overrightarrow{OX} = m_1\overrightarrow{OA_1} + m_2\overrightarrow{OA_2} + \cdots + m_k\overrightarrow{OA_k}$, wobei m_i beliebige ganze Zahlen sind.

Gegeben seien ein regelmäßiger Tetraeder $OABC$ und ein Würfel $ODEFO'D'E'F'$ mit Mitte S. Sei M_1 das Gitter, das mit den Strecken OA, OB, OC gebildet wird und sei M_2 das Gitter, das mit den Strecken OD, OO', OS gebildet wird.
(a) Entscheiden Sie, ob M_1 ähnlich zu einer Teilmenge von M_2 ist.
(b) Entscheiden Sie, ob M_2 ähnlich zu einer Teilmenge von M_1 ist.
(c) Entscheiden Sie, ob M_1 und M_2 ähnlich sind.

AUFGABE N. 8 (5 PUNKTE)

In der Ebene mit dem Kartesische Koordinatensystem seien die Graphen von drei verschiedenen quadratischen Funktionen $f_i(x) = a_i x^2 + b_i x + c_i$ für $i \in \{1, 2, 3\}$ gegeben. Des Weiteren haben je zwei dieser Graphen zwei gemeinsame Tangenten. Als P_{ij} für $i, j = 1, 2, 3$ mit $i < j$ bezeichnen wir den Schnittpunkt der gemeinsamen Tangenten der Graphen von f_i, f_j. Beweisen Sie, dass die Punkte P_{12}, P_{13} und P_{23} auf einer Gerade liegen.

Řešení 5. série

1. úloha (53, 50, 2,00, 3,0)

V rovině jsou dány dva pravidelné 2004-úhelníky. Přitom obsah prvního je dvojnásobkem obsahu druhého. Určete poměr poloměrů kružnic opsaných těmto 2004-úhelníkům. Své tvrzení pořádně zdůvodněte.

Označme si 2004-úhelníky $A_1A_2\cdots A_{2004}$ (s větším obsahem) a $B_1B_2\cdots B_{2004}$ (s menším obsahem). Zkusme si rozdělit $A_1A_2\cdots A_{2004}$ na trojúhelníky $A_1A_2A_3$, $A_1A_3A_4$, $A_1A_4A_5$, …, $A_1A_{2003}A_{2004}$ a podobně $B_1B_2\cdots B_{2004}$ na trojúhelníky $B_1B_2B_3$, $B_1B_3B_4$, $B_1B_4B_5$, …, $B_1B_{2003}B_{2004}$. Z podobnosti plyne, že existuje nějaké univerzální (tj. pro všechny i, j stejné) k takové, že $|A_iA_j| = k|B_iB_j|$.

Nyní si uvědomme (♡), že pro libovolný trojúhelník CDE se stranami délek $|DE| = c$, $|CE| = d$, $|CD| = e$ a jemu podobný $C'D'E'$ se stranami délek $|D'E'| = lc$, $|C'E'| = ld$, $|C'D'| = le$ platí, že $S_{CDE} : S_{C'D'E'} = 1 : l^2$ (kde S_XYZ značí obsah trojúhelníku XYZ). Důkaz plyne z téměř libovolného vzorečku pro obsah trojúhelníku. Například $S_{C'D'E'} = \frac{1}{2}lc \cdot ld \cdot \sin|\sphericalangle CED| = l^2 cd\sin|\sphericalangle CED| = l^2 S_{CDE}$, odkud žádaný poměr už plyne.

Nyní si označíme S_A obsah $A_1A_2\cdots A_{2004}$ a S_B obsah $B_1B_2\cdots B_{2004}$. Potom postupně dostáváme

$$2 = \frac{S_A}{S_B} = \frac{S_{A_1A_2A_3} + S_{A_1A_3A_4} + \cdots + S_{A_1A_{2003}A_{2004}}}{S_{B_1B_2B_3} + S_{B_1B_3B_4} + \cdots + S_{B_1B_{2003}B_{2004}}} =$$

$$= \frac{k^2 S_{B_1B_2B_3} + k^2 S_{B_1B_3B_4} + \cdots + k^2 S_{B_1B_{2003}B_{2004}}}{S_{B_1B_2B_3} + S_{B_1B_3B_4} + \cdots + S_{B_1B_{2003}B_{2004}}} = k^2.$$

První rovnost víme ze zadání, v druhé rovnosti jsme využili rozřezání, ve třetí rovnosti jsme využili (♡) s tím, že víme $|A_iA_j| = k|B_iB_j|$.

Dostáváme tedy $k^2 = 2$, neboli $k = \sqrt{2}$. Speciálně odtud plyne, že $|A_1A_{1003}| = \sqrt{2}|B_1B_{1003}|$. Přitom $|A_1A_{1003}|$ je dvojnásobek poloměru kružnice opsané $A_1A_2\cdots A_{2004}$ a $|B_1B_{1003}|$ je dvojnásobek poloměru kružnice opsané $B_1B_2\cdots B_{2004}$, tedy poměr poloměrů kružnic opsaných zadaným mnohoúhelníkům je také $\sqrt{2}$.

2. úloha (42, 24, 1,00, 2,0)

Nalezněte všechny konvexní čtyřúhelníky Q takové, že čtyři trojúhelníky vzniklé rozřezáním Q podle jeho úhlopříček jsou navzájem podobné.

Když budeš číst toto řešení, určitě Ti pomůže kreslit si obrázky.

Předpokládejme, že nějaký čtyřúhelník vyhovuje zadaní, a označme ho $ABCD$, navíc ještě P označme průsečík úhlopříček. Tedy trojúhelníky ABP, BCP, CDP a DAP mají být podobné, říkejme jim menší trojúhelníky. Když označíme $\alpha = |\sphericalangle PAB|$, $\beta = |\sphericalangle PBA|$ a $\gamma = |\sphericalangle APB|$, musí platit, že vnitřní úhly menších trojúhelníků jsou v nějakém pořadí úhly α, β, γ. Nejprve si uvědomme, že ve všech menších trojúhelnících je velikost úhlu u vrcholu P rovna γ. Kdyby totiž ne, najdeme u vrcholu P dva sousední úhly různé velikosti (například β a γ), potom je jejich součet 180°, neboť jsou sousední, to je ale spor s faktem, že $\alpha + \beta + \gamma = 180°$. Odtud je také zřejmé, že $\gamma = 90°$ ($|\sphericalangle APB|$ a $|\sphericalangle APD|$) jsou sousední a mají velikost γ).

Nyní rozlišíme dvě možnosti.

(i) Osy úhlů ve čtyřúhelníku $ABCD$ jsou právě úhlopříčky AC a BD. Potom např. $|\sphericalangle APB| = |\sphericalangle APD| = 90°$, $|\sphericalangle PAB| = |\sphericalangle PAD|$ ($AC = AP$ je osa úhlu DAB), odkud vidíme, že trojúhelníky APB a APD jsou shodné (strana AP je společná). Speciálně tedy $|AB| = |AD|$. Obdobně zdůvodníme, že všechny strany $ABCD$ jsou stejně dlouhé. Tedy $ABCD$ musí být kosočtverec (nebo čtverec). Na druhou stranu kosočtverec (či čtverec) už podmínky zadání úlohy splňuje, všechny menší trojúhelníky jsou shodné.

(ii) Alespoň u jednoho vrcholu čtyřúhelníku $ABCD$ se osa úhlu liší od úhlopříčky. Bez újmy na obecnosti například u vrcholu B (jinak se jen přeznačí vrcholy). Tedy $\beta = |\sphericalangle PBA| \neq |\sphericalangle PBC|$ ($PB = DB$ není osou úhlu). Menší trojúhelník PBC má vnitřní úhly α, β, γ, nicméně γ je už zabráno pro úhel BPC a zjistili jsme, že $|\sphericalangle PBC| \neq \beta$, tedy zbývá jediná možnost, $|\sphericalangle PBC| = \alpha \neq \beta$. Potom $|\sphericalangle PCB| = \beta$. Navíc z toho, že $\alpha \neq \beta$, plyne, že $|PB| \neq |PC|$, označme tedy $\frac{|PB|}{|PC|} = k \neq 1$. Z podobnosti trojúhelníků APB a BPC je $\frac{|PB|}{|PA|} = \frac{|PB|}{|PC|} = k$. Z podobností všech menších trojúhelníků je pak i $\frac{|PD|}{|PC|} = k$, nebo $\frac{|PC|}{|PD|} = k$, tj. $\frac{|PD|}{|PC|} = \frac{1}{k}$i, a podobně $\frac{|PA|}{|PD|} = k$, nebo $\frac{|PA|}{|PD|} = \frac{1}{k}$. Vynásobením všech těchto poměrů dostaneme, že

$$1 = \frac{|PB|}{|PA|} \cdot \frac{|PC|}{|PB|} \cdot \frac{|PD|}{|PC|} \cdot \frac{|PA|}{|PD|} = k \cdot k \cdot x \cdot y,$$

kde x, y je rovno buď k nebo $\frac{1}{k}$. Vzhledem k tomu, že $k \neq 1$, aby rovnost $1 = k^2xy$ platila, musí být $x = y = \frac{1}{k}$. Což při převedení požadavku na podobnost menších trojúhelníků znamená, že $|\sphericalangle PCD| = |\sphericalangle PDA| = \beta$ a $|\sphericalangle PDC| = |\sphericalangle PAD| = \alpha$. Když už známe všechny vnitřní úhly, snadno si všimneme, že trojúhelníky ABD a BCD jsou rovnoramenné (se základnou BD), tedy $ABCD$ je (1) deltoid[6]. Navíc (2) $|\sphericalangle ABC| = |\sphericalangle ADC| = \alpha + \beta = (\alpha + \beta + \gamma) - (\gamma) = 180° - 90° = 90°$. Na druhou stranu si snadno ověříš, že čtyřúhelník splňující podmínky (1) a (2) už má všechny menší trojúhelníky podobné (vnitřní úhly vypadají přesně tak, jako když jsme dokazovali, že se jedná o „pravoúhlý" deltoid).

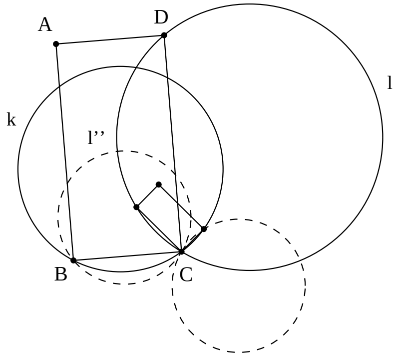
3. úloha (28, 14, 1,00, 1,0)

Nechť C je společný bod pevně daných kružnic k a l. Sestrojte obdélník $ABCD$ tak, aby $B \in k$, $D \in l$ a $\frac{|AB|}{|AD|} = 2$. Proveďte diskusi počtu řešení.

Označme S_k střed kružnice k, S_l střed kružnice l, výrazem $|kCl|$ rozumějme $|\sphericalangle S_kCS_l|$. Pokusme se nejprve sestrojit nějaké řešení.

Předpokládejme, že takový obdélník již máme sestrojen. Vidíme, že pokud otočíme bod D podle C o $90°$ (v kladném směru) na bod D', potom bod B bude středem úsečky CD'. To proto, že $ABCD$ má být obdélník a délka CD má být dvojnásobkem délky BC. My ovšem víme, že bod D má ležet na kružnici l. Proto pokud l otočíme podle C o $90°$ (v kladném směru) na kružnici l', bude bod D' ležet na l'. Bod B pak musí ležet na l'', která je obrazem l' ve stejnolehlosti se středem C a koeficientem $0,5$ (množina středů úseček CD', kde $D' \in l'$). Bod B má ale podle zadání ležet též na kružnici k. Máme dvě kružnice, na nichž má B ležet, je tedy jejich průsečíkem různým od C. Nyní můžeme bod B otočit podle C o $90°$ v záporném směru a obraz zobrazit ve stejnolehlosti podle C s koeficientem 2 na bod D. Bod A a celý obdélník pak již zkonstruujeme snadno.

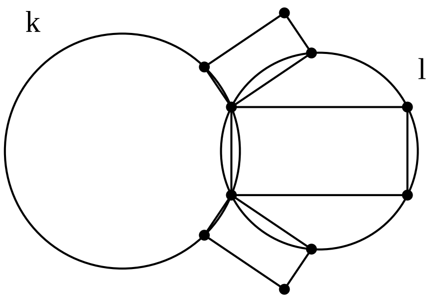
[6] Deltoid se nazývá čtyřúhelník, který má dvě sousední strany stejně dlouhé a zbylé dvě sousední také stejně dlouhé.

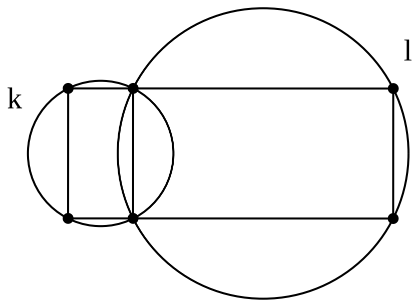


Nyní přejděme k diskusi počtu řešení. Ze zadání není úplně jasné, zda C je pevně zvolený průsečík k a l, nebo za C volíme postupně všechny průsečíky. Zde budeme uvažovat druhou možnost, je u ní zajímavější diskuse.

V případě, že jsou kružnice k a l totožné, můžeme za C vzít libovolný bod k, provést uvedenou konstrukci a celkově tak dostaneme nekonečně mnoho vyhovujících obdélníků (vlastně dostaneme jeden obdélník a všechny jeho rotace se středem S_k).

Kružnice k a l se dotýkají, právě když $|kCl| \in \{0°, 180°\}$ – to proto, že situace je symetrická podle přímky S_kS_l. V případě dotyku můžeme provést uvedenou konstrukci a také její zrcadlový obraz – tedy změníme všechny orientace uvedené v konstrukci, tím dostaneme obdélník $ABCD$ popsaný po směru hodinových ručiček – na obrázku se jedná o druhý (nepopsaný) obdélník. V tomto případě má úloha vždy dvě řešení.





Pokud je $|kCl| = 90°$, potom $|kCl''| \in \{0°, 180°\}$ (podle toho, na kterou stranu otáčíme). Co z toho plyne? Pro $|kCl''| = 180°$ nedostaneme žádné řešení, pro $|KCl''| = 0°$ totéž, až na případ, kdy $k = l''$, což nastane v případě, že poloměr l je dvakrát větší než poloměr k, potom dostaneme nekonečně mnoho řešení – každý bod k (kromě bodu C) může být bodem B.

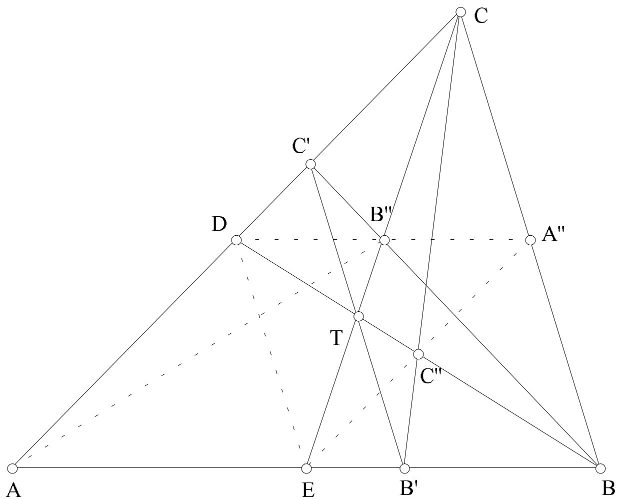
Zbývá případ $|kCl| \notin \{0°, 90°, 180°\}$. V tomto případě za C můžeme vzít postupně oba průsečíky k a l a pro každý provést konstrukce s oběma orientacemi, pokaždé dostaneme obdélník.

V obecném případě tedy bude mít úloha čtyři řešení. Může se ovšem stát, že u jedné z konstrukcí bude B právě průsečík k a l různý od C, tedy spojnice průsečíků bude stranou hledaného obdélníka. V tomto případě tento obdélník dostaneme nějakou konstrukcí a konstrukcí při volbě opačné orientace a C jako druhého průsečíku, počet řešení se tedy sníží na tři. Konečně se také může stát, že takto splynou i zbývající dva obdélníky, dostaneme tak pouhá dvě různá řešení.

4. úloha (33, 27, 4,00, 5,0)

Nechť je dán trojúhelník ABC, T je jeho těžiště. Přímka rovnoběžná s BC procházející bodem T protíná stranu AB v bodě B' a stranu AC v bodě C'. Nechť A'' je střed strany BC, C'' průsečík $B'C$ a BT, B'' průsečík $C'B$ a CT. Dokažte, že trojúhelník $A''B''C''$ je podobný trojúhelníku ABC.

Úsečky AB'', BB'', CB'' rozdělují trojúhelník ABC na tři trojúhelníky, pro jejichž obsahy platí $S_{BCB''} = S_{CAB''}$ (výšky z vrcholů B, A na stranu CB'' jsou shodné) a $S_{ABB''} = 2S_{BCB''}$ (protože těžiště dělí těžnice v poměru $2:1$, je $|AT| = 2|A''T|$, z rovnoběžnosti $C'T$ a CA'' plyne $|AC'| = 2|C'C|$, a tedy i výšky z vrcholů A, C na stranu BB'' jsou v poměru $2:1$). Protože $S_{BCB''} + S_{CAB''} + S_{ABB''} = S_{ABC}$, je $S_{ABB''} = \frac{1}{2}S_{ABC}$, z čehož plyne, že bod B'' půlí těžnici z vrcholu C, tedy B'' je obrazem středu E strany AB ve stejnolehlosti se středem T a koeficientem $\frac{1}{2}$, neboli B'' je středem strany $A''D$ příčkového trojúhelníka, kde D je střed AC. Podobně C'' je střed $A''E$. Takže trojúhelník $A''B''C''$ je stejnolehlý s příčkovým trojúhelníkem $A''DE$, který je stejnolehlý s ABC, tudíž $A''B''C''$ je stejnolehlý s ABC (střed této stejnolehlosti leží v průsečíku CB' a BC', koeficient je $-\frac{1}{4}$).

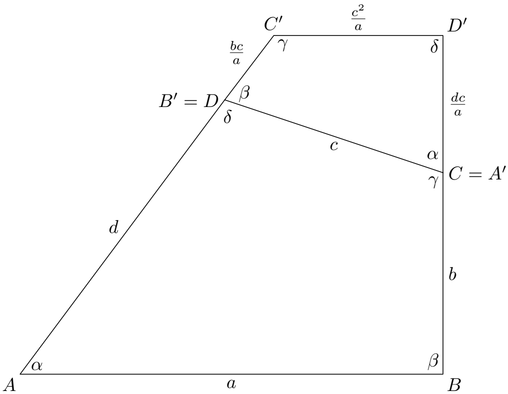


Poznámky k došlým řešením: Tato úloha se dala řešit mnoha rozličnými způsoby, žádná dvě řešení (včetně autorského) nepoužívala stejný postup. Řešitelé nejčastěji využívali podobnosti trojúhelníků a stejnolehlosti, ale vyskytla se i řešení používající Cévovu větu, sinovou větu, vektory nebo kartézské souřadnice.

5. úloha (28, 25, 3,00, 4,0)

Sestrojte tětivový čtyřúhelník, jsou-li známy délky jeho stran. Proveďte navíc diskusi počtu řešení. Ještě dodejme, že tětivový čtyřúhelník je každý čtyřúhelník, kterému je možno opsat kružnici.

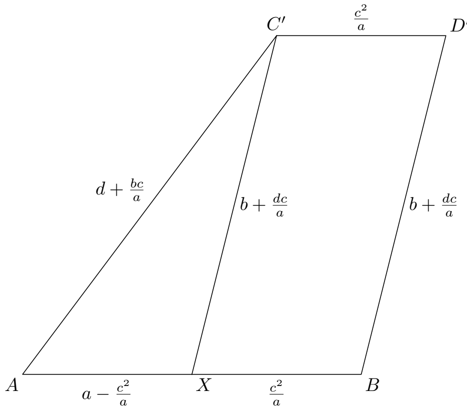
Předpokládejme, že známe $a = |AB|$, $b = |BC|$, $c = |CD|$, $d = |DA|$. Představme si, že takový čtyřúhelník $ABCD$ máme sestrojený. Pokud nastane $a = c$ a $b = d$, je úloha velmi snadná (jediným tětivovým rovnoběžníkem je obdélník). V ostatních případech bez újmy na obecnosti předpokládejme, že $a > c$ (jinak jen prohodíme značení). Označme ještě α, β, γ, δ vnitřní úhly čtyřúhelníku po řadě u vrcholů A, B, C, D.



Proveďme nyní fintu a ke straně CD připišme čtyřúhelník $A'B'C'D'$ podobný čtyřúhelníku $ABCD$ tak, že $A' = C$ a $B' = D$ (viz první obrázek). Součet protilehlých úhlů v tětivovém čtyřúhelníku je 180 stupňů, tedy úhly $D'CB$ a $C'DA'$ jsou přímé. Navíc z podobnosti a z toho, že $A'B' = CD$, snadno dopočítáme velikosti stran $A'B'C'D'$, totiž $|B'C'| = \frac{bc}{a}$, $|C'D'| = \frac{c^2}{a}$, $|D'A'| = \frac{dc}{a}$. Ještě si uvědomme, že přímky AB a $C'D'$ jsou rovnoběžné – úhly BAC' a $D'C'A$ dávají dohromady 180 stupňů.

Nyní můžeme úlohu sestrojit tětivový čtyřúhelník $ABCD$ snadno převést na úlohu sestrojit lichoběžník $ABD'C'$, známe-li jeho délky stran $|AB| = a$, $|BD'| = b + \frac{dc}{a}$, $|D'C'| = \frac{c^2}{a}$, $|C'A| = \frac{bc}{a} + d$. Potom body C a D už snadno sestrojíme ze znalosti vzdáleností $|BC|$ a $|AD|$.

Ukažme si tedy, jak sestrojit hledaný rovnoběžník (druhý obrázek). Domysleme si ještě bod X na úsečce AB ve vzdálenosti $\frac{c^2}{a}$ od bodu B (na začátku jsme si dali předpoklad $c < a$, odkud plyne, že $\frac{c^2}{a} < a$, tedy takový bod X vskutku uvnitř úsečky AB leží. $XBD'C'$ je rovnoběžník, tedy $|XC'| = b + \frac{dc}{a}$. Tedy stačí sestrojit trojúhelník AXC', jehož délky stran známe, a pak snadno sestrojíme i lichoběžník $ABC'D'$. Občas potřebujeme konstruovat součin a podíl nějakých délek, zkus si rozmyslet, že je to jednoduchá úloha na podobnost, tedy, že všechny délky stran trojúhelníku AXC' umíme zkonstruovat. Ještě si uvědomme, že, aby se nám konstrukce podařila, chceme, aby platila trojúhelníková nerovnost pro výrazy $a - \frac{c^2}{a}$, $b + \frac{dc}{a}$, $d + \frac{bc}{a}$. Z postupu konstrukce vidíme, že požadovaný čtyřúhelník je nejvýše jeden.



Na druhou stranu, podaří-li se nám sestrojit, trojúhelník AXC', sestrojíme už i lichoběžník $ABD'C'$ a potom i čtyřúhelník $ABCD$, zbývá si uvědomit, že takto vzniklý čtyřúhelník je tětivový (v předchozím textu jsme předpokládali, že řešení existuje, a odvodili jsme postup, který k řešení musí vést, nyní si uvědomujeme, že pokud se nám podaří onen postup, pak už existuje řešení). Tato část už je poměrně jednoduchá, například si stačí rozmyslet (tedy si rozmysli), že mezi úsečkami $\overline{CD}$, kde $\overline{C} \in BD'$, $\overline{D} \in AC'$ a $|\sphericalangle B\overline{CD}| = |\sphericalangle DC'A|$, existuje taková, že čtyřúhelníky $AB\overline{CD}$ a $\overline{CD}C'D'$ jsou podobné, a dopočítáním velikostí stran je to úsečka CD o velikosti c. Navíc z oné podobnosti už plyne tětivovost $ABCD$ ($|\sphericalangle DAB| + |\sphericalangle BCD| = 180°$).

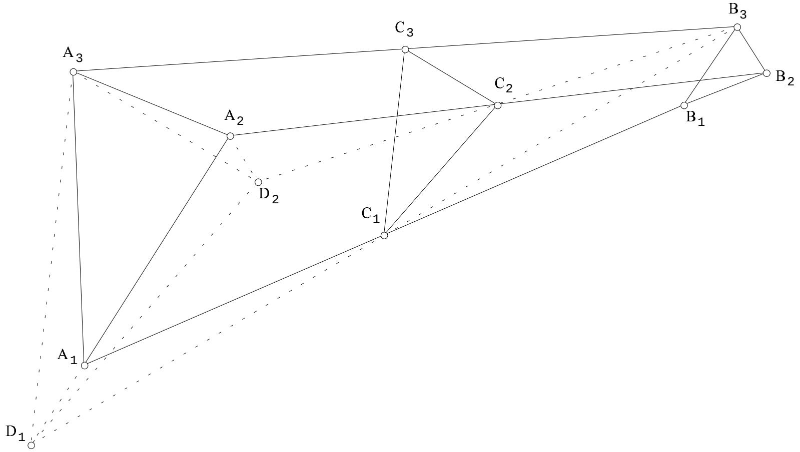
6. úloha (14, 11, 3,00, 5,0)

Nechť jsou dány dva podobné n-úhelníky $A_1A_2\dots A_n$ a $B_1B_2\dots B_n$ (existuje podobnost zobrazující bod A_i na B_i pro každé i), přičemž jsou oba orientovány proti směru hodinových ručiček, označme C_i střed úsečky A_iB_i. Dokažte, že buďto všechny body C_1, C_2, …, C_n splývají, nebo $C_1C_2\dots C_n$ je mnohoúhelník podobný $A_1A_2\dots A_n$.

Pokud jsou dané dva mnohoúhelníky $M_A = A_1A_2\dots A_n$, $M_B = B_1B_2\dots B_n$ středově souměrné, jsou všechny body C_1, C_2, …, C_n totožné. Pokud pro nějaké různé indexy i,j platí $C_i = C_j$, pak úsečka A_iA_j je středově souměrná s B_iB_j, a tedy oba dané mnohoúhelníky jsou středově souměrné. Dále předpokládejme, že M_A a M_B nejsou středově souměrné.

Pokud je přímka A_1A_2 rovnoběžná s B_1B_2, pak $B_1B_2\dots B_n$ je obraz $A_1A_2\dots A_n$ při posunutí nebo stejnolehlosti se středem S a koeficientem k různým od -1. V prvním případě je $M_C = C_1C_2\dots C_n$ obrazem M_A při posunutí o vektor $\frac{1}{2}A_1B_1$, ve druhém případě je M_C obrazem M_A ve stejnolehlosti se středem S a koeficientem $\frac{k+1}{2}$. Dále nechť A_1A_2 a B_1B_2 nejsou rovnoběžné.

Úlohu nejprve dokážeme pro $n = 3$. Mějme tedy trojúhelníky $A_1A_2A_3$, $B_1B_2B_3$, $C_1C_2C_3$ jako v zadání. Sestrojme trojúhelník $D_1D_2A_3$ jako obraz trojúhelníka $C_1C_2C_3$ ve stejnolehlosti se středem B_3 a koeficientem 2. Stačí dokázat, že $D_1D_2A_3$ je podobný trojúhelníku $A_1A_2A_3$. Bod C_1 půlí úsečky A_1B_1 a D_1B_3, proto úsečky A_1D_1 a B_3B_1 jsou shodné a rovnoběžné. Z podobného důvodu jsou A_2D_2 a B_3B_2 shodné a rovnoběžné. Z přímé podobnosti trojúhelníků $A_1A_2A_3$ a $B_1B_2B_3$ plyne rovnost $\frac{|A_3A_1|}{|A_1D_1|} = \frac{|A_3A_2|}{|A_2D_2|}$ a také shodnost úhlů $\sphericalangle A_3A_1D_1$ a $\sphericalangle A_3A_2D_2$, takže trojúhelníky $A_3A_1D_1$ a $A_3A_2D_2$ jsou podobné (a stejně orientované). Z toho dále plyne $|\sphericalangle D_1A_3D_2| = |\sphericalangle A_1A_3A_2|$ a $\frac{|A_3D_1|}{|A_3D_2|} = \frac{|A_3A_1|}{|A_3A_2|}$, tedy trojúhelníky $A_1A_2A_3$ a $D_1D_2A_3$ (a $C_1C_2C_3$) jsou podobné. Navíc tyto podobnosti jsou přímé.



Nechť $n > 3$. Každá trojice sousedních vrcholů v M_A tvoří trojúhelník, a tedy podle předchozí části odpovídající vrcholy v M_C tvoří podobný stejně orientovaný trojúhelník. Z toho plyne, že existuje kladná konstanta k (koeficient podobnosti) taková, že pro každou dvojici sousedních vrcholů A_i, A_{i+1} v M_A platí $\frac{|A_iA_{i+1}|}{|C_iC_{i+1}|} = k$ a že každý vnitřní úhel $\sphericalangle A_{i-1}A_iA_{i+1}$ je shodný s odpovídajícím úhlem $\sphericalangle C_{i-1}C_iC_{i+1}$ (indexy se počítají modulo n, tedy A_{1-1} znamená A_n a podobně.) Z toho již plyne dokazovaná podobnost mnohoúhelníků M_A a M_C.

Poznámky k došlým řešením: Naprostá většina řešitelů užila buď komplexních čísel nebo analytické geometrie. Ze syntetických řešení *Franta Konopecký* a *Lenka Kovalčinová* použili k vyřešení úlohy spirální symetrii, ve druhém z těchto řešení však chyběl důkaz, že každou podobnost zachovávající orientaci lze vyjádřit jako spirální symetrii – za to jsem strhnul 2 body. Několik řešení se zabývalo pouze speciálními případy (např. případ, kdy jsou mnohoúhelníky $A_1A_2\ldots A_n$ a $B_1B_2\ldots B_n$ totožné), tvrzení však pak byla natolik triviální, že jsem za ně neuděloval žádné body. Nejelegantnější řešení založené na jednoduchých geometrických úvahách poslala *Eva Černohorská*, a zasloužila si tak prémii $2i$.

7. úloha (4, 4, 3,00, 3,0)

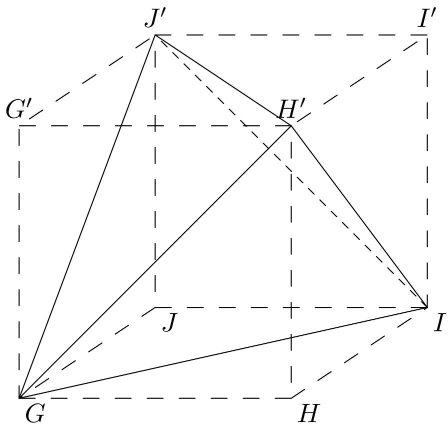
Mějme v (třírozměrném) prostoru dán bod O. Dále mějme konečně mnoho úseček OA_1, OA_2, … , OA_k. Mřížkou[7] tvořenou těmito úsečkami rozumějme množinu bodů X takových, že existuje $l \in \mathbb{N}$ a existují body $O = B_1, B_2, B_3, \ldots, B_{l-1}, B_l = X$ takové, že pro každé $i \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$ vznikne B_iB_{i+1} pouze posunutím nějaké z úseček OA_j (pro $j \in \{1, 2, \ldots, k\}$). Speciálně si všimněme, že i bod O považujeme za bod mřížky (nezáleží na orientaci úsečky, stačí za B_1B_2 i B_2B_3 volit OA_1). Mějme pravidelný čtyřstěn $OABC$ a krychli $ODEFO'D'E'F'$ se středem S.

[7]Pokud víš něco o vektorech, mřížka tvořená těmito úsečkami je tedy množina bodů X takových, že $\overrightarrow{OX} = m_1\overrightarrow{OA_1} + m_2\overrightarrow{OA_2} + \cdots + m_k\overrightarrow{OA_k}$, kde m_i jsou nějaká celá čísla.

Mřížku M_1 volme jako mřížku tvořenou úsečkami OA, OB, OC. Mřížku M_2 volme jako mřížku tvořenou úsečkami OD, OO', OS.
(a) Rozhodněte, jestli je M_1 podobná nějaké podmnožině M_2.
(b) Rozhodněte, jestli je M_2 podobná nějaké podmnožině M_1.
(c) Rozhodněte, jestli jsou M_1 a M_2 podobné.

Části (a) a (b) vyřešíme (částečně) najednou, dokážeme, že obě tvrzení jsou pravdivá.

Klíčovým pozorováním je si všimnout, že když máme nějakou krychli $GHIJG'H'I'J'$, potom body $GIH'J'$ tvoří pravidelný čtyřstěn. Důkaz je triviální. Označme a délku hrany krychle. Stačí si uvědomit, že vzdálenost libovolných dvou bodů z G, I, H', J' je $\sqrt{2}a$, což snadno plyne z toho, že dvojice těchto bodů tvoří úhlopříčky stěn krychle.



Aby se nám úloha snadněji řešila, učiníme ještě drobná pozorování o mřížce.

První je, že množina podobná mřížce tvořené úsečkami OA_1, OA_2, ... , OA_k je opět mřížka, a sice tvořená úsečkami PB_1, PB_2, ... , PB_k, kde úsečka PB_i vznikne zobrazením úsečky OA_i v dané podobnosti.

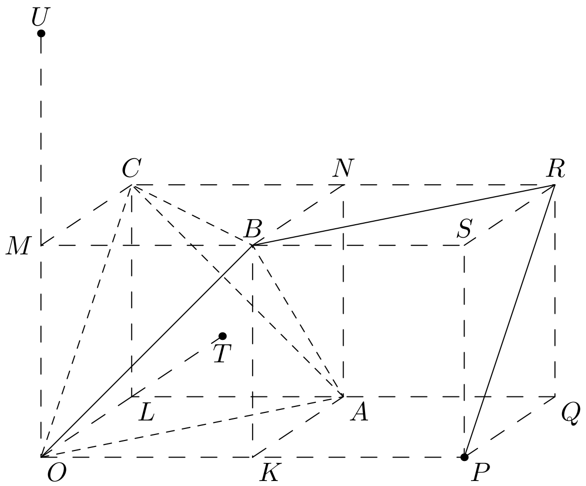
Druhé je, že kdykoliv X je bodem mřížky M vytvořené úsečkami OA_1, OA_2, ... , OA_k, potom mřížka tvořená úsečkami OA_1, OA_2, ... , OA_k, OX je totožná s mřížkou M.

Obě pozorování jsou velmi jednoduchá, proto si řekneme pouze nápovědu k důkazu (zkus si důkaz rozmyslet pořádně). V prvním si stačí uvědomit, že podobnost zachovává poměry délek a rovnoběžnost – tedy je-li úsečka u posunutím úsečky v, potom i úsečka vzniklá zobrazením úsečky u v dané podobnosti je posunutím obrazu úsečky v. V druhém pozorování si stačí uvědomit, že úsečka OX lze nahradit pomocí některých z úseček OA_1, OA_2, ... , OA_k.

Část (a) nyní už můžeme vyřešit v podstatě okamžitě, stačí si uvědomit, že body E, D', F' jsou body mřížky M_2. Bod D' získáme pomocí úseček (do závorky vždy píšeme úsečku, jejímž posunutím úsečka před závorkou vznikla) OD a DD' (OO'), bod F' pomocí úseček OS, SE' (OS) a $E'F'$ (OD) a bod E pomocí úseček OS, SE' (OS) a $E'E$ (OO'). Podle klíčového pozorování je $OED'F'$ pravidelný čtyřstěn, stejně jako $OABC$, tedy nějaká podobnost je na sebe zobrazuje (ve stejném pořadí vrcholů). Mřížka tvořená úsečkami OE, OD', OF' je podmnožinou mřížky tvořené úsečkami OD, OO', OS, OE, OD', OF', což je trojím použitím druhého drobného pozorování mřížka M_2. Podle prvního drobného pozorování je mřížka M_1 tvořená úsečkami OA,

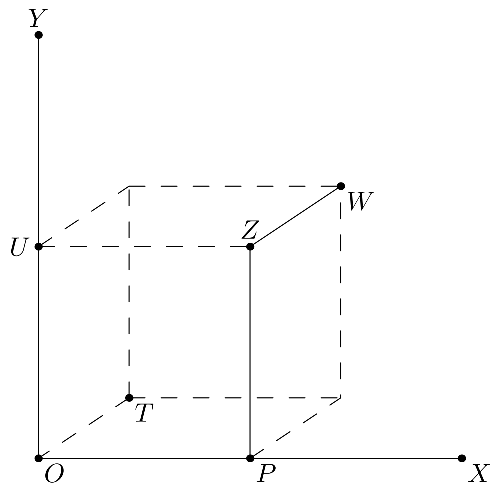
OB, OC podobná mřížce tvořené úsečkami OE, OD', OF', tedy podobná nějaké podmnožině M_2. Část (a) je hotova.

Podobně vyřešíme i část (b). Nejprve najdeme nějakou krychli $OKALMBNC$, přitom body O, A, B, C máme už zadané. Z klíčového pozorování plyne, že taková krychle $OKALMBNC$ existuje - stačí, když se pravidelný čtyřstěn $GIH'J'$ zobrazí v nějaké podobnosti na čtyřstěn $OKALMBNC$ a body K, L, M, N získáme jako obrazy bodů H, J, G', I' v této podobnosti. Dále připišme ke stěně $KANB$ krychle $OKALMBNC$ ještě krychli $KPQABVRN$. Potom bod P je bodem mřížky M_1, lze ho totiž získat pomocí úseček OB, BR (OA) a RP (OC). Podobně i body T, U takové, že L je středem úsečky OT a M je středem úsečky OU jsou body mřížky M_1.



Nyní už stačí jen úsečky OP a OU zdvojnásobit na úsečky OX a OY a bod W získat jako protilehlý vrchol k vrcholu O krychle určené úsečkami OP OT a OU. Potom body W, X, Y jsou body mřížky M_1 (důkaz si snadno rozmyslíš z třetího obrázku – podobné zdůvodnění jako v předchozích situacích).

Vzhledem k tomu, jak jsme body vytvářeli, je čtyřstěn $OXYW$ podobný čtyřstěnu $ODO'S$ (určujícímu mřížku M_2). Body X, Y, W jsou body mřížky M_1, odkud stejným způsobem jako v části (a) plyne, že mřížka M_2 je podobná nějaké podmnožině mřížky M_1.



Na závěr nám zbývá vyřešit část (c). Dokážeme, že mřížky M_1 a M_2 nejsou podobné.

Učiňme ještě třetí drobné pozorování o mřížce.

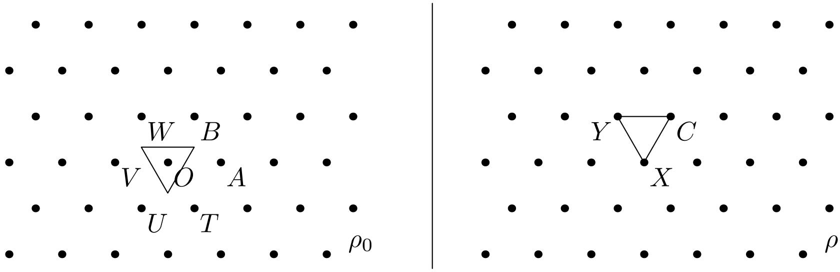
Všechny body mřížky M tvořené úsečkami OA_1, OA_2, $\ldots$, OA_n jsou ekvivalentní bodu O, tj. vybereme-li si libovolný bod $K \in M$, potom posuneme-li mřížku M ve směru orientované úsečky OK na množinu M', dostaneme opět mřížku M.

Dokážeme například $M \subset M'$. Druhá inkluze je analogická (podle prvního drobného pozorování je M_1 opět mřížka). Podle druhého drobného pozorování lze úsečku OK přidat k úsečkám tvořícím mřížku M. Mějme nějaký bod X v mřížce M a mějme posloupnost bodů B_0, B_1, $\ldots$, B_l dosvědčující, že bod X do mřížky M patří, potom posloupnost bodů B_0, B_1, $\ldots$, B_l, B_{l+1} dosvědčuje, že bod X patří i do mřížky M', kde bod B_{l+1} vznikne posunutím bodu B_l ve směru úsečky KO.

Nyní se už směle pusťme do přímého řešení části (c). Označme p_i počet bodů mřížky M_i, které mají od bodu O nejmenší možnou vzdálenost, pokud nám čísla p_1 a p_2 vyjdou různá, znamená to, že mřížky M_1 a M_2 nemohou být podobné. Podle třetího drobného pozorování totiž můžeme předpokládat, že kdyby byly podobné, tak nějaké podobné zobrazení převádějící M_1 na M_2 zobrazuje bod O opět na O. Vzhledem k tomu, že podobné zobrazení zachovává poměry vzdáleností, zobrazuje pak nejbližší body O opět na nejbližší body O, což nelze, pokud jsou jich různé počty.

Nejprve spočítáme p_1. Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že $|OA| = 1$. Označme ρ_0 rovinu určenou body O, A a B. Dále pro $k > 0$ značme ρ_k rovinu ρ_0 posunutou k-krát ve směru orientované úsečky OC a pro $k < 0$ značme ρ_k rovinu ρ_0 posunutou $-k$-krát ve směru orientované úsečky OC. Máme-li k nějakému bodu $X \in M_1$ posloupnost bodů $O = B_1$, B_2, $\ldots$, $B_l = X$, která dosvědčuje, že bod X patří do mřížky M_1, můžeme se na tuto posloupnost dívat tak, že bod B_{i+1} vznikne z bodu B_i posunutím ve směru nějaké z orientovaných úseček OA, OB, OC, AO, BO, CO. Je-li B_i v rovině ρ_j a posunutí je v jednom ze směrů OA, OB, AO, BO, potom je i B_{i+1} v rovině ρ_j (ρ_j je rovnoběžná s ρ_0, tedy je rovnoběžná s přímkami OA a OB), je-li posunutí v jednom ze směrů OC, CO, potom je B_{i+1} v rovině $\rho_{j\pm1}$. Odtud plyne, že každý bod mřížky M_1 leží v nějaké z rovin ρ_k, pro nějaké celé k. Dále si ještě všimněme, že vzdálenost rovin

ρ_j a ρ_{j+1} je výška v pravidelném čtyřstěnu $OABC$, což je $\frac{\sqrt{6}}{3}$. Vzdálenost bodu A od bodu O je 1. Uvědomíme si, že existuje 12 takových bodů, které mají vzdálenost od bodu O rovnou 1 a neexistují žádné body, které by měly od bodu O vzdálenost menší. Tím spočítáme $p_1 = 12$. Na čtvrtém obrázku jsou nakresleny body mřížky uvnitř roviny ρ_0 a ρ_1. Trojúhelník vyznačený v ρ_0 je kolmý průmět trojúhelníku CXY.



Rozmysli si (z obrázku je to celkem snadné), že body označené A, B, T, U, V, W jsou body mřížky M_1, které mají vzdálenost 1 od bodu O v rovině ρ_0 (a všechny ostatní mřížkové body v rovině ρ_0 mají vzdálenost větší). Podobně v rovině ρ_1 mají tuto vlastnost body C, X, Y. Zatím máme devět bodů. Další tři body najdeme v rovině ρ_{-1}, podobně jako v ρ_1. Roviny ρ_k pro $|k| \geq 2$ mají od ρ_0, tedy i od bodu O vzdálenost aspoň $2\frac{\sqrt{6}}{3} > 1$, tedy v těchto rovinách už žádný bod se vzdáleností 1 či méně nenajdeme. Tím jsme získali, že $p_1 = 12$.

Když se zcela analogickým způsobem spočítá p_2, vyjde 8, tedy $p_1 \neq p_2$, odkud, jak jsme již zdůvodnili, plyne, že M_1 a M_2 nejsou podobné.

8. úloha (8, 8, 4,00, 5,0)

V rovině s kartézským souřadnicovým systémem jsou nakresleny grafy tří kvadratických funkcí $f_i(x) = a_i x^2 + b_i x + c_i$, $i \in \{1, 2, 3\}$. Navíc každé dva z těchto grafů mají dvě společné tečny. Označme P_{ij}, $i, j \in \{1, 2, 3\}, i < j$, průsečík společných tečen grafů f_i a f_j. Dokažte, že body P_{12}, P_{13} a P_{23} leží na jedné přímce.

Dokážeme si jedno pomocné lemma, ze kterého už důkaz úlohy bude jednoduše (ale trochu trikově) vyplývat.

Lemma. Libovolné dva grafy zadaných funkcí jsou stejnolehlé, přitom středem stejnolehlosti grafů funkcí f_i a f_j $(1 \leq i < j \leq 3)$ je bod P_{ij}. Tato stejnolehlost je jediná možná.

Než se pustíme do důkazu lemmatu, uvědomíme si, jak z něj plyne tvrzení úlohy. Označme S stejnolehlost se středem P_{12} převádějící graf funkce f_1 na graf funkce f_2 a T stejnolehlost se středem P_{23} převádějící graf funkce f_2 na graf funkce f_3 (tyto stejnolehlosti podle lemmatu existují). Složení dvou stejnolehlostí je stejnolehlost, která má střed na přímce určené středy skládaných stejnolehlostí, nebo ve společném středu, pokud středy skládaných stejnolehlostí splývají (rozmysli si). Když tedy složíme S a T dohromady, dostaneme stejnolehlost převádějící graf funkce f_1 na graf funkce f_3, která má střed na přímce $P_{12}P_{23}$. Podle lemmatu (stejnolehlost je jen jedna) je ale tímto středem bod P_{13}, tedy bod P_{13} leží na přímce $P_{12}P_{23}$, což jsme chtěli dokázat. Nyní nám zbývá dokázat lemma.

K tomu si dokážeme ještě jedno pomocné tvrzení.

Nechť $f(x)$ je libovolná funkce a $g(x)$ je definována jako $g(x) = kf\left(\frac{x}{k} + p\right) + q$, kde k, p, q jsou reálné konstanty, $k \neq 0, 1$, potom grafy funkcí f a g jsou stejnolehlé.

Důkaz provedeme tak, že najdeme střed a koeficient stejnolehlosti. Střed bude mít souřadnice $\left[\frac{p}{1-\frac{1}{k}}, \frac{q}{1-k}\right]$ a koeficient bude k, přitom pro jednoduchost značme souřadnice středu $[a, b]$. K důkazu, že se skutečně jedná o koeficient a střed hledané stejnolehlosti, si stačí uvědomit, že v této stejnolehlosti se bod $[x, f(x)]$ zobrazuje na bod $[a + k(x - a), b + k(f(x) - b)]$, kde je-li $a + k(x - a) = z$, potom $b + k(f(x) - b) = g(z)$. Odtud se také dají najít souřadnice středu a koeficient.

Nyní naše pomocné tvrzení použijeme pro zadané paraboly. Rozmysli si, že pro $i \neq j$ lze parabolu $f_i(x)$ vyjádřit ve tvaru $f_i(x) = kf_j\left(\frac{x}{k} + p\right) + q$, pro nějaká $k \neq 0$, p, q (analogie upravení na čtverec). Navíc z toho, že pro každé dvě paraboly existují dvě různé tečny, plyne, že $a_i \neq a_j$, odkud pak $k \neq 1$.

Tedy první část lemmatu (existenci stejnolehlostí) máme hotovou. Nyní chceme ověřit, že střed stejnolehlosti leží na průsečíku společných tečen. To lze provést například tak, že se rovnice (libovolné) společné tečny vyjádří a zjistí se, že na ní leží střed stejnolehlosti vyjádřený v pomocném tvrzení (není v tom žádná hluboká myšlenka, a tak nemá příliš valný význam to zde psát).

Poznámky k došlým řešením: Úlohu řešilo osm řešitelů, mezi které jsem rozdělil -7 imaginárních bodů. Analytická geometrie není vždy nejhezčí cesta, jak nějakou úlohu vyřešit. O mnohem lepší je zkusit přijít na nějaké hezké řešení než ukázat opravovateli, že umím upravovat výrazy přes dva řádky (obzvláště když se série nazývá podobnosti a ne analytická geometrie)!