✉ *Korespondenční seminář, KAM MFF UK, Malostranské náměstí 25, 118 00 Praha 1* ✉

8. série

Téma: Finální myš (maš)

Termín odeslání: 17. KVĚTNA 2004

1. ÚLOHA

(a) Je dána posloupnost $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$, která splňuje počáteční podmínky $a_p = \frac{1}{p}$ pro $p = 1$ a p prvočísla a rekurentní vztah $a_{km} = a_{n(k,m)}a_{D(k,m)}$ pro k, m přirozená. V závislosti na přirozeném n určete hodnotu a_n. Výrazy $n(k,m)$, $D(k,m)$ značí po řadě nejmenší společný násobek a největšího společného dělitele přirozených čísel k a m. (2 BODY)

(b) Je dána **klesající** posloupnost $\{a_k\}_{k=2}^{\infty}$, pro kterou platí $a_2 = 2$ a která splňuje rekurentní vztah $a_{km} = \frac{a_k a_m}{a_k + a_m}$ pro k, m přirozená (větší než jedna). Určete hodnotu a_3. (3 BODY)

2. ÚLOHA

(a) Rozhodněte, zda je $\log_{648} 864$ racionální. (2 BODY)

(b) Rozhodněte, pro která racionální k je $\cos(k \cdot 180°)$ racionální. (3 BODY)

3. ÚLOHA

(a) Mějme výraz $V = a_1 - [_1 a_2 - [_2 a_3 - \cdots [_{2002} a_{2003} - a_{2004}]_{2002}]_{2001} \ldots]_1$. Určete maximální možnou hodnotu výrazu V, kde $a_1, a_2, \ldots, a_{2004}$ je nějaké pořadí čísel 1, 2, ..., 2004 a za $[_i$, $]_i$ lze dosadit buď (,), nebo nic, přitom dosadit kulaté závorky musíte právě 1001-krát. (2 BODY)

(b) Mějme výraz $W = a_1 + a_2/a_3 - a_4 \cdot a_5 + a_6/a_7 - a_8 \cdot a_9 + \cdots + a_{2002}/a_{2003} - a_{2004}$. Operátory $+$, $/$, $-$, $\cdot$ se pravidelně střídají a násobení a dělení má přednost před sčítáním a odčítáním. Určete pořadí $a_1, a_2, \ldots, a_{2004}$ čísel 1, 2, ..., 2004 tak, aby výraz W nabýval své maximální možné hodnoty. (3 BODY)

4. ÚLOHA

Blíží se zkouškové období a studenti (dohromady n) se pomalu připravují na písemnou zkoušku z matematické analýzy. Některá témata se ve zkouškové písemce objevit musí, jiná (volitelná[1]) se objevit můžou, ale nemusí (řekněme, že volitelných je k), přičemž je i možné, že se v písemce objeví třeba i všechna, nebo naopak žádné z nich. Každý student má nějaké přání. Každé přání se skládá z jednoho či dvou dílčích přání, přitom přáním studenta je, aby se splnilo alespoň jedno z dílčích přání. Každé dílčí přání je buď, aby se nějaké téma v písemce objevilo, nebo aby se nějaké neobjevilo. Tedy například Karel si může přát, *ať tam není Taylorův polynom*, Lenka si může přát, *ať se v písemce neobjeví úplnost metrických prostorů* nebo *ať se v písemce objeví Taylorův polynom* a Míša si stejně jako Karel může přát, *ať tam není Taylorův polynom*, přitom kurzívou jsou vyznačena dílčí přání. Zkoušejícímu se podařilo zjistit přání studentů, a protože nerad dává špatné známky, snaží se, aby přání co možná nejvíce studentů byla splněna. Vaším úkolem bude zjistit, kolika nejvýše studentům lze přání splnit.

(a) Určete nejlepší (tj. největší) konstantu $c \in \langle 0; 1\rangle$ takovou, že pro libovolné n a k lze splnit volbou vhodných volitelných témat u zkoušky alespoň cn přání studentů (tedy hledáte c nezávislé na n a k). (2 BODY)

[1] Tj., tato témata volí zkoušející, nikoliv studenti.

(b) Určete nejlepší (tj. největší) konstantu $d \in \langle 0; 1\rangle$ takovou, že pro libovolné n a k lze splnit volbou vhodných volitelných témat u zkoušky alespoň dn přání studentů (tedy hledáte d nezávislé na n a k), víte-li navíc, že vyberete-li si libovolné tři studenty, potom lze volbou vhodných volitelných témat splnit přání těchto tří studentů. (3 BODY)

5. ÚLOHA

Řekněme, že rovina je pokryta mnohoúhelníky M_1, M_2, ... , právě když každé dva mnohoúhelníky se nanejvýš dotýkají (tedy se nepřekrývají) a pro každý bod x roviny existuje mnohoúhelník M_j takový, že x náleží mnohoúhelníku M_j.

(a) Najděte pokrytí roviny obdélníky O_1, O_2, ... podobnými zadanému obdélníku O různému od čtverce takovými, že libovolné dva obdélníky (pro $i \neq j$) O_i, O_j nejsou shodné. (2 BODY)

(b) Najděte pokrytí roviny čtyřúhelníky T_1, T_2, ... podobnými zadanému tětivovému čtyřúhelníku T takovými, že libovolné dva čtyřúhelníky (pro $i \neq j$) T_i, T_j nejsou shodné. (3 BODY)

6. ÚLOHA

(a) Rozhodněte, pro jaké zbytky přirozeného čísla k při dělení devíti musí být n řešící rovnici $S(kn) = S(n)$ dělitelné devíti. (2 BODY)

(b) Dokažte, že pro každé přirozené k existuje přirozené l takové, že rovnice (s neznámou n) $S(kln) = S(n)$ má řešení v oboru přirozených čísel neobsahujících ve svém desítkovém zápise ani jednu devítku. (3 BODY)

7. ÚLOHA

(a) Nechť D je množina všech komplexních čísel, jejichž imaginární část leží na intervalu $\langle 0, 2\pi)$. Určete obor hodnot funkce[2] $f(z) = e^{e^z}$ jako funkce $f : D \to \mathbb{C}$. (2 BODY)

(b) Rozhodněte, jestli existuje funkce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, kterou lze získat pomocí (konečného) sčítání, odčítání, násobení a skládání funkcí, konstantních funkcí (i komplexních) a funkcí x, e^x, $\sin x$, $\cos x$, splňující následující dvě podmínky:

(i) Každá přímka v Gaussově rovině protíná obraz funkce f.

(ii) Existuje podobnost s koeficientem různým od 1 převádějící obraz funkce f na sebe.

Obrazem funkce f rozumíme její obor hodnot, tj. množinu bodů $z \in \mathbb{C}$ takových, že existuje $x \in \mathbb{R}$ takové, že $f(x) = z$. (3 BODY)

[2] Pokud náhodou nevíš, co znamená e^c, kde c je komplexní číslo, tak si přečti povídání k 7. sérii.

Řešení 8. série

1. úloha (22, 13, 2,00, 2,0)

(a) Je dána posloupnost $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$, která splňuje počáteční podmínky $a_p = \frac{1}{p}$ pro $p = 1$ a p prvočísla a rekurentní vztah $a_{km} = a_{n(k,m)} a_{D(k,m)}$ pro k, m přirozená. V závislosti na přirozeném n určete hodnotu a_n. Výrazy $n(k,m)$, $D(k,m)$ značí po řadě nejmenší společný násobek a největšího společného dělitele přirozených čísel k a m. (2 BODY)

(b) Je dána **klesající** posloupnost $\{a_k\}_{k=2}^{\infty}$, pro kterou platí $a_2 = 2$ a která splňuje rekurentní vztah $a_{km} = \frac{a_k a_m}{a_k + a_m}$ pro k, m přirozená (větší než jedna). Určete hodnotu a_3. (3 BODY)

(a) Hlavní myšlenkou je uvědomit si, že pro libovolná přirozená i, j platí $a_i a_j = a_{ij}$ – provedeme drobný trik. Budeme postupně vyjadřovat nějaké členy pomocí vztahu ze zadání.

$$a_{i^2 j} = a_{n(ij,i)} a_{D(ij,i)} = a_{ij} a_i , \tag{1}$$

$$a_{i^2 j^2} = a_{n(i^2 j,j)} a_{D(i^2 j,j)} = a_{i^2 j} a_j = a_{ij} a_i a_j , \tag{2}$$

v poslední úpravě jsme dosadili (1),

$$a_{i^2 j^2} = a_{n(ij,ij)} a_{D(ij,ij)} = a_{ij} a_{ij} . \tag{3}$$

Porovnáním (2) a (3) dostáváme, že $a_{ij} = 0$ nebo $a_{ij} = a_i a_j$ ($\heartsuit$).

Nyní se vám, řešitelům, trochu omluvíme, protože původní záměr byl nulu vyloučit. Takto se úloha stala trochu těžší, než jsme předpokládali.

Pokud jsou všechny členy posloupnosti nenulové, je řešení už nasnadě. Mějme n a chtějme vyjádřit a_n. Nechť $n = p_1 p_2 \cdots p_k$ je prvočíselný rozklad n (prvočísla se můžou opakovat). Potom už stačí podle ($\heartsuit$) psát

$$a_n = a_{p_1(p_2 p_3 \cdots p_k)} = a_{p_1} a_{p_2(p_3 p_4 \cdots p_k)} = \cdots = a_{p_1} a_{p_2} \cdots a_{p_k} = \frac{1}{p_1 p_2 \cdots p_k} = \frac{1}{n}.$$

Ještě zbývá ověřit, že takto definovaná posloupnost vyhovuje zadání, což snadno plyne ze vztahu $n(k,m)D(k,m) = km$, který si snadno ověříš z prvočíselného rozkladu čísel k a m.

Tím je lehčí verze úlohy vyřešena.

Nyní přejdeme k těžší verzi, která byla v zadání. Stejným postupem jako v předchozím případě odvodíme, že $a_n = \frac{1}{n}$, nebo $a_n = 0$. Jenže z posloupností, které splňují $a_n = \frac{1}{n}$, nebo $a_n = 0$, vyhovují zadání jen některé.

Myšlenka řešení úlohy je, že si na takzvaných bezčtvercových číslech (kromě jedničky a prvočísel, kde už to víme) zvolíme, jestli $a_n = \frac{1}{n}$, nebo $a_n = 0$. Všechny ostatní hodnoty pak budou jednoznačně určeny.

Bezčtvercovým číslem rozumíme číslo takové, že ve svém prvočíselném rozkladu obsahuje prvočísla nejvýše v první mocnině. Tedy například 1, 2, $6 = 2 \cdot 3$, $105 = 3 \cdot 5 \cdot 7$ jsou bezčtvercová, zatímco $4 = 2^2$, $12 = 2^2 \cdot 3$, $32 = 2^5$ nikoliv.

Nyní učiníme jedno pozorování ($\diamondsuit$). Je-li $a_x = 0$, potom $a_{xy} = 0$ pro libovolné přirozené y. Toto pozorování triviálně plyne z ($\heartsuit$). Totiž buď $a_{xy} = 0$ nebo $a_{xy} = a_x a_y = 0$. Toto pozorování k řešení ani nebudeme potřebovat, nicméně umožňuje udělat si částečnou představu o tom, jak řešení bude vypadat – je-li totiž nějaký člen posloupnosti nulový, pak už jsou všechny jeho násobky nulové.

Dalším krokem k řešení je uvědomit si, že pokud máme určeny hodnoty na bezčtvercových číslech, potom jsou už všechny členy posloupnosti jednoznačně určeny. Budeme postupovat indukcí podle n. Pro $n = 1$ není co řešit – známe ze zadání. Nadále není-li n bezčtvercové (pro bezčtvercová není co řešit), lze ho psát jako $n = p^2m$, kde p je prvočíslo (nám bude stačit, že $p > 1$), m je přirozené. Potom

$$a_{p^2m} = a_{n(pm,p)}a_{D(pm,p)} = a_{pm}a_p.$$

Přitom hodnoty a_{pm} a a_p už známe (z indukčního předpokladu, resp. ze zadání).

Posledním krokem k řešení je uvědomit si, že zvolíme-li libovolně na bezčtvercových číslech n, jestli $a_n = \frac{1}{n}$, nebo $a_n = 0$, potom už lze posloupnost dodefinovat tak, aby splňovala podmínky zadání (jak už víme, toto dodefinování bude jednoznačné). Zároveň zde i popíšeme poměrně rozumnou charakteristiku posloupnosti.

Nechť n není bezčtvercové a d_1, d_2, $\dots$, d_k jsou jeho všechny bezčtvercové dělitele. Je-li $a_{d_l} = 0$ pro nějaké $l \in \{1, 2, \dots , k\}$, potom volme $a_n = 0$ (to podle ($\diamondsuit$) musíme). Jsou-li všechna nenulová, volme $a_n = \frac{1}{n}$. Tato definice členů posloupnosti je konzistentní i pro bezčtvercová čísla.

Nyní už stačí jen ověřit, že jsou splněny podmínky zadání. Hodnoty a_1 a a_p pro p prvočíslo máme předvoleny. Zbývá tedy ověřit, že je splněna podmínka $a_{km} = a_{n(k,m)}a_{D(k,m)}$ pro libovolná přirozená k a m.

Je-li $a_{km} = 0$, znamená to, že má nějakého bezčtvercového dělitele d_l, že $a_{d_l} = 0$. Finta spočívá v tom, že d_l musí dělit i $n(k, m)$, neboť nejmenší společný násobek k a m musí obsahovat v rozkladu na součin prvočísel alespoň v první mocnině každé prvočíslo, které se vyskytuje v k nebo m. A d_l obsahuje prvočísla pouze v první mocnině (vyskytující se v k nebo l). Takže si zopakujme, že d_l je dělitelem $n(k, m)$, odkud je $a_{n(k,m)} = 0$, a tedy $a_{km} = 0 = a_{n(k,m)}a_{D(k,m)}$.

Je-li $a_{km} = \frac{1}{km}$, je situace ještě o něco jednodušší. Vzhledem k tomu, že $n(k, m)$ i $D(k, m)$ dělí km, jsou všechny (bezčtvercové) dělitele těchto dvou čísel zároveň děliteli km, tedy členy posloupnosti v těchto dělitelích jsou nenulové, jinak by bylo $a_{km} = 0$. Odtud je $a_{n(k,m)} = \frac{1}{n(k,m)}$ a $a_{D(k,m)} = \frac{1}{D(k,m)}$. Potom už jen

$$a_{km} = \frac{1}{km} = \frac{1}{n(k,m)D(k,m)} = a_{n(k,m)}a_{D(k,m)},$$

o rovnosti $km = n(k, m)D(k, m)$ už byla řeč v jednodušší verzi úlohy.

Ověřili jsme vše, co bylo potřeba ověřit, úloha je tedy vyřešena.

(b) Pro začátek přijde finta. Totiž bude-li posloupnost tvaru $b_n = \frac{1}{\log_c n}$, kde $c > 1$ je pevně zvolené, potom je posloupnost b_n klesající (logaritmus o základu větším než 1 je rostoucí a kladný, tedy jeho převrácená hodnota je klesající) a splňuje rekurentní formuli $b_{km} = \frac{b_k b_m}{b_k + b_m}$. Totiž

$$\frac{b_k b_m}{b_k + b_m} = \frac{\frac{1}{\log_c b_k} \cdot \frac{1}{\log_c b_m}}{\frac{1}{\log_c b_k} + \frac{1}{\log_c b_m}} = \frac{1}{\log_c b_k + \log_c b_m} = \frac{1}{\log_c b_k b_m} = b_{km}.$$

Budeme-li navíc požadovat, aby $b_2 = 2$, chceme tedy, aby $\frac{1}{\log_c 2} = 2$, neboli $\log_c 2 = \frac{1}{2}$. Tedy $c^{\frac{1}{2}} = 2$, čili $c = 4$. Potom hodnota $b_3 = \frac{1}{\log_4 3}$. Máme tedy kandidáta na hodnotu a_3 (totiž posloupnost b_n splňuje všechny podmínky kladené na posloupnost a_n), zbývá dokázat, že tento kandidát je jediný možný.

Označme si $a_3 = d$.

Nyní si ještě matematickou indukcí podle m odvoďme, že pro libovolné přirozené $i > 2$, $a_{i^m} = \frac{a_i}{m}$ ($\diamondsuit$).

Pro $m = 1$ není co dokazovat.

Předpokládejme, že tvrzení platí pro $m-1$, a dokažme ho pro m. Totiž

$$a_{i^m} = a_{i^{m-1}\cdot i} = \frac{a_{i^{m-1}}a_i}{a_{i^{m-1}} + a_i} = \frac{\frac{a_i}{m-1}a_i}{\frac{a_i}{m-1} + a_i} = \frac{\frac{a_i^2}{m-1}}{\frac{(1+m-1)a_i}{m-1}} = \frac{a_i}{m}.$$

V druhé rovnosti jsme využili podmínky ze zadání, v třetí rovnosti jsme využili indukčního předpokladu.

Pomocí ($\diamondsuit$) tedy známe hodnoty $a_{2^k} = \frac{a_2}{k} = \frac{2}{k}$ a $a_{3^m} = \frac{a_3}{m} = \frac{d}{m}$. Nyní si zvolme libovolné přirozené k a k němu zvolme m takové, že

$$2^k < 3^m < 4 \cdot 2^k = 2^{k+2}, \tag{1}$$

m je tedy exponent nejmenší takové mocniny 3, že $2^k < 3^m$. Vzhledem k tomu, že posloupnost je klesající, dostáváme $a_{2^k} > a_{3^m} > a_{2^{k+2}}$, což po dosazení z ($\diamondsuit$) dává

$$\frac{2}{k} > \frac{d}{m} > \frac{2}{k+2},$$

tento výraz ještě upravme na

$$\frac{2m}{k} > d > \frac{2m}{k+2}. \tag{2}$$

Výraz (1) zlogaritmujme (trojkovým logaritmem) a dostaneme $k \log_3 2 < m < (k+2)\log_3 2$. Dosazením do (2) pak dostaneme

$$\frac{(k+2)\log_3 4}{k} = \frac{(k+2)2\log_3 2}{k} > \frac{2m}{k} > d > \frac{2m}{k+2} > \frac{k \cdot 2\log_3 2}{k+2} = \frac{k\log_3 4}{k+2},$$

tedy nerovnost

$$\frac{k+2}{k}\log_3 4 > d > \frac{k}{k+2}\log_3 4 \tag{3}$$

musí platit pro libovolné přirozené k.

Pokud znáš limity, je už řešení velmi jednoduché, k se pošle do nekonečna, odkud

$$\log_3 4 = \lim_{k\to\infty} \frac{k+2}{k}\log_3 4 \geq d \geq \lim_{k\to\infty} \frac{k}{k+2} = \log_3 4,$$

odkud je d skutečně $\log_3 4$, jak jsme chtěli dokázat.

Pokud limity neznáš, vyřešíme úlohu o něco elementárněji. Pro spor předpokládejme, že $d \neq \log_3 4$. Ke sporu dovedeme situaci, kdy $\log_3 4 < d$, situace $\log_3 4 > d$ se vyřeší podobně. Máme tedy $\log_3 4 < d$, odkud lze d psát jako $d = (\log_3 4) + \varepsilon$, pro nějaké $\varepsilon > 0$.

Dosazením do (3) (první nerovnost) dostáváme

$$\frac{k+2}{k}\log_3 4 > \log_3 4 + \varepsilon,$$

pro každé přirozené k, odtud postupně odvodíme

$$\left(\frac{k+2}{k} - 1\right)\log_3 4 > \varepsilon,$$

$$\frac{2}{k}\log_3 4 > \varepsilon,$$

$$k < \frac{2\log_3 4}{\varepsilon}.$$

Tato nerovnost ale nemůže platit pro všechna přirozená k, spor! Opět máme, že $a_3 = d = \log_3 4$.

Poznámky k došlým řešením: Do zadaní a) aj b) sa nám vľúdili chyby za ktoré sa veľmi ospravedlňujeme.

V a) mali byť členy postupnosti a_n kladné, ale keďže nebolo podstatou úlohy ošetrovať nuly dával som plný počet bodov aj za riešenie $a_n = \frac{1}{n}$. *Sašovi Kazdovi*, ktorý jediný presne špecifikoval všetky postupnosti, ktoré spĺňajú zadanie aj s nulami som udelil $+i$.

V b) prevyšoval prvý člen, ale keďže na riešení „postupnosť neexistuje“ nie je na prvý pohľad nič zaujímavé a je skoro jasné, že to nie je „správne“ riešenie, dával som zaňho nekompromisne nula bodov.

2. úloha (35, 27, 1,00, 2,0)

(a) Rozhodněte, zda je $\log_{648} 864$ racionální. (2 BODY)

(b) Rozhodněte, pro která racionální k je $\cos(k \cdot 180°)$ racionální. (3 BODY)

(a) Předpokládejme, že $\log_{648} 864 = \frac{p}{q}$, kde p je celé, q přirozené a $\mathrm{NSD}(p,q) = 1$. Pak platí $648^{\frac{p}{q}} = 864$, neboli $648^p = 864^q$. Protože $q \geq 1$, musí být i $p \geq 1$. Využijeme rozklad čísel 648 a 864 na prvočinitele ($648 = 2^3 \cdot 3^4, 864 = 2^5 \cdot 3^3$) a rovnost dále upravíme na tvar $2^{3p} \cdot 3^{4p} = 2^{5q} \cdot 3^{3q}$. Z jednoznačnosti rozkladu přirozeného čísla na prvočinitele vyplývají rovnosti $3p = 5q$ a $4p = 3q$, z čehož plyne $\frac{5}{3} = \frac{p}{q} = \frac{3}{4}$, což je spor, $\log_{648} 864$ tedy není racionální.

(b) Pro každé reálné číslo x platí $\cos(x + 180°) = -\cos(x)$, tedy

(1) $\cos(x + 180°)$ je racionální právě tehdy, když $\cos(x)$ je racionální. Jelikož je $\cos(0) = 1$ racionální číslo, je pro každé celé k $\cos(k \cdot 180°)$ racionální.

(2) Pro každé přirozené n a reálné x lze $\cos(nx)$ vyjádřit jako polynom s celočíselnými koeficienty v proměnné $\cos(x)$ (využijeme Moivreovu větu):

$$\cos(nx) = \Re(\cos(nx) + i\sin(nx)) = \Re((\cos(x) + i\sin(x))^n) =$$

$$= \cos^n(x) - \binom{n}{2}\cos^{n-2}(x)(1-\cos^2(x)) + \binom{n}{4}\cos^{n-4}(x)(1-\cos^2(x))^2 + \cdots .$$

Tento polynom označíme $P_n(\cos(x))$. Z (2) plyne následující tvrzení:

(3) Je-li pro x reálné $\cos(x)$ racionální, potom je racionální i $\cos(nx)$, $n \in \mathbb{N}$.

Předpokládejme, že pro nějaká čísla p, q, kde $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$, $\mathrm{NSD}(p,q) = 1$, je $\cos(\frac{p}{q} \cdot 180°)$ racionální. Z nesoudělnosti čísel p, q plyne, že existuje přirozené m takové, že $mp \mod q = 1$ (toto si rozmysli!), neboli $mp = m'q + 1$ pro nějaké celé m'. Podle (3) je $\cos(\frac{mp}{q} \cdot 180°)$ racionální, podle (1) je racionální i číslo $\cos((\frac{mp}{q} - m') \cdot 180°) = \cos(\frac{mp - m'q}{q} \cdot 180°) = \cos(\frac{1}{q} \cdot 180°)$. Dokázali jsme

(4) $\cos(\frac{p}{q} \cdot 180°) \in \mathbb{Q} \Leftrightarrow \cos(\frac{1}{q} \cdot 180°) \in \mathbb{Q}$.

Stačí se tedy omezit jen na čísla k tvaru $\frac{1}{n}$, kde n je přirozené. Nejprve budeme vyšetřovat n lichá: předpokládejme, že pro nějaké přirozené liché n je číslo $y = \cos(\frac{1}{n} \cdot 180°)$ racionální. Platí

(5) $\cos(n \cdot \frac{1}{n} \cdot 180°) = \cos(180°) = -1$.

Podle (2) můžeme výraz $\cos(n \cdot \frac{1}{n} \cdot 180°)$ vyjádřit ve tvaru $a_n y^n + a_{n-1} y^{n-1} + \cdots + a_1 y + a_0$, kde $a_i \in \mathbb{Z}, i = 0, 1, \ldots, n$. Navíc v tomto polynomu vystupuje y pouze v lichých mocninách (což je snadno vidět po roznásobení polynomu P_n), takže $a_0 = 0$. Roznásobením P_n také zjistíme, že $a_n = \binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{n-1} = \frac{1}{2}((1+1)^n + (1-1)^n) = 2^{n-1}$. Z toho a z (5) plyne, že y je kořenem polynomu $2^{n-1} y^n + a_{n-1} y^{n-1} + \cdots + a_1 y + 1$ s celočíselnými koeficienty. Využijeme následující tvrzení.

Tvrzení. *Nechť $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ je polynom s celočíselnými koeficienty, který má racionální kořen $\frac{p}{q}$, $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$, $\mathrm{NSD}(p,q) = 1$. Pak a_n je dělitelné q a a_0 je dělitelné p.*

Důkaz. $\frac{p}{q}$ je kořen, tedy platí

$$a_n \frac{p^n}{q^n} + a_{n-1} \frac{p^{n-1}}{q^{n-1}} + \cdots + a_1 \frac{p}{q} + a_0 = 0. \qquad (*)$$

Vynásobíme-li rovnost $(*)$ číslem q^{n-1}, získáme rovnost

$$a_n \frac{p^n}{q} + a_{n-1} \frac{p^{n-1}}{q^0} + \cdots + a_1 p \cdot q^{n-2} + a_0 \cdot q^{n-1} = 0.$$

Všechny členy kromě prvního jsou celá čísla, na pravé straně je celé číslo, tedy i první člen $a_n \frac{p^n}{q}$ musí být celé číslo. A protože q je nesoudělné s p^n, musí q dělit a_n.

Vynásobíme-li rovnost $(*)$ číslem q^n, získáme rovnost

$$a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} q + \cdots + a_1 p q^{n-1} + a_0 q^n = 0,$$

v níž je prvních n členů dělitelných p, pravá strana je dělitelná p, tedy i $a_0 q^n$ musí být dělitelné p. Z nesoudělnosti p a q^n již plyne $p | a_0$.

Podle tohoto tvrzení je tedy y rovno číslu $\frac{1}{2^k}$ nebo $-\frac{1}{2^k}$ pro nějaké celé nezáporné $k \leq n - 1$. Je-li $k = 0$, pak $y = 1$ nebo $y = -1$, z toho plyne, že $\frac{1}{n}$ je celé, tedy $n = 1$. Je-li $k \geq 1$, pak $|y| \leq \frac{1}{2}$, z čehož plyne $|\frac{1}{n} \cdot 180°| \geq 60°$, protože pro $|x| < 60°$ je $\cos(x) > \frac{1}{2}$, a tedy $n \leq 3$. Jediná možná lichá n jsou tedy 1 a 3. Pro obě hodnoty je $\cos(\frac{1}{n} \cdot 180°)$ racionální: $\cos(180°) = -1$, $\cos(60°) = \frac{1}{2}$.

Uvažujme nyní libovolné přirozené n. Existuje jeho jednoznačný zápis ve tvaru $l \cdot 2^k$, kde l je liché přirozené číslo a k je celé nezáporné. Pokud $1 \neq l \neq 3$, pak $\cos(\frac{1}{l} \cdot 180°)$ není racionální a podle (3) ani $\cos(\frac{1}{n} \cdot 180°)$ není racionální. Pro $l = 1$ a $k = 1$ ($n = 2$) je $\cos(\frac{1}{n} \cdot 180°) =$

$\cos(90°) = 0$ racionální, ale pro $l = 1$ a $k = 2$ ($n = 4$) už není: $\cos(\frac{1}{n} \cdot 180°) = \cos(45°) = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Pro $l = 3$ a $k = 1$ ($n = 6$) také $\cos(\frac{1}{n} \cdot 180°) = \cos(30°) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ není racionální. Podle (3) tedy $\cos(\frac{1}{n} \cdot 180°)$ není racionální také pro všechna n tvaru 2^k, kde $k > 2$, a pro všechna n tvaru $3 \cdot 2^k$, kde $k > 1$.

Dokázali jsme, že $\cos(\frac{1}{n} \cdot 180°)$ je racionální právě pro čísla $n \in \{1, 2, 3\}$. Konečně podle (4) je $\cos(\frac{p}{q} \cdot 180°)$ racionální, právě když $q \in \{1, 2, 3\}$, tedy $\cos(k \cdot 180°)$ je racionální právě pro k celá a celočíselné násobky $\frac{1}{2}$ a $\frac{1}{3}$.

Poznámky k došlým řešením: S první částí nebyly problémy, většina řešitelů si s ní poradila. Druhá část pak byla značně obtížnější, rozhodl jsem se udělit bod za uhodnutí správného řešení, zbylé dva pak za důkaz, že jsou to skutečně všechna řešení.

3. úloha (18, 13, 2,00, 2,0)

(a) Mějme výraz $V = a_1 - [_1 a_2 - [_2 a_3 - \cdots [_{2002} a_{2003} - a_{2004}]_{2002}]_{2001} \ldots]_1$. Určete maximální možnou hodnotu výrazu V, kde $a_1, a_2, \ldots, a_{2004}$ je nějaké pořadí čísel 1, 2, ..., 2004 a za $[_i,]_i$ lze dosadit buď (,), nebo nic, přitom dosadit kulaté závorky musíte právě 1001-krát. (2 BODY)

(b) Mějme výraz $W = a_1 + a_2/a_3 - a_4 \cdot a_5 + a_6/a_7 - a_8 \cdot a_9 + \cdots + a_{2002}/a_{2003} - a_{2004}$. Operátory $+$, $/$, $-$, $\cdot$ se pravidelně střídají a násobení a dělení má přednost před sčítáním a odčítáním. Určete pořadí $a_1, a_2, \ldots, a_{2004}$ čísel 1, 2, ..., 2004 tak, aby výraz W nabýval své maximální možné hodnoty. (3 BODY)

(a) Po dosazení 1001 závorek dostaneme výraz V ve tvaru

$$V = b_1 - (b_2 - (b_3 - \cdots - (b_{1002} \underbrace{)) \ldots)}_{1001},$$

kde $b_i = a_{j(i)} - a_{j(i)+1} - a_{j(i)+2} - \cdots a_{j(i)+k(i)}$ pro nějaké $1 \leq j(i) \leq 2004$ a $0 \leq k(i) \leq 2004 - j(i)$ (navíc ještě $j(i) + k(i) + 1 = j(i+1)$).

Odstraníme-li závorky, dostáváme

$$V = b_1 - b_2 + b_3 - b_4 + b_5 - \cdots - b_{1002}.$$

Odtud je po odstranění závorek aspoň před 501 čísly z $a_1, a_2, \ldots, a_{2004}$ znaménko „$-$", totiž před čísly $a_{j(2)}, a_{j(4)}, \ldots, a_{j(1002)}$, neboť před $b_2, b_4, \ldots, b_{1002}$ máme vždy minus.

Nejmenších 501 čísel mezi 1, 2, ..., 2004 jsou 1, 2, ..., 501, tedy

$$V \leq 502 + 503 + \cdots + 2004 - (1 + 2 + \cdots + 501) = \frac{1503 \cdot 2506}{2} - \frac{501 \cdot 502}{2} = 1757508.$$

Na druhou stranu této hodnoty výraz V nabývat může, bude-li například $a_2 = 1$, $a_4 = 2$, $a_6 = 3$, ..., $a_{1002} = 501$ (a zbylá čísla libovolně) a dosadíme-li kulaté závorky za prvních 1001 hranatých závorek.

(b) Pořadí čísel 1, 2, ..., 2004 je jen konečně mnoho, tedy pro nějaké pořadí výraz W nabývá své maximální hodnoty. Řekněme tedy, že nějaké takové pořadí $a_1 = b_1$, $a_2 = b_2$, ..., $a_{2004} = b_{2004}$ máme, a postupně odvozujme, jak musí vypadat. $a_1, a_2, \ldots a_{2004}$ pro nás budou proměnné (neznámé) ve výrazu W, zatímco $b_1, b_2, \ldots, b_{2004}$ pro nás budou v nějakém pořadí čísla 1, 2, ..., 2004; pro srozumitelnost řešení je potřeba tyto dva pojmy odlišit. Navíc si přidejme podmínku (P), že pokud takových pořadí, kdy W nabývá maximální hodnoty, existuje více, chtějme b_1 maximální možné a je-li splněno (P), chtějme ještě (Q), aby bylo b_{2004} maximální možné.

Všimněme si, že zvětšením proměnných a_1 a a_2, a_6, a_{10}, ..., a_{2002} se výraz W (vždy) zvětší (zmenšením zmenší), zatímco zvětšením zbývajících se výraz W zmenší (zmenšením zvětší). Podle tohoto schématu si rozdělíme indexy do dvou množin. $V = \{1, 2, 6, 10, \ldots, 2002\}$, $M = \{3, 4, 5, 7, 8, 9, 11, 12, 13, \ldots, 2001, 2003, 2004\}$.

Odtud plyne, že pro $m \in M$ musí být čísla b_m jedním z čísel 1, 2, 3, ..., 1502 a naopak pro $v \in V$ musí být čísla b_v jedním z čísel 1503, 1504, ..., 2004. Kdyby tomu tak nebylo, existovaly by $m \in M$, $v \in V$, $b_m > b_v$. Potom by se ale jejich prohozením, tj. volbou $a_m = b_v$ a $a_v = b_m$, výraz W zvětšil (a_m by se zmenšilo a a_v by se zvětšilo).

Dále si uvědomme, že $b_1 = 2004$. Kdyby totiž $b_1 < 2004$, potom $b_v = 2004$ pro nějaké $v \in V$, $v \neq 1$. Prohoďme b_1 a b_v (tedy volme $a_1 = b_v$, $a_v = b_1$), namísto součtu

$$b_1 + \frac{b_v}{b_{v+1}} = b_1 + \frac{2004}{b_{v+1}}$$

(ostatní členy se nezmění) dostaneme součet

$$b_v + \frac{b_1}{b_{v+1}} = 2004 + \frac{b_1}{b_{v+1}}.$$

Přitom

$$2004 + \frac{b_1}{b_{v+1}} = b_1 + (2004 - b_1) + \frac{b_1}{b_{v+1}} \geq b_1 + \frac{2004 - b_1}{b_{v+1}} + \frac{b_1}{b_{v+1}} = b_1 + \frac{2004}{b_{v+1}}.$$

Tedy výraz W se při této výměně nezmenší, b_1 se zvětší. To je ale spor buď s maximalitou výrazu W nebo s podmínkou (P), že b_1 má být maximální možné.

Nyní si ještě množiny V a M rozdělíme.

$$V_1 = \{1\},$$

$$V_2 = \{2, 6, 10, \ldots, 2002\} = \{4k + 2 | k \in \{0, 1 \ldots 500\}\},$$

$$M_1 = \{2004\},$$

$$M_2 = \{3, 7, 11, \ldots, 2003\} = \{4k + 3 | k \in \{0, 1 \ldots 500\}\},$$

$$M_3 = \{4, 5, 8, 9, 12, 13, \ldots, 2000, 2001\} = \{4k + 1, 4k + 2 | k \in \{1, 2 \ldots 500\}\}.$$

Tedy množina V_2 je množina těch indexů i, že a_i jsou ve čitatelích zlomků ve výrazu W, M_2 je množina těch indexů i, že a_i jsou ve jmenovatelích zlomků, M_3 je množina těch indexů i, že a_i jsou v součinech. a_1 a a_{2004} mají specifické postavení.

Pro dvě množiny indexů I, J pišme $I \prec J$, právě když pro každé $i \in I$, $j \in J$ platí $b_i < b_j$ (zkus si uvědomit, že $I \prec J$, $J \prec K \Rightarrow I \prec K$).

Zatím víme

$$M \prec V_2 \prec V_1,$$

odkud také

$$M_2 \prec V_2 \prec V_1.$$

Naším cílem bude dokázat
$$M_3 \prec M_1 \prec M_2 \prec V_2 \prec V_1. \qquad (\heartsuit)$$
Začněme s $M_3 \prec M_1$. Chceme tedy ukázat, že $b_{2004} > b_i$ pro každé $i \in M_3$. Pro spor nechť $b_{2004} < b_i$ pro nějaké $i \in M_3$ (rovnost nastat nemůže). Potom si zkus rozmyslet, že prohozením b_i a b_{2004} se buď výraz W zvětší, nebo dostaneme spor s podmínkou Q – je to jednoduché.

Dále pro snazší zápis v dvojici b_{4k}, b_{4k+1} ($4k$, $4k+1 \in M_2$) značme $v_{4k} = v_{4k+1}$ větší z čísel b_{4k}, b_{4k+1} a $m_{4k} = m_{4k+1}$ menší z těchto dvou čísel (je-li například $b_8 = 51$, $b_9 = 12$, je $v_8 = v_9 = 51$ a $m_8 = m_9 = 12$. Přitom hlavní zjednodušení ve značení bude spočívat v tom, že $b_{4k} \cdot b_{4k+1} = v_{4k} \cdot m_{4k} = v_{4k+1} \cdot m_{4k+1}$.

Aby se nám podařilo dokázat $M_1 \prec M_2$, budeme nejprve potřebovat $M_3 \prec M_2$. Pro spor opět předpokládejme, že existují indexy $i \in M_2$, $j \in M_3$ takové, že $b_i < b_j \le v_j$ (tím, že $j \in M_3$, máme m_j a v_j definované). Navíc ještě chtějme m_j maximální možné. Nyní naším cílem bude zjistit, že $b_i \cdot v_j \cdot m_j > 2004$ ($\diamondsuit$). Rozlišme dvě možnosti. První je, že $b_i > 50$, potom $v_j > b_i > 50$, odkud $b_i \cdot v_j \cdot m_j > 2500 > 2004$. Druhá je, že $b_i \le 50$. Čísla m_4, m_8, m_{12}, $\ldots$, m_{2000} jsou navzájem různá, tedy největší z nich m_k má velikost alespoň 500. To ale znamená, že $m_k = m_j$, neboť $b_i \le 50 < 500 \le m_k$, a my chtěli m_k maximální možné, tedy $m_j = m_k \ge 500$. Potom dostáváme $b_i \cdot v_j \cdot m_j > 1 \cdot m_j \cdot m_j \ge 25000 > 2004$. V obou případech tedy platí ($\diamondsuit$). Nyní ukážeme, že když prohodíme b_i a v_j , hodnota výrazu W se zvětší, čímž dostaneme spor s maximalitou. Namísto výrazu
$$\frac{b_{i-1}}{b_i} - v_j \cdot m_j$$
dostáváme výraz
$$\frac{b_{i-1}}{v_j} - b_i \cdot m_j.$$
Ostatní sčítance (menšence) se ve výrazu W nezmění.

Aby se výraz W zvětšil, chceme tedy ukázat, že
$$\frac{b_{i-1}}{v_j} - b_i \cdot m_j > \frac{b_{i-1}}{b_i} - v_j \cdot m_j,$$
upravujme ekvivalentními úpravami:
$$b_i \cdot b_{i-1} - b_i^2 \cdot v_j \cdot m_j > v_j \cdot b_{i-1} - b_i \cdot v_j^2 \cdot m_j,$$
$$(v_j - b_i)(b_i \cdot v_j \cdot m_j - b_{i-1}) > 0.$$
Přitom $v_j > b_i$ a podle ($\diamondsuit$) je $b_i \cdot v_j \cdot m_j > 2004 \ge b_{i-1}$. Nerovnost je tedy dokázána a máme spor s maximalitou W. Tedy $M_3 \prec M_2$.

Pokračujme s $M_1 \prec M_2$. Víme, že $M_3 \prec M_1$ a $M_3 \prec M_2 \prec V$, tedy $\{b_j | j \in M_3\}$ nutně splývá s $\{1, 2, \cdots, 1000\}$, odkud je také $b_{2004} \ge 1001$ a $b_i \ge 1001$ pro každé $i \in M_2$ (množina M_3 má 1000 prvků). Chceme dokázat, že $b_{2004} < b_i$ pro každé $i \in M_2$. Jako zatím vždy, postupujme sporem. Nechť $b_{2004} > b_i$ pro nějaké $i \in M_2$. Prohoďme b_i a b_{2004}. Namísto výrazu
$$\frac{b_{i-1}}{b_i} - b_{2004}$$
dostaneme
$$\frac{b_{i-1}}{b_{2004}} - b_i.$$

Aby se výraz W zvětšil, chceme tedy ukázat, že

$$\frac{b_{i-1}}{b_{2004}} - b_i > \frac{b_{i-1}}{b_i} - b_{2004},$$

ekvivalentními úpravami

$$b_{i-1} \cdot b_i - b_{2004} \cdot b_i^2 > b_{i-1} \cdot b_{2004} - b_{2004}^2 \cdot b_i,$$

$$(b_{2004} \cdot b_i - b_{i-1})(b_{2004} - b_i) > 0$$

Přitom $b_{2004} \cdot b_i \geq 1001 \cdot 1001 > 2004 \geq b_{i-1}$ a $b_{2004} > b_i$. Tím je nerovnost dokázána, čímž máme opět spor s maximalitou W.

Dokázali jsme tedy vše potřebné pro ($\heartsuit$), $M_3 \prec M_1 \prec M_2 \prec V_2 \prec V_1$. Odtud tedy plyne, že

$$b_1 = 2004,$$

$$\{b_2, b_6, \dots, b_{2002}\} = \{1503, 1504, \dots, 2003\},$$

$$\{b_3, b_7, \dots, b_{2003}\} = \{1002, 1003, \dots, 1502\},$$

$$b_{2004} = 1001,$$

$$\{b_4, b_5, b_8, b_9 \dots, b_{2000}, b_{2001}\} = \{1, 2, \dots, 1000\}.$$

Nyní víme, jak jsou uspořádány množiny M_1, M_2, M_3, V_1, V_2, zbývá nám tedy uspořádat čísla uvnitř množin.

Budeme využívat takzvané srovnávací (mincové, Čebyševovy) nerovnosti. Nechť $c_1 \geq c_2 \geq \dots \geq c_k$ jsou sestupně uspořádaná čísla $C_1, C_2, \dots, C_k$ a $d_1, d_2, \dots, d_k$ je nějaké pořadí reálných čísel $D_1, D_2, \dots, D_k$. Potom výraz $S = c_1 \cdot d_1 + c_2 \cdot d_2 + \cdots c_k \cdot d_k$ nabývá své maximální hodnoty, pokud $d_1 \geq d_2 \geq \cdots \geq d_k$, a minimální hodnoty, pokud $d_1 \leq d_2 \leq \cdots \leq d_k$. Důkaz zde nebudeme uvádět, protože je známý[3].

Zřejmě výrazy $\frac{a_2}{a_3}$, $\frac{a_6}{a_7}$, …, $\frac{a_{2002}}{a_{2003}}$ ve výrazu W můžeme libovolně prohazovat, aniž by se hodnota výrazu W změnila, podobně můžeme libovolně prohazovat $a_4 \cdot a_5$, $a_8 \cdot a_9$, …, $a_{2000} \cdot a_{2001}$. Tedy bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že $b_2 > b_6 > \cdots > b_{2002}$ a že $b_4 > b_8 \cdots > b_{2000}$, navíc ještě můžeme prohazovat b_{4i} a b_{4i+1}, tedy můžeme bez újmy na obecnosti předpokládat, že $b_{4i} > b_{4i+1}$ (přesněji řečeno prvně předpokládáme, že $b_{4i} > b_{4i+1}$ (jinak prohazíme b_{4i} a b_{4i+1}), a poté, že $b_4 > b_8 > \cdots > b_{2000}$). Výraz

$$b_2 \cdot \frac{1}{b_3} + b_6 \cdot \frac{1}{b_7} + \cdots + b_{2002} \frac{1}{b_{2003}}$$

chceme maximalizovat, tedy podle srovnávací nerovnosti je $\frac{1}{b_3} > \frac{1}{b_7} > \cdots > \frac{1}{b_{2003}}$, neboli $b_3 < b_7 < \cdots < b_{2003}$.

Naopak výraz

$$b_4 \cdot b_5 + b_8 \cdot b_9 + \cdots + b_{2000} \cdot b_{2001}$$

[3] Mimochodem je velmi jednoduchý a podobný úvahám, jež jsme už několikrát prováděli, stačí předpokládat, že posloupnost $\{d_i\}_{i=1}^k$ není vhodně uspořádána, a potom prohozením dvou hodnot d_j, d_k porušujících uspořádání lze hodnotu výrazu S zvětšit / zmenšit.

chceme minimalizovat (před každým součinem je ve výrazu W znaménko minus), tedy $b_5 < b_9 < \cdots < b_{2001}$. Navíc odtud plyne už přímo, že $b_4 > b_8 > \cdots b_{2000} > b_{2001} > b_{1997} > \cdots > b_5$.

Povedlo se nám uspořádat vše, co jsme potřebovali, a dostáváme tak jedno z možných pořadí, pro které je výraz W maximální, a to pořadí

$$2004, 2003, 1002, 1000, 1, 2002, 1003, 999, 2, 2001, 1004, 998, 3, \ldots, 1503, 1502, 1001,$$

ještě pro přehlednost zapsáno ve výrazu W:

$$2004 + \frac{2003}{1002} - 1000 \cdot 1 + \frac{2002}{1003} - 999 \cdot 2 + \frac{2001}{1004} - 998 \cdot 3 + \cdots + \frac{1503}{1502} - 1001.$$

Poznámky k došlým řešením: Tato úloha byla asi jednoduchá, a tak nečinila žádné větší problémy. Jen bych připomněl, že pokud řešíme úlohy na extrémy, musíme dokázat, že každá jiná možnost je horší nebo rovna oné ideální, a pro tu ideální najít aspoň jeden konkrétní příklad.

4. úloha (12, 5, 1,00, 1,0)

Blíží se zkouškové období a studenti (dohromady n) se pomalu připravují na písemnou zkoušku z matematické analýzy. Některá témata se ve zkouškové písemce objevit musí, jiná (volitelná[4]) se objevit můžou, ale nemusí (řekněme, že volitelných je k), přičemž je i možné, že se v písemce objeví třeba i všechna, nebo naopak žádné z nich. Každý student má nějaké přání. Každé přání se skládá z jednoho či dvou dílčích přání, přitom přáním studenta je, aby se splnilo alespoň jedno z dílčích přání. Každé dílčí přání je buď, aby se nějaké téma v písemce objevilo, nebo aby se nějaké neobjevilo. Tedy například Karel si může přát, *ať tam není Taylorův polynom*, Lenka si může přát, *ať se v písemce neobjeví úplnost metrických prostorů* nebo *ať se v písemce objeví Taylorův polynom* a Míša si stejně jako Karel může přát, *ať tam není Taylorův polynom*, přitom kurzívou jsou vyznačena dílčí přání. Zkoušejícímu se podařilo zjistit přání studentů, a protože nerad dává špatné známky, snaží se, aby přání co možná nejvíce studentů byla splněna. Vaším úkolem bude zjistit, kolika nejvýše studentům lze přání splnit.

(a) Určete nejlepší (tj. největší) konstantu $c \in \langle 0; 1\rangle$ takovou, že pro libovolné n a k lze splnit volbou vhodných volitelných témat u zkoušky alespoň cn přání studentů (tedy hledáte c nezávislé na n a k). (2 BODY)

(b) Určete nejlepší (tj. největší) konstantu $d \in \langle 0; 1\rangle$ takovou, že pro libovolné n a k lze splnit volbou vhodných volitelných témat u zkoušky alespoň dn přání studentů (tedy hledáte d nezávislé na n a k), víte-li navíc, že vyberete-li si libovolné tři studenty, potom lze volbou vhodných volitelných témat splnit přání těchto tří studentů. (3 BODY)

(a) Ukážeme, že $c = \frac{1}{2}$.

Nejprve si rozmyslíme, že nelze s jistotou splnit více jak $\frac{n}{2}$ přání, tedy že $c \leq \frac{1}{2}$. To je snadné, stačí pro $n = 2$ uvažovat situaci, kdy si například Honza přeje, aby Taylorův polynom v písemce byl, a Pepa, aby nebyl. Nelze tedy splnit obě přání současně, čímž lze splnit nejvýše $1 = \frac{n}{2}$ přání.

Nadále si rozmyslíme, že $\frac{n}{2}$ přání splnit lze, tedy že $c \geq \frac{1}{2}$. Nechť každé téma zkoušející do písemky dá s pravděpodobností $\frac{1}{2}$. Potom každý student má své přání splněno s pravděpodobností

[4] Tj., tato témata volí zkoušející, nikoliv studenti.

větší nebo rovnou $\frac{1}{2}$ ($\frac{1}{2}$, pokud má jedno přání, a $\frac{3}{4}$, pokud má dvě (nevylučující se) přání). To znamená, že průměrný počet (střední hodnota) splněných přání je větší nebo roven $\frac{n}{2}$, odkud existuje nějaká volba témat taková, že je alespoň $\frac{n}{2}$ přání splněno.

(b) Nejprve dokážeme, že $d \geq \frac{2}{3}$. Důkaz bude podobný důkazu v části (a). Pro lepší přehlednost textu si domluvme nějaké značení. Témata značme malými písmeny $x, y, t, \dots$, případně je ještě indexujme. Přání, ať se téma t objeví, značme (t), přání, ať se t neobjeví, značme (t'). Dále přání, ať se objeví x nebo y, značme $(x \vee y)$ (pro přání, ať se nějaké téma neobjeví, doplníme čárky). Rozdělme si studenty do dvou skupin. S_1 bude skupina těch studentů, kteří mají právě jedno přání, S_2 bude skupina těch studentů, kteří mají dvě (různá přání). Ve skupině S_1 určitě nejsou dva studenti, kdy by jeden měl nějaké přání (t) a druhý měl přání (t'), totiž tato dvě přání by byla nesplnitelná a zadání po nás požaduje dokonce, aby každá tři přání byla splnitelná. Proto můžeme bez újmy na obecnosti předpokládat, že všichni studenti ve skupině S_1 mají pozitivní přání (tj. ať se něco objeví), jinak přání „otočíme". Značme $(x_1), (x_2), \dots, (x_k)$ všechna přání studentů ve skupině S_1. Dále značme $y_1, y_2, \dots, y_l$ zbývající témata, tedy ta témata, která se nevyskytují v přáních studentů ze skupiny S_1. Téma x_i (pro $1 \leq i \leq k$) nechť se v písemce objeví s pravděpodobností $\frac{2}{3}$, téma y_j (pro $1 \leq j \leq k$) s pravděpodobností $\frac{1}{2}$. Studenti ze skupiny S_1 mají svá přání splněna s pravděpodobností $\frac{2}{3}$. Studenti ze skupiny S_2 určitě nemají přání $(x_i' \vee x_j')$, jinak by (x_i), (x_j) a $(x_i' \vee x_j')$ nešlo splnit, což by byl spor se zadáním. Potom ale i studenti ze skupiny S_2 mají přání splněno s pravděpodobností alespoň $\frac{2}{3}$ – jedno dílčí přání mají splněno s pravděpodobností alespoň $\frac{1}{2}$ a jedno s pravděpodobností alespoň $\frac{1}{3}$, odtud je pravděpodobnost nesplnění jejich přání menší nebo rovna $\left(1 - \frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}$. Závěr je nyní stejný jako v části (a), průměrný počet (střední hodnota) splněných přání je větší nebo roven $\frac{2}{3}$, tedy existuje volba témat, kdy je splněno alespoň $\frac{2n}{3}$ přání.

Nyní by měl přijít důkaz, že $d \leq \frac{2}{3}$, abychom našli konstantu $d = \frac{2}{3}$. Nicméně zde se musím řešitelům omluvit, protože se mi v termínu tisku komentářů nepodařilo důkaz[5] zcela dokončit. Velmi snadno lze zjistit, že $d \leq \frac{3}{4}$, stačí zvolit čtyři studenty, tři témata t, u, y a přání (t), (u), $(t' \vee y)$, $(u' \vee y')$. Dokázat však, že $d < \frac{3}{4}$, je výrazně těžší.

Poznámky k došlým řešením: Část *a*) měla většina řešitelů v pořádku. Nejvíce se mi líbilo řešení od *Zbyňka Konečného*, které spočívalo v tom, že se zkoušející rozhodne buď všechna témata splnit, nebo všechna nesplnit – pak se dá snadno rozmyslet, že alespoň jednou z těchto voleb splní přání alespoň polovině studentů. Na část *b*) naopak nikdo nepřišel, asi byla úloha příliš těžká.

5. úloha **(22, 16, 2,00, 2,0)**

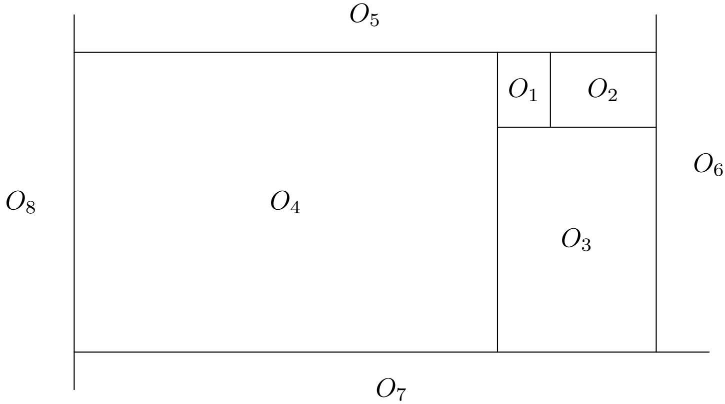
Řekněme, že rovina je pokryta mnohoúhelníky $M_1, M_2, \dots$, právě když každé dva mnohoúhelníky se nanejvýš dotýkají (tedy se nepřekrývají) a pro každý bod x roviny existuje mnohoúhelník M_j takový, že x náleží mnohoúhelníku M_j.

(a) Najděte pokrytí roviny obdélníky $O_1, O_2, \dots$ podobnými zadanému obdélníku O různému od čtverce takovými, že libovolné dva obdélníky (pro $i \neq j$) O_i, O_j nejsou shodné. (2 BODY)

(b) Najděte pokrytí roviny čtyřúhelníky $T_1, T_2, \dots$ podobnými zadanému tětivovému čtyřúhelníku T takovými, že libovolné dva čtyřúhelníky (pro $i \neq j$) T_i, T_j nejsou shodné. (3 BODY)

[5] Na základě nějakých silnějších výsledků vyjde konstanta d vskutku $\frac{2}{3}$, nicméně tyto výsledky vyžadují vysokoškolský přístup k řešení úlohy.

(a) Budeme pokrývat tak, jak je naznačeno na obrázku.



Nejprve umístíme libovolně první obdélník O_1 podobný obdélníku O. Navíc si natočme rovinu tak, že kratší ze stran obdélníku O_1 je umístěna vodorovně a delší svisle.

Postupně budeme přidávat další obdélníky tak, že dosud umístěné obdélníky budou dohromady vytvářet nějaký obdélník.

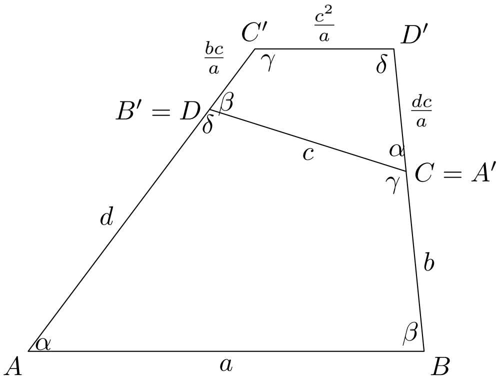
Budeme předpokládat, že obdélníky O_1, O_2, ..., O_k dohromady tvoří obdélník, k jeho delší straně připišme kratší stranou obdélník O_{k+1} podobný obdélníku O. Potom je obdélník O_{k+1} větší než obdélník složený z O_1, O_2, ..., O_k, tedy i větší než libovolný z těchto obdélníků. Odtud plyne, že obdélníky O_1, O_2, ... jsou navzájem různé.

Ještě potřebujeme zaručit, že pokryjeme celou rovinu. Při vytváření O_{k+1} máme vždy na výběr dvě delší strany. Přikládejme obdélník střídavě k pravé, spodní, levé a horní straně. Rozmysli si, že se střídá, zda je delší strana vodorovná či svislá, tedy tento postup je korektní. Pokud si chceme uvědomit, že pokryjeme celou rovinu, stačí si do této roviny nakreslit obdélníkovou síť tvořenou obdélníky shodnými s O_1. Chceme-li pokrýt libovolný bod roviny, stačí pokrýt libovolný obdélník ze zvolené obdélníkové sítě. Indukcí si lze snadno rozmyslet (vzhledem k tomu, že se obdélníky zvětšují), že libovolný obdélník R z této sítě pokryjeme nejvýše po $4m$ krocích, kde m je větší z absolutních hodnot rozdílu x-ových souřadnic R a O_1 a rozdílu y-ových souřadnic R a O_1 (souřadnice pro tento účel deformujeme tak, aby výška i šířka obdélníku O_1 byla jednotková).

(b) Nejprve úlohu vyřešíme pro tětivové čtyřúhelníky, které mají nějaké dvě protilehlé strany nestejně dlouhé. Pak nám zbudou tětivové rovnoběžníky. Označme A, B, C, D vrcholy čtyřúhelníku T a a, b, c, d jeho strany, α, β, γ, δ jeho vnitřní úhly – jak se obvykle značí.

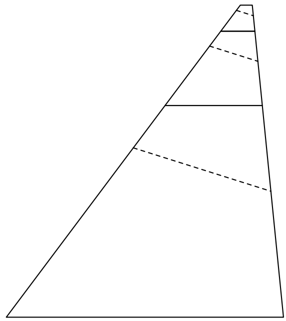
1. Existují dvě protilehlé strany, které nejsou stejně dlouhé. Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že jsou to strany a a c a platí $a > c$, jinak jen přeznačíme čtyřúhelník.

Dva podobné tětivové čtyřúhelníky lze spojit na lichoběžník, jak je naznačeno na následujícím obrázku. Koeficient podobnosti je $\frac{a}{c}$, odkud plyne, že čtyřúhelníky nejsou shodné. Důkaz, že dostaneme opravdu lichoběžník, můžeš najít v řešení páté úlohy páté série, nebudeme ho zde proto opakovat.

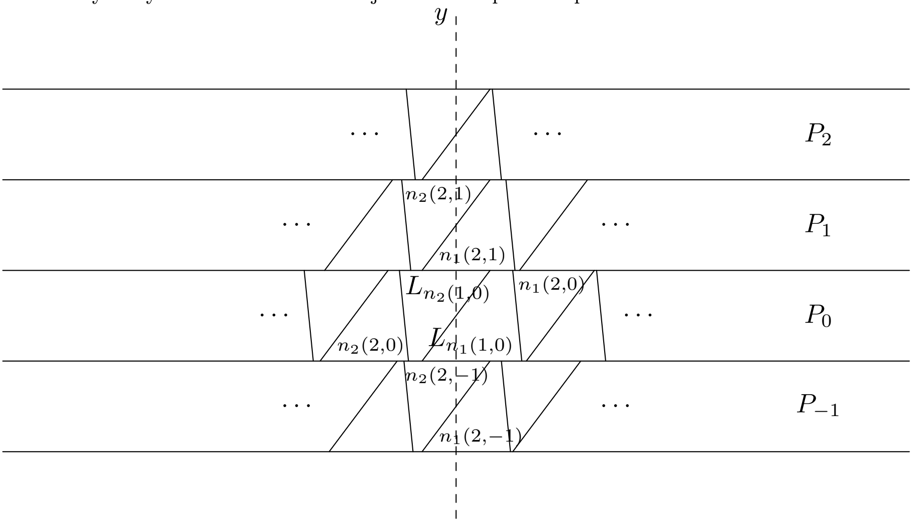


Dále budeme spojovat lichoběžníky, a sice tak, že jich poskládáme n „na sebe“ a označíme tento útvar L_n. Na obrázku lze vidět L_3. Skládáním na sebe se čtyřúhelníky zmenšují s koeficientem $\frac{a}{c}$, tedy žádné dva nejsou shodné (rozmysli si).

Myšlenkou bude pokrýt rovinu pomocí útvarů L_n tak, aby všechny měly stejnou výšku h. Postup pokrývání bude přitom velmi podobný jako ve třetí úloze čtvrté série. Rozřežme rovinu vodorovnými přímkami na pásy o výšce h a tyto pásy postupně (směrem nahoru) označme $\ldots$, P_{-2}, P_{-1}, P_0, P_1, P_2, $\ldots$ Zvolme si přímku y kolmou na pásy.



Se zvětšujícím se přirozeným k opakujme následující postup. Do každého z pásů P_i pro $i \in \{-(k-1), -(k-2), \dots, -1, 0, 1, \dots, k-2, k-1\}$ přidejme lichoběžníky[6] $L_{n_1(k,i)}$ a $L_{n_2}(k,i)$ takové, že tětivové čtyřúhelníky, které jsou uvnitř těchto lichoběžníků, nejsou shodné s žádným čtyřúhelníkem, který jsme doposud umístili – v následujícím odstavci dokážeme, že takovou volbu lze provést. L_{n_1} umístěme (aspoň kousek) napravo od přímky y a L_{n_2} (aspoň kousek) nalevo od y tak, že je-li $i = \pm(k-1)$, umístíme tyto dva lichoběžníky vedle sebe tak, aby je y protťala. Je-li $i \neq \pm(k-1)$, přidejme je k již umístěným lichoběžníkům v i-tém pásu. Rozmysli si, že takto lze lichoběžníky vždy umístit. Na obrázku je umístěno prvních pár lichoběžníků.



Nyní přistoupíme k slíbenému důkazu, že vždy vhodné lichoběžníky $L_{n_1(k,i)}$ a $L_{n_2(k,i)}$ můžeme vybrat. Stačí dokázat, že kdykoli je zakázáno pouze konečně mnoho čtyřúhelníků C_1, C_2, $\dots$, C_j podobných T, podaří se nám najít n a L_n dané výšky, tak, aby žádný čtyřúhelník v L_n nebyl shodný s žádným ze zakázaných čtyřúhelníků. Zvolme $l \in \mathbb{N}, l \leq j$. Ukážeme, že je jen

[6]Indexy $n_1(k,i)$ a $n_2(k,i)$ závisí na k a i, nicméně pokud tuto závislost nebudeme přímo potřebovat, pišme jen n_1 a n_2.

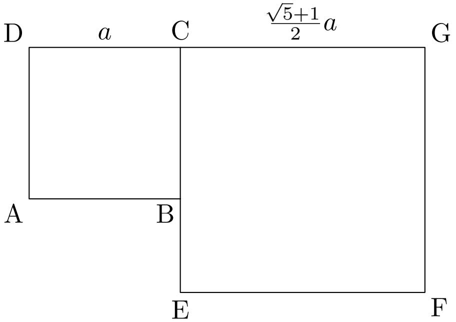
konečně mnoho lichoběžníků L_m takových, že obsahují C_l. Předpokládejme, že L_m obsahuje C_l, řekněme, že C_l je p-tý největší čtyřúhelník, obsah L_m je určitě shora omezený obsahem L_1 o výšce h (rozmysli si), tedy p je určitě shora omezené nějakou konstantou P (jinak by L_m mělo příliš velký obsah). Jenže pořadím, kolikátý největší čtyřúhelník je C_l uvnitř L_m, je m už jednoznačně dáno (spočítej si koeficient podobnosti). Tedy nejvýše P lichoběžníků L_m obsahuje C_l. Projdeme-li všechna l, $1 \leq l \leq j$, dostaneme jen konečně mnoho zakázaných lichoběžníků.

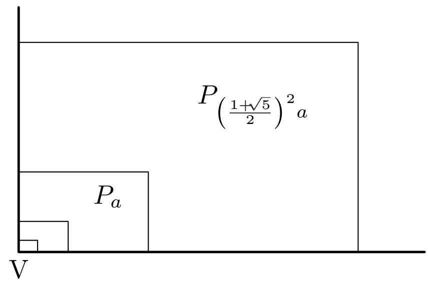
Z předchozího odstavce plyne, že při našem zvoleném pokrývání budou čtyřúhelníky uvnitř lichoběžníků navzájem různé, zbývá dokázat, že pokryjeme celou rovinu. Tady je korektní zdůvodnění velmi podobné zdůvodnění ve třetí úloze čtvrté série. Důležité je jen si uvědomit, že lichoběžníky L_n mají obsah aspoň tak velký jako trojúhelník o výšce h a délce strany rovné rozdílu velikosti kratší a delší strany L_n (tento rozdíl je pro všechna n shodný). Tedy se nám nemůže stát, že by se lichoběžníky zmenšily pod tuto mez.

Nyní nám zbývá ještě vyřešit druhou variantu podoby čtyřúhelníku.

2. Každé dvě protilehlé strany jsou stejně dlouhé. Odtud plyne, že se jedná o rovnoběžník. Jelikož pokrýváme tětivovými čtyřúhelníky, musí být tímto rovnoběžníkem obdélník nebo čtverec (součet protilehlých úhlů je 180°). Obdélníky máme vyřešeny v části (a), zbývá vyřešit čtverec.

Nejprve popíšeme, jak pomocí čtverců pokrýt čtvrtrovinu bez jejího vrcholu. Zvolme si nějaké kladné reálné číslo a a umístěme čtverce $ABCD$ a $EFGC$ o stranách a a $\frac{\sqrt{5}+1}{2}a$ vedle sebe tak, jak je naznačeno na následujícím obrázku vlevo, označme takto vzniklý šestiúhelník P_a. Ještě si označme $q = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$.





Nyní přejděme k pokrývání čtvrtroviny útvary P_a, najdeme takové pokrytí, že žádné dva čtverce obsažené v těchto útvarech nebudou shodné. Označme V vrchol této čtvrtroviny. Umístěme útvar P_a tak, že VE a VA budou tvořit hraniční polopřímky, přitom ještě body F a D budou po řadě ležet na těchto polopřímkách. Nyní zobrazujme P_a ve stejnolehlostech se středem V a koeficienty q^{2z}, kde z je **celé** číslo. Vzhledem k tomu, jak bylo $q = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$ voleno (q je kořenem rovnice $x^2 - x - 1 = 0$), šestiúhelníky na sebe přesně navazují, tj. $P_{aq^{2z}}$ a $P_{aq^{2(z+1)}}$ mají dvě společné hrany (spočítej si). Dále je šestiúhelník P_a tvořen dvěma čtverci o stranách a a qa, tedy čtvrtrovinu pokrýváme přesně čtverci s hranami aq^s, kde s je celé číslo, tedy čtverce jsou navzájem neshodné. Ještě si uvědomíme, že pokryjeme celou čtvrtrovinu krom vrcholu V. Mějme tedy bod X v hledané čtvrtrovině a hledejme šestiúhelník, který ho pokrývá. Nechť z je největší celé číslo takové, že když zobrazíme X ve stejnolehlosti se středem V a koeficientem q^{2z} na bod X', potom je bod X' uvnitř obdélníku $VFGD$ ($ABEFGD$ tvoří vrcholy P_a). To ale znamená, že X' je uvnitř P_a (kdyby bylo uvnitř $VABE$, potom by stejnolehlost s koeficientem q^{2z+2} zobrazovala dovnitř $VFGD$, což by byl spor s tím, že z je největší možné). To ale na druhou stranu znamená, že stejnolehlost s koeficientem q^{-2z} zobrazuje X' na X, tedy X je pokryt šestiúhelníkem $P_{aq^{-2z}}$.

Podařilo se nám pokrýt čtvrtrovinu bez vrcholu. Nyní pokryjeme celou rovinu. Stačí pokrýt čtyři čtvrtroviny, k tomu je ale potřeba použít trochu trik. Kdybychom rozdělili rovinu dvěma kolmými přímkami na čtyři čtvrtroviny, potom nepokryjeme průsečík těchto přímek (je to vrchol každé čtvrtroviny). Nicméně pokud rozdělíme rovinu přímkou p nejprve na dvě poloroviny a tyto poloroviny polopřímkami r_1, r_2 kolmými na p tak, aby r_1 a r_2 neměly společný počátek, potom už každý bod roviny pokryjeme (pokud pokryjeme čtvrtroviny bez vrcholů).

Abychom nenašli dva shodné čtverce, potřebujeme vhodně zvolit pro každou čtvrtrovinu a, označme tato čtyři a jako a_0, a_1, a_2, a_3. Potom délky stran čtverců jsou $a_i q^z$ pro z celé, $i \in \{0, 1, 2, 3\}$. Je velmi snadné si rozmyslet, že tato čísla budou navzájem různá, volíme-li například $a_i = q^{\frac{i}{4}}$. Rovina je pokryta.

Poznámky k došlým řešením: Část *a*) byla u většiny řešitelů podobná autorskému řešení. Avšak téměř nikdo nezdůvodnil, že pokryje celou rovinu. Některá řešení dokonce pokryla jen čtvrtrovinu. Vyskytly se i pokusy o jiná řešení, nicméně u těchto bylo obvykle mnohem těžší zdůvodnit, že fungují (že nenajdeme dva stejné obdélníky).

V části *b*) byla naopak všechna v podstatě správná řešení různorodá. Škoda, že většina v podstatě správných řešení zapomněla na to, že čtverec je také tětivový čtyřúhelník. Pro pokrývání tětivovými čtyřúhelníky různými od čtverce a obdélníku se mi nejvíce líbila myšlenka *Karly Procházkové*. Její podstatou bylo začít libovolným čtyřúhelníkem a posléze ke vznikajícímu útvaru do spirály přidávat lichoběžník složený ze dvou čtyřúhelníků (stejným způsobem jako v autorském řešení páté úlohy páté série). Škoda jen, že si nevšimla, že občas je potřeba přidat více než jeden lichoběžník, aby nemohly vzniknout shodné čtyřúhelníky.

6. úloha **(19, 11, 1,00, 2,0)**

(a) Rozhodněte, pro jaké zbytky přirozeného čísla k při dělení devíti musí být n řešící rovnici $S(kn) = S(n)$ dělitelné devíti. (2 BODY)

(b) Dokažte, že pro každé přirozené k existuje přirozené l takové, že rovnice (s neznámou n) $S(kln) = S(n)$ má řešení v oboru přirozených čísel neobsahujících ve svém desítkovém zápise ani jednu devítku. (3 BODY)

(a) Budeme využívat toho, že pro libovolné přirozené n dávají n a $S(n)$ stejný zbytek při dělení 9. Jelikož má platit $S(kn) = S(n)$, musí kn a n dávat stejný zbytek při dělení 9. Tedy $kn - n = n(k-1)$ je dělitelné devíti. Odtud, dává-li k při dělení devíti zbytek 0, 2, 3, 5, 6 nebo 8, musí být n dělitelné devíti, zbývá vyřešit zbytky 1, 4, 7. Pro ty ale snadno najdeme příklady řešení, kdy n není dělitelné 9. Pro zbytek 1 lze například volit $k = 1$, $n = 1$, pro zbytek 4 lze volit $k = 4$, $n = 3$ a pro zbytek 7 lze volit $k = 7$ a $n = 3$. Toť vše.

(b) Nejprve se zbavíme přebytečných mocnin 2 a 5. Vytkněme z k nejvyšší možnou mocninu 2 a 5, dostaneme $k = 2^\alpha 5^\beta m$, kde m je nesoudělné s 2 a 5. Dokážeme, že l najdeme ve tvaru $j5^{\alpha-\beta}$ (pro $\alpha > \beta$), resp. ve tvaru $j2^{\beta-\alpha}$ (pro $\beta > \alpha$). Dostaneme tak řešit rovnici $S\left(10^{\max(\alpha,\beta)} jmn\right) = S(n)$, kde m, α, β máme dané a j si chceme zvolit tak, aby rovnice měla řešení, navíc víme, že m je nesoudělné s 2 a 5. Vzhledem k tomu, že $S\left(10^{\max(\alpha,\beta)} jmn\right) = S(jmn)$, stačí řešit rovnici $S(jmn) = S(n)$.

Nyní si už zvolíme j. Konkrétně ho budeme volit tak, že $jm = \underbrace{11\ldots1}_{9h}$ pro nějaké přirozené h. K této volbě tedy potřebujeme vědět, že pro nějaké h je $\underbrace{11\ldots1}_{9h}$ dělitelné m. Podívejme se na zbytky čísel $\underbrace{11\ldots1}_{9}$, $\underbrace{11\ldots1}_{9\cdot2}$, ..., $\underbrace{11\ldots1}_{9(m+1)}$ při dělení m. Některé dva se musí opakovat – tedy existují s, t, $s<t$ taková, že $\underbrace{11\ldots1}_{9s}$ a $\underbrace{11\ldots1}_{9t}$ dávají stejný zbytek při dělení m. Potom ale $\underbrace{11\ldots1}_{9t}-\underbrace{11\ldots1}_{9s}=\underbrace{11\ldots1}_{9(t-s)}\underbrace{00\ldots0}_{9s}$ dává zbytek 0 při dělení m. Jelikož je m nesoudělné s 10, plyne odtud, že i $\underbrace{11\ldots1}_{9(t-s)}$ je dělitelné m, tedy námi hledané h je $t-s$.

Zbývá tedy dokázat, že rovnice $S(\underbrace{11\ldots1}_{9h}n)=S(n)$ má nějaké řešení n neobsahující ve svém zápise ani jednu devítku. Konkrétně budeme hledat řešení ve tvaru $n=\underbrace{11\ldots1}_{y}2$ pro nějaké přirozené y. Pro zjednodušení zápisu budeme občas značit $u=\underbrace{11\ldots1}_{9h}$.

Nyní přijde myšlenkově jednoduchá, ale technicky náročnější část řešení. Prvně nastíníme myšlenku a posléze si uvědomíme všechny technické detaily.

Nejprve si představme, že číslo $n(x)=\underbrace{11\ldots1}_{x}2$ je výrazně delší než číslo $u=\underbrace{11\ldots1}_{9h}$. Vynásobíme-li tato dvě čísla, dostaneme číslo, které bude mít na začátku nějaké nenulové číslice, potom bude mít spoustu nul a potom bude mít na konci nějaké nenulové číslice. Odtud bude $S(n(x)\cdot u)<S(n(x))$ (díky mnoha nulám). Postupně budeme zmenšovat x. V $n(x)\cdot u$ budou pouze ubývat nuly, tedy ciferný součet $S(n(x)\cdot u)$ se nebude měnit, na druhou stranu v $n(x)$ budou ubývat jedničky, tedy ciferný součet $S(n(x))$ se bude zmenšovat. Budeme-li volit x dostatečně malé, dojdeme k situaci, kdy $S(n(x)\cdot u)>S(n(x))$. Protože jsme zmenšovali po jedničkách, nalezneme takové $x=y$, že $S(n(y)\cdot u)=S(n(y))$, což bude vše (posléze toto y vyjádříme dokonce přesně).

Myšlenku už nyní máme, přejdeme k techničtější části řešení – uvědomíme si, že tvrzení vyřčená v myšlence jsou pravdivá.

Nejprve si tedy rozmyslíme, jak vypadá součin čísel $u=\underbrace{11\ldots1}_{9h}$ a $n(x)=\underbrace{11\ldots1}_{x}2$ (v závislosti na x). Povedeme fintu, uvědomíme si, že $u\cdot n(x)=\frac{u\cdot(9n(x))}{9}$. Přitom $9n(x)=1\underbrace{00\ldots0}_{x}8=10^{x+1}+8$. Odtud je (předpokládejme, že $x\geq 9h$)

$$u\cdot n(x)=\frac{\overbrace{11\ldots1}^{9h}\overbrace{00\ldots0}^{x+1-9h}\overbrace{88\ldots8}^{9h}}{9}.$$

Přitom čísla $\underbrace{11\ldots1}_{9h}$ a $\underbrace{88\ldots8}_{9h}$ jsou dělitelná devíti (mají ciferný součet dělitelný devíti), tedy

$$u\cdot n(x)=\star\underbrace{00\ldots0}_{x+1-9h}\Delta,$$

kde $\star$ a Δ jsou zápisy $9h-1$ ciferných čísel $a_\star=\frac{\overbrace{11\ldots1}^{9h}}{9}$ a $a_\Delta=\frac{\overbrace{88\ldots8}^{9h}}{9}$. Rozmysli si, že $a_\star=\underbrace{1234567901234567 90\cdots012345679}_{9h-1}$, odkud je $S(a_\star)=37h$.

Nyní už jen zvolme $y = S(a_\star) + S(a_\Delta) - 2$. Potom ciferný součet čísla $n(y)$ je $y + 2 = S(a_\star) + S(a_\Delta)$ a ciferný součet čísla $u \cdot n(y)$ je (pokud je $y \geq 9h$) také $S(a_\star) + S(a_\Delta)$, tedy jsme vskutku našli řešení. Zbývá tedy ověřit, že $y \geq 9h$, to je ovšem snadné, totiž

$$y = S(a_\star) + S(a_\Delta) - 2 \geq S(a_\star) - 2 = 37h - 2 > 9h.$$

Rovnice $S(nu) = S(u)$ tedy má řešení, je jím například $n = \underbrace{1111\ldots111}_{S(a_\star)+S(a_\Delta)}2$, což jsme chtěli dokázat.

Poznámky k došlým řešením: Došlá řešení první části byla většinou správná. Často ale šlo o poměrně zdlouhavý rozbor případů, pokud ošklivost překračovala únosnou míru, strhávala jsem jedno i. Druhou část nevyřešil nikdo, pokusili se o to pouze dva řešitelé.

7. úloha **(13, 10, 2,00, 3,0)**

(a) Nechť D je množina všech komplexních čísel, jejichž imaginární část leží na intervalu $\langle 0, 2\pi)$. Určete obor hodnot funkce[7] $f(z) = e^{e^z}$ jako funkce $f : D \to \mathbb{C}$. (2 BODY)

(b) Rozhodněte, jestli existuje funkce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, kterou lze získat pomocí (konečného) sčítání, odčítání, násobení a skládání funkcí, konstantních funkcí (i komplexních) a funkcí x, e^x, $\sin x$, $\cos x$, splňující následující dvě podmínky:
(i) Každá přímka v Gaussově rovině protíná obraz funkce f.
(ii) Existuje podobnost s koeficientem různým od 1 převádějící obraz funkce f na sebe.
Obrazem funkce f rozumíme její obor hodnot, tj. množinu bodů $z \in \mathbb{C}$ takových, že existuje $x \in \mathbb{R}$ takové, že $f(x) = z$. (3 BODY)

(a) Nejprve si uvědomíme, že pro libovolné komplexní $c = a + bi$ je $e^c \neq 0$. Z definice exponenciely je $e^c = e^{a+bi} = e^a(\cos b + i \sin b)$, odkud je $|e^c| = e^a(\cos^2 b + \sin^2 b) = e^a$, přitom pro reálné a je e^a vždy kladné číslo, tedy e^c nemůže být nula. Speciálně tedy funkce f nemůže nabývat nuly.

Nyní ukážeme, že všechny ostatní hodnoty jsou přípustné, tedy že obor hodnot funkce f je $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Mějme $z = u + vi \in D$, tedy $u \in \langle 0, 2\pi)$ a nejprve spočítejme e^z. Tedy $e^z = e^u(\cos v + i \sin v)$. Odtud je už vidět, že libovolné komplexní číslo $k \neq 0$ lze zapsat ve tvaru e^z, stačí totiž zapsat k v goniometrickém tvaru $k = r(\cos\alpha + i \sin\alpha)$, $r > 0$ a volit $v = \alpha$ a $u = \ln r$, tedy $r = e^u$.

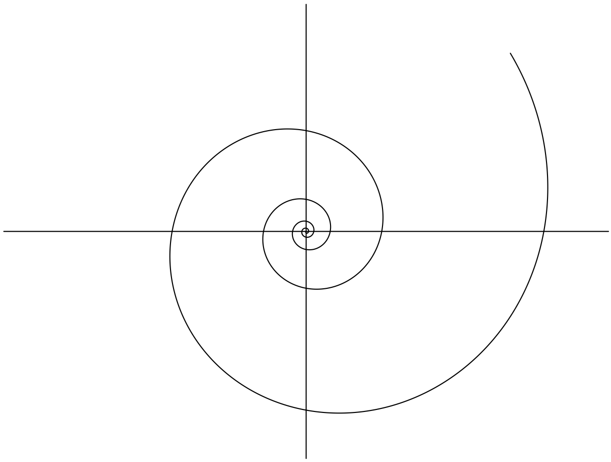
Stejným postupem dostaneme libovolné číslo různé od 0 a e^0 jako hodnotu $f(z) = e^{e^z}$ pro nějaké $z \in D$. O nule víme, že nikdy nebude hodnotou funkce f, zbývá vyřešit, co s e^0. To získat lze, totiž $e^0 = e^{0+2\pi i}$, $0 + 2\pi i \neq 0$ lze získat jako hodnotu funkce e^z, tedy $e^{0+2\pi i}$ lze získat jako hodnotu funkce $f(z) = e^{e^z}$.

(b) Nejprve si zkusíme rozmyslet, jak na řešení asi přijít, pokud Tě zajímá pouze řešení, a ne úvaha, jak na něj přijít, můžeš první odstavec přeskočit. Funkce f, kterou můžeme získat skládáním uvedených funkcí, vezme přímku ($\mathbb{R}$), nějak ji zdeformuje a nakreslí do roviny ($\mathbb{C}$). Zkusme si tedy představit, jak by přímka měla být zdeformována, aby splňovala podmínky (i) a (ii). Zaměřme se nejprve na podmínku (ii), označme k koeficient oné podobnosti a tipněme si, že se bude jednat o stejnolehlost se středem S. Vezměme si libovolný bod B na obrazu funkce f různý od S a zobrazme ho stejnolehlostí na B'. Body B a B' jsou nějak spojeny. Stejnolehlost nám

[7] Pokud náhodou nevíš, co znamená e^c, kde c je komplexní číslo, tak si přečti povídání k 7. sérii.

pak bude zobrazovat spojnici B a B' na spojnici B' a B'', tu pak na spojnici B'' a B''' a tak dále (a podobně spojnice $B^{-1'}$ a B bude zobrazena na B a B' a tak dále). Pokud bychom spojili body B a B' nějak přímo, těžko se nám bude splňovat podmínka (i). Pokud je ovšem spojíme obloukem kolem bodu S, dostaneme spirálu stáčející se kolem bodu S a podmínka (i) se potom splní snadno. Nyní přistoupíme k preciznějšímu řešení.

Rozhodneme se tedy hledat obraz funkce f jako spirálu. Při troše hraní lze zjistit, že například funkce $f = e^{x+ix}, x \in \mathbb{R}$, vytváří spirálu (tuto funkci lze zapsat více různými způsoby a těch funkcí, které vytváří spirálu, je více – stačí například pronásobit libovolnou konstantou). Obraz funkce f je nakreslen na následujícím obrázku.



Rozmyslet si, že obraz funkce f protíná každá přímka, necháme na Tobě. Hledaná podobnost je (například) stejnolehlost se středem v bodě $0 + 0i$ a koeficientem $e^{2\pi}$. Totiž bod $f(x) = e^{x+ix} = e^x(\cos x + i \sin x)$ se v této stejnolehlosti zobrazí na bod $e^{2\pi}e^x(\cos x + i \sin x) = e^{x+2\pi}(\cos(x + 2\pi) + i \sin(x + 2\pi)) = f(x + 2\pi)$, tedy obraz bodu $f(x)$ se stejnolehlostí zobrazí někam do obrazu funkce f (konkrétně na $f(x + 2\pi)$). Na druhou stranu $f(x - 2\pi)$ je vzor bodu $f(x)$ v dané stejnolehlosti, tedy body, které nejsou v obrazu funkce f, se danou stejnolehlostí do obrazu funkce f nezobrazí.

Poznámky k došlým řešením: Častou chybou v první části bylo vyloučení hodnoty 1 z oboru hodnot. V komplexních číslech totiž není funkce e^z prostá, tedy této hodnoty dosáhneme nejen pomocí e^0, ale také např. $e^{2\pi i}$ – za toto jsem strhával bod. V druhé části pak řešitelé, kteří přišli na nápad se spirálou, tento již dotáhli úspěšně do konce.