Povídání k 7. sérii

Sedmá série se zabývá komplexními čísly. Následující řádky jsou zamýšleny jako pomoc řešitelům, kteří se s těmito čísly dosud nesetkali. Komplexní čísla jsou rozšířením oboru reálných čísel. Mohou být definována mnoha ekvivalentními způsoby. Nejdůležitější jsou tyto:

(1) *(intuitivně)* Reálná čísla rozšíříme o imaginární jednotku i, pro kterou definujeme $i^2 = -1$. Komplexní čísla pak budou čísla ve tvaru $(a + ib)$, kde a, b jsou čísla reálná. Sčítání a násobení funguje stejně jako v reálných číslech, tj.

$$(a+ib)+(c+id)=(a+c)+i(b+d)$$

$$(a+ib)\cdot(c+id)=(ac-bd)+i(bc+ad).$$

(Druhý vztah dostaneme roznásobením a následným použitím vztahu $i^2 = -1$.)

(2) *(geometricky)* Vezmu body (uspořádané dvojice reálných čísel) v rovině, sčítání a násobení definuji

$$[a,b]+[c,d]=[a+c,b+d]$$

$$[a,b]\cdot[c,d]=[ac-bd,bc+ad].$$

Mluvíme pak o tzv. *Gaussově rovině.*

(3) *(algebraicky)* Komplexní čísla jsou nejmenší číselný obor, ve kterém má každý nekonstantní reálný polynom kořen.

Snadno můžeme ověřit vzorec pro dělení:

$$\frac{a+ib}{c+id}=\frac{(a+ib)(c-id)}{(c+id)(c-id)}=\frac{ac+bd+i(bc-ad)}{c^2+d^2}.$$

Zavedeme následující označení.

(1) absolutní hodnota: $|a+ib|=\sqrt{a^2+b^2}$.
(2) reálná, imaginární část: $\Re(a+ib)=a$, $\Im(a+ib)=b$.
(3) komplexně sdružené číslo: $\overline{a+ib}=a-ib$.
(4) komplexní exponenciála: $e^{x+iy}=e^x(\cos y+i\sin y)$.

Každé komplexní číslo α lze psát v goniometrickém tvaru $r(\cos\varphi+i\sin\varphi)=re^{i\varphi}$. Stačí volit $r=|\alpha|$ a φ tak, aby $\cos\varphi=\frac{\Re\alpha}{|\alpha|}$, $\sin\varphi=\frac{\Im\alpha}{|\alpha|}$.

Platí tzv. *Moivreova věta*, která dává opodstatnění definici komplexní exponenciály:

$$(re^{i\varphi})^n=(r(\cos\varphi+i\sin\varphi))^n=r^n(\cos n\varphi+i\sin n\varphi)=r^ne^{in\varphi}$$

Tato věta se používá pro výpočet mocnin i odmocnin komplexních čísel. Pozor, odmocniny nejsou jednoznačné! $\sqrt[n]{\alpha}$ je vlastně řešení rovnice $x^n-\alpha=0$ a polynom n-tého stupně může mít (a v tomto případě pro $\alpha\neq 0$ má) n různých komplexních kořenů.

Pomocí součtových vzorců pro goniometrické funkce můžeme odvodit vzorec pro násobení komplexních čísel v goniometrickém tvaru:

$$r(\cos\varphi+i\sin\varphi)\cdot s(\cos\psi+i\sin\psi)=rs(\cos(\varphi+\psi)+i\sin(\varphi+\psi)).$$

Z něj Moivreova věta snadno plyne. V exponenciálním zápisu je věc ještě jasnější — platí

$$e^{a+ib}e^{c+id}=e^{(a+c)+i(b+d)}.$$

7. série

Téma: Komplexní čísla

Termín odeslání: 26. DUBNA 2004

1. ÚLOHA (3 BODY)

Nechť a, b jsou komplexní čísla taková, že $|a| = |b| = 1$. Určete hodnotu výrazu $|a-b|^2 + |a+b|^2$.

2. ÚLOHA (3 BODY)

Nechť $p(z) = z^2 + az + b$ je polynom s komplexními koeficienty (tedy $a, b \in \mathbb{C}$) a definičním oborem $\mathbb{C}$ takový, že $|p(z)| = 1$ pro $|z| = 1$ (tedy pro čísla na jednotkové kružnici). Ukažte, že pak nutně $a = b = 0$.

3. ÚLOHA (3 BODY)

Najděte všechny funkce $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ splňující pro každé komplexní číslo z rovnost

$$f(z) + zf(1-z) = 1 + z.$$

4. ÚLOHA (5 BODŮ)

Nechť O je počátek souřadnic komplexní roviny (tedy číslo $0 + 0i$) a zároveň vrchol krychle, přičemž OA, OB, OC jsou její hrany. Kolmé průměty bodů A, B, C do komplexní roviny nechť jsou komplexní čísla u, v, w. Dokažte, že $u^2 + v^2 + w^2 = 0$.

5. ÚLOHA (5 BODŮ)

Nechť z_1, z_2, z_3 jsou tři komplexní čísla taková, že $0 < |z_1| < |z_2| < |z_3|$, a nechť $r_j(\cos\varphi_j + i\sin\varphi_j)$ je goniometrický zápis čísla z_j pro $j \in \{1, 2, 3\}$. Dále nechť β_1, β_2, β_3 jsou tři kladná reálná čísla. Označme $f_j(n) = r_j\left(\cos(\varphi_j + n\beta_j) + i\sin(\varphi_j + n\beta_j)\right)$, $j \in \{1, 2, 3\}$. Předpokládejme, že existuje devět různých přirozených čísel $n_1, n_2, \dots, n_9$ takových, že komplexní čísla $f_1(n_k)$, $f_2(n_k)$, $f_3(n_k)$ leží na jedné přímce (v Gaussově rovině) pro $k \in \{1, 2, \dots, 9\}$ a navíc devět takto vzniklých přímek má stejnou vzdálenost od bodu $0 + 0i$. Dokažte, že pak existuje nekonečně mnoho přirozených n takových, že body $f_1(n)$, $f_2(n)$, $f_3(n)$ leží na jedné přímce.

6. ÚLOHA (5 BODŮ)

nechť α je $(2^n + 1)$-vá odmocnina z jedné, přičemž je různá od 1. Dokažte, že vždy najdeme polynomy $p(x)$, $q(x)$ s celočíselnými koeficienty takové, že $p(\alpha)^2 + q(\alpha)^2 = -1$.

7. ÚLOHA (5 BODŮ)

Nechť $n \in \mathbb{N}$, α, $z_1, z_2, \dots, z_n \in \mathbb{C}$, přičemž $|\alpha| = 1$, $|z_i| \geq 1$ pro $i \in \{1, \dots, n\}$. Rozhodněte v závislosti na n a α, kolik maximálně existuje $z \in \mathbb{C}$ takových, že $|z| < 1$ a platí vztah

$$\frac{n}{1-\alpha} = \sum_{i=1}^{n} \frac{z}{z - z_i}.$$

8. ÚLOHA (5 BODŮ)

Upravte na co nejjednodušší tvar výraz

$$0^2\binom{n}{0} + 3^2\binom{n}{3} + 6^2\binom{n}{6} + \cdots + \left(3\left\lfloor\frac{n}{3}\right\rfloor\right)^2\binom{n}{3\left\lfloor\frac{n}{3}\right\rfloor}.$$

Přitom $\lfloor x \rfloor$ značí dolní celou část x, tj. největší celé číslo takové, které je menší nebo rovné x.

Řešení 7. série

1. úloha (48, 46, 2,00, 3,0)

Nechť a, b jsou komplexní čísla taková, že $|a| = |b| = 1$. Určete hodnotu výrazu $|a-b|^2 + |a+b|^2$.

Úlohu vyřešíme geometrickou představou. Nejprve si uvědomíme, že když je $|b| = 1$, pak je i $|-b| = 1$. Tedy body a, b, $-b$ leží (v Gaussově rovině) na jednotkové kružnici se středem v počátku. Navíc body b a $-b$ tvoří její průměr, odkud je podle Thaletovy věty trojúhelník T tvořený body a, b, $-b$ pravoúhlý s pravým úhlem u bodu a. Velikost úsečky tvořené body c, d je $|c-d|$, tedy podle Pythagorovy věty pro trojúhelník T je

$$|a-b|^2 + |a+b|^2 = |a-b|^2 + |a-(-b)|^2 = |b-(-b)|^2 = |2b|^2 = 4|b|^2 = 4.$$

Zkus si uvědomit, že tento postup funguje, i když je trojúhelník T degenerovaný.

2. úloha (30, 15, 1,00, 1,0)

Nechť $p(z) = z^2 + az + b$ je polynom s komplexními koeficienty (tedy $a, b \in \mathbb{C}$) a definičním oborem $\mathbb{C}$ takový, že $|p(z)| = 1$ pro $|z| = 1$ (tedy pro čísla na jednotkové kružnici). Ukažte, že pak nutně $a = b = 0$.

Podle zadání je $|p(1)| = 1 = |p(-1)|$, tedy $1 + a + b$ i $1 - a + b$ leží na jednotkové kružnici, střed této úsečky bod $1 + b$ proto leží v jednotkovém kruhu (počítáno i s hranicí). Podobně $|p(i)| = 1 = |p(-i)|$, tedy body $-1 + ia + b$ a $-1 - ia + b$ leží na jednotkové kružnici a střed $-1 + b$ v jednotkovém kruhu.

Ovšem body $-1+b$ a $1+b$ mají vzdálenost 2, tvoří tedy průměr jednotkové kružnice a jejich střed b musí být počátkem souřadnic, tedy $b = 0$. Nyní $1+a$, $1-a$ i střed této úsečky bod 1 mají ležet na jednotkové kružnici, což je možné jedině v případě, že tyto body splývají, tedy $a = 0$. Tím je vše potřebné dokázáno.

3. úloha (34, 17, 1,00, 1,0)

Najděte všechny funkce $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ splňující pro každé komplexní číslo z rovnost

$$f(z) + zf(1-z) = 1 + z.$$

Dosazením $z = x$ a $z = 1 - x$ získáme pro každé komplexní x rovnosti

$$f(x) + xf(1-x) = 1 + x, \tag{1}$$

$$f(1-x) + (1-x)f(x) = 2 - x. \tag{2}$$

Z (2) vyjádříme $f(1-x) = 2-x-(1-x)f(x)$ a dosadíme do (1): $f(x)+x(2-x-(1-x)f(x)) = 1+x$, $(x^2-x+1)f(x) = x^2-x+1$. Pokud tedy platí $x^2-x+1 \neq 0$, musí být $f(x) = 1$. Kořeny polynomu x^2-x+1 jsou $x_1 = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}$ a $x_2 = \frac{1-i\sqrt{3}}{2}$. Platí pro ně $x_1 = 1 - x_2$, a tedy z (1) plyne $f(x_2) = 1 + x_2 - x_2 f(x_1)$. Zatím jsme jen odvodili nutné podmínky, které funkce f musí splňovat, aby mohla být řešením dané rovnice.

Tyto podmínky jsou ale také postačující. Přesněji, pro libovolné komplexní číslo c je funkce f splňující $f(x) = 1$ pro $x \neq x_1$, x_2, $f(x_1) = c$, $f(x_2) = 1 + x_2 - x_2 f(x_1)$ řešením dané rovnice, což se snadno ověří přímým dosazením: pro $x \neq x_1$, x_2 bude levá strana dané rovnosti rovna $1 + x \cdot 1 = 1 + x$, pro $x = x_1$ bude levá strana rovna $c + x_1(1 + x_2 - cx_2) = c + x_1 + x_1 x_2(1 - c) = c + x_1 + 1 - c = 1 + x_1$ a pro $x = x_2$ bude levá strana rovna $1 + x_2 - x_2 f(x_1) + x_2 f(x_1) = 1 + x_2$.

Poznámky k došlým řešením: Za uhodnutí funkce $f(z) = 1$ jsem uděloval bod, za zbylé funkce potom dva. Chybějící zkoušku jsem nepovažoval za (hrubou) chybu, neboť řešitel, který došel ke správnému řešení, si ji svým způsobem provést musel, ale uvědomte si, že k řešení patří (bez ní máte jen kandidáty na řešení, z nichž ne každý řešením být musí), její přítomnost, případně postup, kdy nebyla potřeba, jsem ohodnotil $+i$.

4. úloha (16, 10, 3,00, 5,0)

Nechť O je počátek souřadnic komplexní roviny (tedy číslo $0 + 0i$) a zároveň vrchol krychle, přičemž OA, OB, OC jsou její hrany. Kolmé průměty bodů A, B, C do komplexní roviny nechť jsou komplexní čísla u, v, w. Dokažte, že $u^2 + v^2 + w^2 = 0$.

Označme si a délku hrany krychle ($a = |OA|$). Zvolme si kartézskou soustavu souřadnic v prostoru tak, že každý bod $x + iy$ z komplexní roviny má souřadnice $[x, y, 0]$. Nechť $A = [a_1, a_2, a_3]$, $B = [b_1, b_2, b_3]$, $C = [c_1, c_2, c_3]$. Označme si $X = [a, 0, 0]$, $Y = [0, a, 0]$, $Z = [0, 0, a]$ body na osách x, y, z. Vektory OA, OB, OC jsou navzájem kolmé, tedy také určují kartézskou soustavu souřadnic. V této soustavě má bod X souřadnice $[a_1, b_1, c_1]$ (např. souřadnice ve směru osy OA je rovna délce kolmého průmětu bodu X na přímku OA, to je ale totéž jako délka kolmého průmětu bodu A na přímku OX (zde využíváme rovnost $|OA| = |OX| = a$), neboli x-ová souřadnice bodu A v původní soustavě souřadnic), podobně body Y, Z mají v nové soustavě souřadnice $[a_2, b_2, c_2]$, $[a_3, b_3, c_3]$. Protože vzdálenost bodů X, Y, Z od počátku je rovna a, platí (podle Pythagorovy věty)

$$a_i^2 + b_i^2 + c_i^2 = a^2, \quad i = 1, 2, 3. \tag{1}$$

Protože skalární součin kolmých vektorů OX, OY je roven nule[1], dostáváme

$$a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 = 0. \tag{2}$$

S využitím (1) a (2) již snadno důkaz dokončíme:

$$u^2 + v^2 + w^2 = (a_1 + ia_2)^2 + (b_1 + ib_2)^2 + (c_1 + ic_2)^2 =$$

$$= a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 - a_2^2 - b_2^2 - c_2^2 + 2i(a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3) = a^2 - a^2 + 2i \cdot 0 = 0.$$

Poznámky k došlým řešením: Řešitelé, kteří použili k vyjádření třetího vrcholu krychle vektorový součin, dostali po snadné úpravě kýžený výsledek. Ale ti, kteří se pokoušeli krychli natočit různými transformacemi do polohy, kde by byla úloha již triviální, se mnohdy topili a někdy i zapomněli, co vlastně chtějí dokázat.

[1] Pokud nevíš, co je skalární součin, pak věz, že pro vektory $[a, b, c]$, $[d, e, f]$ je jejich skalární součin roven $ad + be + cf$ a pokud tyto vektory svírají úhel α, pak $\cos\alpha = \frac{ad+be+cf}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}\sqrt{d^2+e^2+f^2}}$ – tedy kosinus úhlu je roven skalárnímu součinu vydělenému velikostmi vektorů.

5. úloha (8, 7, 4,00, 5,0)

Nechť z_1, z_2, z_3 jsou tři komplexní čísla taková, že $0 < |z_1| < |z_2| < |z_3|$, a nechť $r_j(\cos\varphi_j + i\sin\varphi_j)$ je goniometrický zápis čísla z_j pro $j \in \{1,2,3\}$. Dále nechť β_1, β_2, β_3 jsou tři kladná reálná čísla. Označme $f_j(n) = r_j\left(\cos(\varphi_j + n\beta_j) + i\sin(\varphi_j + n\beta_j)\right)$, $j \in \{1,2,3\}$. Předpokládejme, že existuje devět různých přirozených čísel n_1, n_2, $\ldots$, n_9 takových, že komplexní čísla $f_1(n_k)$, $f_2(n_k)$, $f_3(n_k)$ leží na jedné přímce (v Gaussově rovině) pro $k \in \{1,2,\ldots,9\}$ a navíc devět takto vzniklých přímek má stejnou vzdálenost od bodu $0 + 0i$. Dokažte, že pak existuje nekonečně mnoho přirozených n takových, že body $f_1(n)$, $f_2(n)$, $f_3(n)$ leží na jedné přímce.

Úlohu vyřešíme geometrickou představou. Mějme přirozené číslo n a ptejme se, jak vypadá $f_j(n)$ pro $j \in \{1,2,3\}$. Z goniometrického zápisu $f_j(n) = r_j(\cos(\varphi_j + n\beta_j) + i\sin(\varphi_j + n\beta_j))$ vidíme, že

$$|f_j(n)| = |r_j| \cdot |\cos(\varphi_j + n\beta_j) + i\sin(\varphi_j + n\beta_j)| = r_j\sqrt{\cos^2(\varphi_j + n\beta_j) + \sin^2(\varphi_j + n\beta_j)} = r_j.$$

Tedy vidíme, že $f_j(n)$ leží na kružnici se středem v počátku $(0 + 0i)$ a poloměrem r_j; označme takovou kružnici k_j. Když si uvědomíme (například stejným způsobem jako v předcházející situaci), že $r_j = |z_j|$, dostáváme ze zadání, že platí $0 < r_1 < r_2 < r_3$ (speciálně jsou r_1, r_2, r_3 různá).

Dále přímo z definice goniometrického zápisu komplexního čísla vznikne číslo $f_j(n+1)$ z čísla $f_j(n)$ otočením o úhel φ_j.

Nyní uvažme nějaké z čísel n_k ze zadání (pro $k \in \{1,2,\ldots 9\}$). Označme p_k přímku procházející body $f_1(n_k)$, $f_2(n_k)$ a $f_3(n_k)$ a označme d společnou vzdálenost přímek p_k od počátku. Přímka p_k protíná každou z kružnic k_1, k_2 a k_3 v jednom nebo dvou bodech. Bod $f_j(n_k)$ je jedním z průsečíků p_k a k_j, tedy $d \leq r_1$, aby k_1 a p_k mohly mít průsečík (tedy p_k protíná k_2 a k_3 ve dvou bodech, ke k_1 může být tečna – což bude situaci pouze zjednodušovat). Označme D_k bod na přímce p_k ve vzdálenosti d od počátku $(0+0i)$, tedy D_k je kolmý průmět počátku na

p_k. Ke každé přímce přiřaďme (uspořádanou) trojici písmenek P nebo L. Dívejme se z počátku do bodu D_k a j. písmenko volme L, pokud je $f_j(n_k)$ nalevo od D_k, jinak ho volme P (pokud splývá s D_k, volme ho libovolně P nebo L).

Na obrázku je přímce p_k přiřazena trojice (L, L, P), neboť $f_1(n_k)$ a $f_2(n_k)$ jsou nalevo od D_k a $f_3(n_k)$ je napravo od D_k. Navíc je na obrázku naznačeno, jak $f_j(n+1)$ vznikne z $f_j(n)$ otočením o úhel φ_j (pro $n = n_k$ a $j = 2$).

Možných trojic z písmen L a P je pouze 8, tedy podle Dirichletova principu existují alespoň dvě přímky p_x a p_y $(x, y \in \{1, 2 \dots 9\}, x \neq y)$, které mají přiřazeny stejné trojice. Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že $n_x > n_y$, jinak prohodíme značení x a y.

Nyní už je řešení nasnadě. Protože p_x a p_y mají stejnou vzdálenost od počátku, p_x vznikne z p_y otočením o nějaký úhel γ podle počátku. Bod $f_j(n_x)$ vznikne z $f_j(n_y)$ otočením o úhel $(n_x - n_y)\varphi_j$, přitom přímky p_x a p_y mají stejné trojice, tedy při otáčení o γ se $f_j(n_y)$ zobrazí na $f_j(n_x)$. Odtud tedy plyne, že $\gamma = (n_x - n_y)\varphi_1 = (n_x - n_y)\varphi_2 = (n_x - n_y)\varphi_3$ až na násobek 2π, který při otáčení nehraje roli. Odtud pro libovolné přirozené k leží body $f_1(k(n_x - n_y) + n_y)$, $f_2(k(n_x - n_y) + n_y)$, $f_3(k(n_x - n_y) + n_y)$ na jedné přímce, neboť vzniknou otočením p_y o úhel $k\gamma = k(n_x - n_y)\varphi_1 = k(n_x - n_y)\varphi_2 = k(n_x - n_y)\varphi_3$. Takto tedy dostáváme požadovaných nekonečně mnoho hodnot.

6. úloha (7, 3, 2,00, 1,0)

nechť α je $(2^n + 1)$-vá odmocnina z jedné, přičemž je různá od 1. Dokažte, že vždy najdeme polynomy $p(x)$, $q(x)$ s celočíselnými koeficienty takové, že $p(\alpha)^2 + q(\alpha)^2 = -1$.

Povšimněme si, že $\alpha + \alpha^2 + \alpha^3 + \dots + \alpha^{2^n} = -1$. To plyne ze vzorce pro součet prvních k členů geometrické posloupnosti $1 + q + q^2 + \dots + q^{k-1} = \frac{1-q^k}{1-q}$. V našem případě položíme $k = 2^n + 1$, $q = \alpha$ a obdržíme uvedený výsledek. Vyzbrojeni tímto poznatkem zkusíme sestrojit polynomy $p_n(x)$ a $q_n(x)$ takové, že $p_n^2(x) + q_n^2(x) = x^2 + x^4 + x^6 + \dots + x^{2\cdot 2^n}$, dosazením $x = \alpha$ pak dostaneme $p_n^2(\alpha) + q_n^2(\alpha) = \alpha^2 + \alpha^4 + \dots + \alpha^{2^n} + \alpha + \alpha^3 + \dots + \alpha^{2^n - 1} = -1$.

Polynomy sestrojíme indukcí. Pro $n = 1$ vezměme $p_1(x) = x$, $q_1(x) = x^2$. Mějme nyní sestrojeny polynomy $p_n(x)$ a $q_n(x)$. Zvolme $p_{n+1}(x) = p_n(x) + x^{2^n} q_n(x)$, $q_{n+1}(x) = q_n(x) - x^{2^n} p(x)$. Potom s využitím indukčního předpokladu máme

$$p_{n+1}^2(x) + q_{n+1}^2(x) = \left(p_n^2(x) + q_n^2\right)\left(1 + x^{2\cdot 2^n}\right) = x^2 + x^4 + \dots + x^{2\cdot 2^n} + \dots + x^{4\cdot 2^n},$$

což jsme chtěli.

7. úloha (4, 2, 2,00, 3,0)

Nechť $n \in \mathbb{N}$, α, z_1, z_2, …, $z_n \in \mathbb{C}$, přičemž $|\alpha| = 1$, $|z_i| \geq 1$ pro $i \in \{1, \dots, n\}$. Rozhodněte v závislosti na n a α, kolik maximálně existuje $z \in \mathbb{C}$ takových, že $|z| < 1$ a platí vztah

$$\frac{n}{1-\alpha} = \sum_{i=1}^{n} \frac{z}{z - z_i}.$$

Dokážeme, že žádné takové z neexistuje, a to tak, že porovnáme reálné části obou výrazů. Nejprve dokážeme jednoduché tvrzení.

Tvrzení. *Pro každé komplexní číslo* α *platí*

a) $|\alpha| = 1 \Rightarrow \Re(\frac{1}{1-\alpha}) = \frac{1}{2}$

b) $|\alpha| > 1 \Rightarrow \Re(\frac{1}{1-\alpha}) < \frac{1}{2}$.

Důkaz. Napišme si α ve tvaru $a_1 + ia_2$, kde a_1, a_2 jsou reálná čísla. Platí

$$\Re\left(\frac{1}{1-\alpha}\right) = \Re\left(\frac{1}{1-a_1-ia_2}\right) = \Re\left(\frac{1-a_1+ia_2}{1+a_1^2-2a_1+a_2^2}\right) = \frac{1-a_1}{1+|\alpha|^2-2a_1}.$$

Pro $|\alpha| \geq 1$ platí

$$\frac{1-a_1}{1+|\alpha|^2-2a_1} \leq \frac{1-a_1}{1+1-2a_1} = \frac{1}{2},$$

přičemž rovnost nastává jen v případě $|\alpha| = 1$.

Podle a) je reálná část levé strany daného vztahu rovna

$$\Re\left(\frac{n}{1-\alpha}\right) = n \cdot \Re\left(\frac{1}{1-\alpha}\right) = \frac{n}{2}.$$

Každý sčítanec na pravé straně můžeme přepsat do tvaru $\frac{1}{1-\frac{z_i}{z}}$. Pokud tedy $|z| < 1$, pak z předpokladu $|z_i| = 1$ plyne $|\frac{z_i}{z}| > 1$ a podle b)

$$\Re\left(\frac{1}{1-\frac{z_i}{z}}\right) < \frac{1}{2}.$$

Z toho dostáváme nerovnost

$$\Re\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{z}{z-z_i}\right) = \sum_{i=1}^{n} \Re\left(\frac{z}{z-z_i}\right) < \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} = \frac{n}{2},$$

tudíž daný vztah nemůže platit pro žádné komplexní z ležící uvnitř jednotkového kruhu. Hledaný počet je tedy vždy roven 0.

8. úloha **(7, 5, 3,00, 5,0)**

Upravte na co nejjednodušší tvar výraz

$$0^2\binom{n}{0} + 3^2\binom{n}{3} + 6^2\binom{n}{6} + \cdots + \left(3\left\lfloor\frac{n}{3}\right\rfloor\right)^2\binom{n}{3\left\lfloor\frac{n}{3}\right\rfloor}.$$

Přitom $\lfloor x \rfloor$ značí dolní celou část x, tj. největší celé číslo takové, které je menší nebo rovné x.

Řešení začneme kombinatorickou interpretací, potom budeme pokračovat v komplexních číslech.

Mějme n organizátorů PraSátka, kteří mají v plánu zajet si do Rumunska. Někteří z nich pojedou stopem, někteří vlakem. Jelikož železnice opět měnily tarify, vyplatí se nyní jezdit na slevu pro tři cestující. Tedy počet těch, kteří budou cestovat vlakem, bude určitě dělitelný třemi. Navíc se bude hodit, aby se jeden z těch organizátorů, kteří pojedou vlakem, naučil rumunsky a jeden maďarsky (může a nemusí to být tentýž). Spočítejme dvěma způsoby, kolik je možností, jak se organizátoři rozdělí na skupinku cestující vlakem a skupinku stopařů a přitom ještě vyberou toho, kdo se bude učit rumunsky, a toho, kdo maďarsky.

První způsob počítání volme následující: Řekněme, že ve skupince, která pojede vlakem, bude $3k$ organizátorů. Potom máme $\binom{n}{3k}$ možností, jak je vybrat. Navíc mezi nimi zvolíme rumunsky a maďarsky mluvícího. Pro každou volbu máme $3k$ možností. Tedy pro $3k$-člennou skupinku máme $(3k)^2\binom{n}{3k}$ možností, jak ji utvořit. Zvážíme-li všechna možná k, máme dohromady

$$\sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{3} \rfloor} (3k)^2 \binom{n}{3k}$$

možností, jak skupinky rozdělit, což je přesně výraz v zadání úlohy[2], označme tento výraz $V(n)$.

Pro druhý způsob počítání si pro $j = 0, 1, 2$ a m přirozené označme $P_j(m)$ počet způsobů, jak vybrat mezi m organizátory takovou skupinku, že počet členů této skupinky dává při dělení třemi zbytek j. Rozmysli si, že

$$P_0(m) = \binom{m}{0} + \binom{m}{3} + \binom{m}{6} + \cdots,$$
$$P_1(m) = \binom{m}{1} + \binom{m}{4} + \binom{m}{7} + \cdots,$$
$$P_2(m) = \binom{m}{2} + \binom{m}{5} + \binom{m}{8} + \cdots.$$

Nyní začneme druhý způsob počítání. Nejprve si vybereme ty, kteří budou umět rumunsky a maďarsky. Jedna situace je, že to bude tentýž organizátor, co bude umět rumunsky a maďarsky, pak máme n možností, jak ho vybrat, tento organizátor musí jet vlakem. Potom už jen hledáme skupinku, která s ním pojede vlakem, počet členů této skupinky musí při dělení třemi dávat zbytek 2, máme tedy $P_2(n-1)$ možností, dohromady tedy máme $nP_2(n-1)$ možností. Druhá situace je, že budou organizátoři, co budou umět rumunsky a maďarsky, různí. Potom podobným postupem jako v předchozí situaci dostaneme $n(n-1)P_1(n-2)$ možností. Dohromady tedy dostáváme $nP_2(n-1) + n(n-1)P_1(n-2)$ možností.

Spočítali jsme dvěma způsoby tentýž výraz, výsledky si při obou způsobech musí být rovny, tedy

$$V(n) = nP_2(n-1) + n(n-1)P_1(n-2).$$

Nyní bychom rádi určili $P_2(m)$ a $P_1(m)$, k tomu právě využijeme komplexních čísel.

Nejprve řešme rovnici $x^3 = 1$. Tu lze upravit na tvar $(x^2+x+1)(x-1) = 0$. Snadno spočítáme kořeny kvadratické rovnice, které jsou

$$x_1 = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2} = \cos 120^\circ + i \sin 120^\circ, \qquad x_2 = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}.$$

Třetí kořen je pak $x_3 = 1$. Využitím Moivreovy věty nebo přímým spočítáním snadno zjistíme, že $x_2 = x_1^2, 1 = x_3 = x_1^3$. Odtud plyne, že $x_1^{3k+i} = x_1^i$. Nyní si z binomické věty (a použitím předchozího vztahu) vyjádřeme

$$(1 + x_1)^n = \binom{n}{0} + x_1\binom{n}{1} + x_1^2\binom{n}{2} + \binom{n}{3} + \cdots, \tag{1}$$

[2] V opraveném zadání.

$$(1+x_1^2)^n = \binom{n}{0} + x_1^2\binom{n}{1} + x_1\binom{n}{2} + \binom{n}{3} + \cdots, \tag{2}$$

$$(1+1)^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \binom{n}{3} + \cdots. \tag{3}$$

Vynásobením první rovnice x_1, druhé x_1^2 a sečtením s třetí dostáváme, že

$$x_1(1+x_1)^n + x_1^2(1+x_1^2)^n + 2^n =$$
$$= (x_1+x_1^2+1)\binom{n}{0} + (x_1^2+x_1^4+1)\binom{n}{1} + (x_1^3+x_1^3+1)\binom{n}{2} + (x_1+x_1^2+1)\binom{n}{3} + \cdots =$$
$$= 3\left(\binom{n}{2} + \binom{n}{5} + \binom{n}{8} + \cdots\right) = 3P_2(n).$$

Při poslední úpravě jsme využili právě vlastnosti, že $x_1^3 = 1$ a že x_1 je řešením kvadratické rovnice $x^2+x+1=0$.

Podobně vynásobením první rovnice x_1^2 a druhé x_1 obdržíme, že

$$x_1^2(1+x_1)^n + x_1(1+x_1^2)^n + 2^n = 3P_1(n).$$

Nyní už jen stačí upravovat:

$$V(n) = nP_2(n-1) + n(n-1)P_1(n-2) =$$
$$= \frac{n}{3}\left(x_1(1+x_1)^{n-1} + x_1^2(1+x_1^2)^{n-1} + 2^{n-1}\right) +$$
$$+\frac{n(n-1)}{3}\left(x_1^2(1+x_1)^{n-2} + x_1(1+x_1^2)^{n-2} + 2^{n-2}\right) \overset{(\heartsuit)}{=}$$
$$\overset{(\heartsuit)}{=} \frac{n}{3}\left(x_1(-x_1^2)^{n-1} + x_1^2(-x_1)^{n-1} + 2^{n-1}\right) +$$
$$+\frac{n(n-1)}{3}\left(x_1^2(-x_1^2)^{n-2} + x_1(-x_1)^{n-2} + 2^{n-2}\right) \overset{(\diamondsuit)}{=}$$
$$\overset{(\diamondsuit)}{=} \frac{(-1)^{n-1}n}{3}\left(\cos\left((2n-1)120^\circ\right) + i\sin\left((2n-1)120^\circ\right)\right) +$$
$$+\frac{(-1)^{n-1}n}{3}\left(\cos\left((n+1)120^\circ\right) + i\sin\left((n+1)120^\circ\right)\right) + \frac{n}{3}2^{n-1} +$$
$$+\frac{(-1)^{n-2}n(n-1)}{3}\left(\cos\left((2n-2)120^\circ\right) + i\sin\left((2n-2)120^\circ\right)\right) +$$
$$+\frac{(-1)^{n-2}n(n-1)}{3}\left(\cos\left((n-1)120^\circ\right) + i\sin\left((n-1)120^\circ\right)\right) + \frac{n(n-1)}{3}2^{n-2} \overset{(\clubsuit)}{=}$$
$$\overset{(\clubsuit)}{=} \frac{(-1)^{n-1}2n}{3}\cos\left((n+1)120^\circ\right) + \frac{(-1)^{n-2}2n(n-1)}{3}\cos\left((n-1)120^\circ\right) +$$
$$+\frac{n}{3}2^{n-2}(n+1).$$

V $(\heartsuit)$ jsme opět využili vztahu $1+x_1+x_1^2=0$, v $(\diamondsuit)$ jsme dosadili za goniometrický zápis a použili Moivreovu větu, v $(\clubsuit)$ jsme využili vztahů jako

$$\cos((2n-1)120^\circ) = \cos((2n-1)120^\circ - 3n\cdot 120^\circ) = \cos(-(n+1)120^\circ) = \cos((n+1)120^\circ).$$

Podobně upravíme ostatní siny a cosiny.

Poznámky k došlým řešením: V zadaní sa vyskytla chyba a suma v pôvodných meziach asi žiadny jednoduchší tvar nemala. Preto udelujem hromadnú pochvalu všetkým, ktorý to nevzdali a pozreli si na nete správne zadanie, prípadne si zadanie opravili sami.