Povídání k 6. sérii

V 6. sérii jsme v zadáních použili nějaké pojmy, které by Ti nemusely být přímo jasné, proto jsme se rozhodli udělat drobné povídání k této sérii.

Z desítkové soustavy jsme zvyklí zapsat libovolné přirozené číslo k jednoznačně ve tvaru[1] $k = \overline{a_n a_{n-1} \cdots a_0} = a_n 10^n + a_{n-1} 10^{n-1} + \cdots + a_0$, kde $n \in \mathbb{N}_0$, $a_i \in \{0, 1, \ldots, 9\}$ pro $i \in \{0, 1, \ldots, n\}$, a navíc $a_n \neq 0$.

Desítka, na kterou jsme zvyklí, však není vůbec omezující, jako základ soustavy si můžeme vzít obecné přirozené $z \geq 2$. Potom $k = \overline{b_m b_{m-1} \cdots b_0} = b_m z^m + b_{m-1} 10^{m-1} + \cdots + b_0$, kde $m \in \mathbb{N}_0$, $b_i \in \{0, 1, \ldots, z-1\}$ pro $i \in \{0, 1, \ldots, m\}$, a navíc $b_m \neq 0$. Uvědomit si, že takový zápis existuje a je právě jeden, není vůbec těžké (zkus si rozmyslet, nejprve například pro $z = 10$, na které jsi zvyklý).

V tomto odstavci si pro lepší pochopení, jak ciferné soustavy fungují, převedeme číslo 2411 zapsané v pětkové soustavě do soustavy jedenáctkové. Ve skutečnosti ho nejprve převedeme do desítkové soustavy (výhodou totiž je, že v desítkové soustavě umíme počítat). Označme dané číslo jako k, tedy (zapsáno v desítkové soustavě) $k = 2 \cdot 5^3 + 4 \cdot 5^2 + 5^1 + 5^0 = 250 + 100 + 5 + 1 = 356$. Nyní z k budeme postupně odečítat nejvyšší možné mocniny 11, aby zbytek byl nezáporný, dostaneme $k = 356 = 11^2 + 235 = 2 \cdot 11^2 + 114 = 2 \cdot 11^2 + 11 + 103 = \cdots = 2 \cdot 11^2 + 10 \cdot 11^1 + 4 \cdot 11^0$. Nyní už nám k zápisu k v jedenáctkové soustavě chybí jediná drobnost – vypořádat se s tím, že u 11^1 máme koeficient 10 (kdybychom napsali zápis $k = 2104$, potom tento zápis může být interpretován jako jiné (čtyřciferné) číslo). Označme proto koeficient 10 nějakým symbolem, například A. Číslo k pak má v jedenáctkové soustavě zápis $2A4$.

Nakonec se vraťme k cifernému součtu. Ciferným součtem čísla k v soustavě o základu z rozumíme, celkem přirozeně, výraz $b_m + b_{m-1} + \cdots + b_0$, kde $k = \overline{b_m b_{m-1} \cdots b_0} = b_m z^m + b_{m-1} 10^{m-1} + \cdots + b_0$, $m \in \mathbb{N}_0$, $b_i \in \{0, 1, \ldots, z-1\}$ pro $i \in \{0, 1, \ldots, m\}$, $b_m \neq 0$.

6. série

Téma: Ciferné součty

Termín odeslání: 8. BŘEZNA 2004

1. ÚLOHA (3 BODY)

Dokažte, že pro každé n přirozené platí $S(2n) \leq 2S(n) \leq 10S(2n)$, kde $S(n)$ značí ciferný součet čísla n.

2. ÚLOHA (3 BODY)

Mějme dáno přirozené číslo n, jehož cifry jsou ostře rostoucí zleva doprava. Určete ciferný součet čísla $9n$.

3. ÚLOHA (3 BODY)

Skripta MFF jsou číslována šesticifernými čísly, přičemž jsou povoleny nuly na začátku. Šťastnými

[1] Pruhem nad $a_n a_{n-1} \cdots a_0$ chceme naznačit, že čísla a_n, a_{n-1}, …, a_0 nenásobíme, ale píšeme za sebe jako cifry.

nazveme ta z nich, jejichž označení má stejný součet prvních tří a posledních tří cifer. Dokažte, že součet označení všech šťastných skript je dělitelný sedmi.

4. ÚLOHA (5 BODŮ)

Najděte všechna přirozená čísla d taková, že libovolné přirozené číslo dělitelné d zapsané v 2003-kové soustavě má ciferný součet dělitelný d.

5. ÚLOHA (5 BODŮ)

Určete, pro která n přirozená existuje m přirozené takové, že $S(m^2) = n$, kde $S(n)$ značí ciferný součet čísla n.

6. ÚLOHA (5 BODŮ)

Označme $S_k(n)$ ciferný součet přirozeného čísla n zapsaného v soustavě o základu k. Dále nechť pro přirozené $n \geq 2$ je

$$\sigma(n) = \sum_{k=2}^{n} S_k(n).$$

Zjistěte, pro která přirozená $n \geq 3$ je $\sigma(n) - \sigma(n-1) \geq n-1$.

7. ÚLOHA (5 BODŮ)

Ukažte, že pro každé přirozené číslo n existuje n-ciferné číslo N, jehož všechny cifry jsou nenulové a je dělitelné svým ciferným součtem.

8. ÚLOHA (5 BODŮ)

Označme $S(n)$ ciferný součet čísla n a $p(n)$ počet cifer čísla n. Dokažte, že pro každé přirozené n a pro libovolná α, β reálná taková, že $0 \leq \alpha < \beta \leq 9$, existuje k přirozené, že

$$\alpha < \frac{S(kn)}{p(kn)} < \beta.$$

Řešení 6. série

1. úloha

Dokažte, že pro každé n přirozené platí $S(2n) \leq 2S(n) \leq 10S(2n)$, kde $S(n)$ značí ciferný součet čísla n.

K řešení využijeme faktu, že máme-li přirozená čísla a a b, potom $S(a+b) \leq S(a) + S(b)$.

Jak to nahlédnout? Vcelku intuitivně ze způsobu, kterým sčítáme dvě čísla písemně pod sebou. Sečteme-li pod sebou dvě cifry, potom do $S(a) + S(b)$ přičteme celý součet, do $S(a+b)$ pak dáme totéž číslo, je-li menší nebo rovno devíti, jinak započítáme zbytek po dělení deseti a pamatujeme si jedničku pro další cifru. Protože sčítáme jen dvě čísla, mezi řády přenášíme maximálně jedničku (je $1 + 9 + 9 = 19$), za součet dvou cifer větší nebo roven deseti tedy do $S(a+b)$ přičteme nejvýše 10. Tím jsme dané tvrzení dokázali.

Vyzbrojeni tímto faktem už úlohu hravě dořešíme. Stačí si ještě uvědomit, že $S(10n) = S(n)$ a že předchozí tvrzení můžeme indukcí rozšířit na součet libovolně mnoha čísel(např. pro tři čísla $S(a+b+c) \leq S(a+b) + S(c) \leq S(a) + S(b) + S(c)$). Nyní je

$$S(2n) = S(n+n) \leq S(n) + S(n) = 2S(n),$$

$$2S(n) = 2S(10n) = 2S(2n+2n+2n+2n+2n) \leq 10S(2n).$$

Poznámky k došlým řešením:

2. úloha

Mějme dáno přirozené číslo n, jehož cifry jsou ostře rostoucí zleva doprava. Určete ciferný součet čísla $9n$.

Na začátek provedeme fintu – uvědomíme si, že $9n = 10n - n$. Označme si $a_1, \ldots, a_k$ cifry čísla n (zleva doprava). Číslo n odečteme od $10n$ obvyklým způsobem pod sebou:

$$\begin{array}{l} a_1\ a_2\ \cdots\ a_k\ \ 0 \\ \underline{-\ \ a_1\ a_2\ \cdots\ a_k} \\ b_0\ \ b_1\ \cdots\cdots\ b_k \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{r} 10n \\ \underline{-\ n} \\ 9n \end{array}$$

($b_0, b_1, \ldots, b_k$ tedy značíme cifry čísla $9n$ (zleva doprava)).

V prvním kroku odčítání zjistíme, že $b_k = 10 - a_k$ (cifry jsou rostoucí zleva doprava, tedy $a_k > 0$, je-li n přirozené).

Překročili jsme řád, a tak k a_{k-1} přičteme jedničku, $a_k > a_{k-1}$, tedy $a_k \geq a_{k-1} + 1$, odkud v dalším kroku dostáváme, že $b_{k-1} = a_k - (a_{k-1} + 1)$.

Nyní jsme řád nepřekročili, nebudeme tedy nic přičítat.

Dále spočítáme, že $b_{k-2} = a_{k-1} - a_{k-2}$, $b_{k-3} = a_{k-2} - a_{k-3}$, $\ldots$, $b_1 = a_2 - a_1$, $b_0 = a_1$ (využíváme vždy, že $a_i > a_{i-1}$).

Chceme-li určit ciferný součet $9n$, chceme určit $b_0 + b_1 + \cdots + b_k$. Tedy

$$b_0 + b_1 + \cdots + b_{k-1} + b_k =$$

$$= a_1 + (a_2 - a_1) + \cdots + (a_{k-1} - a_{k-2}) + (a_k - a_{k-1} - 1) + (10 - a_k) = 9.$$

Všimni si, že tento postup funguje, i když je k malé, tj. $k = 1$, nebo $k = 2$.

Poznámky k došlým řešením:

3. úloha

Skripta MFF jsou číslována šesticifernými čísly, přičemž jsou povoleny nuly na začátku. Šťastnými nazveme ta z nich, jejichž označení má stejný součet prvních tří a posledních tří cifer. Dokažte, že součet označení všech šťastných skript je dělitelný sedmi.

Čísla šťastných skript jsou dvou typů – buď je první trojčíslí rovno druhému, nebo je jiné. V prvním případě je tedy číslo tvaru $abcabc$, což je rovno $1001 \cdot abc = 7 \cdot 143 \cdot abc$. V druhém případě je číslo tvaru $abcxyz$, přičemž číslem šťastných skript je i $xyzabc$, součet tohoto páru je $abcxyz + xyzabc = 1001(abc + xyz) = 7 \cdot 143 \cdot (abc + xyz)$. Vidíme tedy, že sečteme-li čísla všech šťastných skript, dostaneme číslo dělitelné sedmi.

Poznámky k došlým řešením:

4. úloha

Najděte všechna přirozená čísla d taková, že libovolné přirozené číslo dělitelné d zapsané v 2003-kové soustavě má ciferný součet dělitelný d.

Ukážeme, že řešením je právě všech 16 kladných dělitelů čísla $2002 = 2 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13$ – tedy 1, 2, 7, 11, 13, 14, 22, 26, 77, 91, 143, 154, 182, 286, 1001, 2002.

Pro každé přirozené n a pro d kladného dělitele 2002 platí

$$2003^n - 1 = (2003 - 1) \cdot (2003^{n-1} - 2003^{n-2} + \cdots + (-1)^{n-2} \cdot 2003 + (-1)^{n-1}),$$

což je číslo dělitelné d, tedy 2003^n dává zbytek 1 při dělení d, proto také $m = 2003^k a_k + 2003^{k-1} a_{k-1} + \cdots + 2003 a_1 + a_0$ dává po dělení d stejný zbytek jako $a_k + a_{k-1} + \cdots + a_0$, což je právě ciferný součet m ve 2003-kové soustavě.

Žádná jiná čísla úlohu nesplňují: Pokud $d \leq 2002$, d nedělí 2002, vezměme si nejmenší násobek čísla d větší než 2002. Ten se dá napsat jako $2002 + c$, kde $1 \leq c < d$, jeho ciferný součet je $1 + (c - 1) = c$, tedy není dělitelný d. Pokud $d > 2002$, pak ciferný součet čísla d je menší než d (pro každé přirozené a je $a \cdot 2003^n \geq a$, pro $n \geq 1$ platí ostrá nerovnost) a je kladný, takže nemůže být dělitelný d.

Poznámky k došlým řešením:

5. úloha

Určete, pro která n přirozená existuje m přirozené takové, že $S(m^2) = n$, kde $S(n)$ značí ciferný součet čísla n.

Nejprve určíme, pro která n vhodné m nenajdeme. Využijeme toho, že ciferný součet dává při dělení devíti stejný zbytek jako číslo samo. Podíváme-li se na druhé mocniny přirozených čísel, zjistíme, že možné zbytky jsou 0, 1, 4 a 7. Dává-li n po dělení devíti jiný zbytek, nemůže být ciferným součtem druhé mocniny.

Nyní ukážeme, že pro čísla, která nám zůstala, už vhodné m najdeme. Podívejme se na druhou mocninu čísla tvaru $3\dots32$, kde trojek je k, tato je tvaru $1\dots102\dots24$, kde jedniček i dvojek je k. Jak to nahlédneme? Je

$$3\dots32^2 = \left(\frac{10^{k+1}-1}{3}-1\right)^2 = \frac{10^{2k+2}-2\cdot 10^{k+1}+1}{9} - 2\frac{10^{k+1}-1}{3}+1 =$$

$$= \frac{10^{2k+2}-10^{k+2}+10^{k+2}-2\cdot 10^{k+1}+1-6\cdot 10^{k+1}+6}{9}+1 =$$

$$= 10^{k+2}\frac{10^k-1}{9}+2\frac{10^{k+1}-1}{9}+2,$$

což je číslo, které jsme chtěli dostat. Vidíme, že daný tvar je platný i pro $k=0$ a ciferné součty dvou následujících čísel tohoto tvaru se liší o 3, přidáme-li $m=1$ pro $n=1$, ukázali jsme, že vhodné m najdeme pro všechna přirozená čísla, která dávají po dělení devíti zbytek z množiny $\{1,4,7\}$. Zbývají čísla dělitelná devíti, pro ně využijeme čísla tvaru $3\dots3$, kde trojek je k, potom je

$$(3\dots3)^2 = \left(\frac{10^k-1}{3}\right)^2 = \frac{10^{2k}-10^{k+1}+10^{k+1}-2\cdot 10^k+1}{9} =$$

$$= 10^{k+1}\frac{10^{k-1}-1}{9}+8\frac{10^k-1}{9}+1,$$

což je číslo tvaru $1\dots108\dots89$, kde jedniček i osmiček je $k-1$. Tento tvar je platný i pro $k=1$, kdy je ciferný součet 9, ciferný součet se zvýší vždy o 9, dostali jsme tak vhodná m pro všechna n dělitelná devíti. Celkově jsme tedy vyloučili přirozená čísla, pro něž vhodné m určitě nenajdeme, a pro zbylá jsme tato m našli, tím je úloha vyřešena.

Poznámky k došlým řešením:

6. úloha
Označme $S_k(n)$ ciferný součet přirozeného čísla n zapsaného v soustavě o základu k. Dále nechť pro přirozené $n \geq 2$ je

$$\sigma(n) = \sum_{k=2}^{n} S_k(n).$$

Zjistěte, pro která přirozená $n \geq 3$ je $\sigma(n) - \sigma(n-1) \geq n - 1$.

Nejprve si zadání malinko přepíšeme, upravme levou stranu rovnice.

$$\sigma(n) - \sigma(n-1) = \sum_{k=2}^{n} S_k(n) - \sum_{k=2}^{n-1} S_k(n-1) = \sum_{k=2}^{n-1} (S_k(n) - S_k(n-1)) + S_n(n).$$

Myšlenka úlohy spočívá v tom, že výraz $(S_k(n) - S_k(n-1))$ je vždy menší nebo roven 1 a rovnost nastává, právě když k není dělitelem čísla n.

Nejprve nechť k není dělitelem čísla n. Napišme si číslo n v soustavě o základu k jako $\overline{a_s a_{s-1} \dots a_0} = a_s k^s + \dots + a_0 k^0$ $(a_i \in \{0, 1, \dots, s-1\})$. Potom $a_0 \neq 0$, jinak je $n = a_s k^s + \dots + a_1 k^1 + 0 \cdot k^0$ dělitelné číslem k, což je spor s předpokladem. Odtud ale plyne, že číslo $n - 1$ lze zapsat jako $\overline{a_s a_{s-1} \dots a_1 (a_0 - 1)}$ a $(S_k(n) - S_k(n-1)) = 1$.

Nyní nechť naopak k je dělitelem čísla n. Pak ve stejném zápisu $n = \overline{a_s a_{s-1} \dots a_0}$ platí, že $a_0 = 0$. Potom zápis čísla $n - 1$ bude $\overline{a_s a_{s-1} \dots (a_i - 1) 99 \dots 9}$, kde a_i je první nenulová cifra (od konce). Tedy ciferný součet čísla $n - 1$ je aspoň o 8 větší než ciferný součet čísla n, tedy $(S_k(n) - S_k(n-1)) \leq -8 < 1$.

Nyní už je řešení úlohy zřejmé. Totiž

$$\sigma(n) - \sigma(n-1) = \sum_{k=2}^{n-1} (S_k(n) - S_k(n-1)) + S_n(n) \leq \left(\sum_{k=2}^{n-1} 1 \right) + 1 = n - 1.$$

V druhé úpravě jsme využili toho, že $S_n(n) = 1$, neboť číslo n má v soustavě o základu n zápis 10. Rovnost nastává, právě když jsou všechna čísla $k \in \{1, 2, \dots, n-1\}$ s číslem n nesoudělná, což nastává, právě když je n prvočíslo.

Tedy pro prvočísla nastane rovnost v nerovnosti ze zadání a úloha je splněna, pro složená čísla nastane opačná nerovnost, tedy úloha splněna není.

7. úloha
Ukažte, že pro každé přirozené číslo n existuje n-ciferné číslo N, jehož všechny cifry jsou nenulové a je dělitelné svým ciferným součtem.

V řešení využijeme dvou pozorování. Nejdříve nahlédneme, že číslo $c_k = 1 \dots 1$, kde jedniček je 3^k, je dělitelné 3^k. Použijeme matematickou indukci. Pro $k = 1$ tvrzení platí, je $111 = 3 \cdot 37$. Nechť tedy tvrzení platí pro k. Potom $c_{k+1} = (10^{2 \cdot 3^k} + 10^{3^k} + 1) c_k$, první činitel je dělitelný 3 (ciferný součet je roven tři), druhý 3^k (indukční předpoklad), proto je c_{k+1} dělitelné 3^{k+1}.

Nyní si dokážeme, že vynásobíme-li číslo $9\ldots9$, kde devítek je k, číslem, které má nejvýše k cifer a poslední cifra je nenulová, dostaneme číslo s $k+i$ ciframi a ciferným součtem $9k$. Vskutku, násobíme-li číslem $a = a_1a_2\ldots a_i$, $i \le k$, dostáváme

$$9\ldots9a = (10^k-1)a_1\ldots a_i = a_1\ldots a_{j-1}(a_j-1)9\ldots9(9-a_1)\ldots(9-a_{j-1})(10-a_j),$$

kde devítek je $k-i$. Ciferný součet je tedy opravdu $9k$ a počet cifer $k+i$.

Mějme nyní dáno přirozené číslo n. K němu si najdeme k přirozené (nebo nulové) takové, že $3^k \le n < 3^{k+1}$. Potom nastává jeden ze dvou možných případů – buď $3^k \le n \le 2\cdot3^k$, nebo $2\cdot3^k < n < 3^{k+1}$.

Vezměme nejprve první případ. Je-li $n = 3^k$, jsme s odvoláním na první pozorování hotovi. Nechť tedy $j = n - 3^k > 0$. Uvažme číslo $N = 9\ldots9\cdot1\ldots12$, kde devítek je 3^k a jedniček $j-1$. Podle druhého pozorování má N ciferný součet 3^{k+2} a n cifer. Ovšem N je dělitelné svým ciferným součtem, neboť jeho dělitelem je číslo $1\ldots1\cdot3^2$, kde jedniček je 3^k, které je (s využitím prvního pozorování) dělitelné 3^{k+2}. Že N neobsahuje nulu, je vidět z vyjádření podle druhého pozorování – je $N = 1\ldots19\ldots98\ldots8$, kde jedniček a osmiček je $n-3^k$ a devítek je $2\cdot3^k-n$.

Zbývá druhý případ. Zde vezměme $j = n - 2\cdot3^k$ a $N = 9\ldots9\cdot2\ldots2$, kde devítek je $2\cdot3^k$ a dvojek j. Z druhého pozorování vidíme, že N má n cifer a ciferný součet $2\cdot3^{k+2}$. Ovšem podobně jako v prvním případě, 3^{k+2} dělí první činitel N, 2 dělí druhý činitel, tedy N je opravdu dělitelné svým ciferným součtem. Zbývá nahlédnout, že neobsahuje ve svém zápise nulu, to však opět plyne z vyjádření z druhého pozorování, je $N = 2\ldots219\ldots97\ldots78$, kde dvojek a sedmiček je $j-1$ a devítek je $2\cdot3^k-j$.

Poznámky k došlým řešením:

8. úloha

Označme $S(n)$ ciferný součet čísla n a $p(n)$ počet cifer čísla n. Dokažte, že pro každé přirozené n a pro libovolná α,β reálná taková, že $0 \le \alpha < \beta \le 9$, existuje k přirozené, že

$$\alpha < \frac{S(kn)}{p(kn)} < \beta.$$

Zvolme si nějaké racionální číslo $\frac{p}{q}$ na intervalu (α,β). Rozmysli si, že na každém intervalu nějaké racionální číslo existuje (pokud pro nějaké q platí, že $\frac{1}{q}$ je menší než délka intervalu, potom čísla $\frac{z}{q}$, kde z je celé, nemůžou daný interval přeskočit).

Tím, že $\frac{p}{q} \in (\alpha,\beta)$ je $0 < \frac{p}{q} < 9$, neboli $0 < p < 9q$. Myšlenka úlohy je nyní jednoduchá, budeme volit k takové, aby pro nějaké l bylo $S(kn)$ rovné pl, $p(kn)$ rovné ql, potom $\frac{S(kn)}{p(kn)}$ bude rovné $\frac{pl}{ql} = \frac{p}{q}$, čímž se trefí do intervalu (α,β).

Nejprve si uvědomíme ($\heartsuit$), že pro každé h přirozené existuje nějaké přirozené číslo m takové, že $\frac{p}{q} = \frac{S(m)}{p(m)}$ a číslo m má na svém konci h nul. Volme číslo m, které má $9hq$ cifer a chtějme po něm, aby mělo ciferný součet $9hp$, což nejsnáze učiníme tak, že prvních hp cifer bude 9 a zbývajících $h(9q-p)$ cifer bude 0 ($m = \underbrace{99\cdots9}_{hp}\underbrace{00\cdots0}_{h(9q-p)}$). Víme, že $p < 9q$, tedy $9q - p \ge 1$, čímž nám na konci zbude alespoň $h(9q-p) \ge h\cdot1 = h$ nul, což jsme chtěli. Potom

$$\frac{S(m)}{p(m)} = \frac{9hp}{9hq} = \frac{p}{q}.$$

Nyní si rozepišme n ze zadání jako $n = 2^\alpha 5^\beta n'$, kde n' je nesoudělné s 2 a 5, a v ($\heartsuit$) volme $h = \max(\alpha, \beta)$.

Nyní označme m_i číslo, které vznikne zapsáním m i-krát za sebou, např $m_2 = \overline{mm} = \overline{\underbrace{99\cdots9}_{hp}\underbrace{00\cdots0}_{h(9q-p)}\underbrace{99\cdots9}_{hp}\underbrace{00\cdots0}_{h(9q-p)}}$.

Potom platí ($\spadesuit$), že mezi čísly $m_1, m_2, \ldots$ existuje násobek čísla n'.

Důkaz ($\spadesuit$) je snadný. Stačí si uvědomit, že čísla $m_1, m_2, \ldots$ mají jen konečně mnoho možných zbytků při dělení n', tedy nějaký zbytek r se musí opakovat. Řekněme, že čísla m_i a m_j, $i < j$ dávají zbytek r při dělení n'. Potom číslo $m_j - m_i$ dává zbytek 0 při dělení n'. Navíc

$$m_j - m_i = \overline{\underbrace{mm\cdots m}_{j}} - \overline{\underbrace{mm\cdots m}_{i}} = \overline{\underbrace{mm\cdots m}_{j-i}\underbrace{00\cdots0}_{i\cdot p(m)}} = m_{j-i}\cdot 10^{i\cdot p(m)}.$$

Tedy $m_{j-i}\cdot 10^{i\cdot p(m)}$ je dělitelné n', a když využijeme faktu, že n' je nesoudělné s 2 a 5 (čili $10^{i\cdot p(m)}$ a n' jsou nesoudělná), dostaneme, že m_{j-i} je dělitelné n' (pokud Ti to není jasné, rozmysli si z rozkladu na prvočísla). Tím je ($\spadesuit$) dokázáno.

Nyní už stačí volit $k = \frac{m_{j-i}}{n}$, kde m_{j-i} jsme získali ze ($\spadesuit$), tedy je dělitelné n', podle ($\heartsuit$) má m_{j-i} na svém konci aspoň $\max(\alpha, \beta)$ nul, tedy je dělitelné i $2^\alpha 5^\beta$, dohromady je tedy m_{j-i} dělitelné $n = 2^\alpha 5^\beta n'$, k je tudíž přirozené. Nyní už jen

$$\frac{S(kn)}{p(kn)} = \frac{S(m_{j-i})}{p(m_{j-i})} = \frac{(j-i)S(m)}{(j-i)p(m)} = \frac{p}{q},$$

což jsme chtěli dokázat, a úloha je vyřešena (v druhé rovnosti jsme využili toho, že m_{j-i} je m zapsané $(j-i)$-krát za sebou, v třetí jsme použili ($\heartsuit$)).

Poznámky k došlým řešením: